Chuyên Đề: GIẢI TÍCH.

(laisac tổng hợp nhưng chưa chỉnh lý)

A. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định lí .*(định lí giá trị trung gian).*

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn [a ;b] và $f(a) \neq f(b)$ thì với số thực M nằm giữa f(a) và f(b) luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a;b]$ sao cho $f(c) = M$

Hệ quả.

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn [a ;b] và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in [a;b]$.

Chú ý: *Nếu kèm theo hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trong $[a;b]$ thì phương trình có nghiệm duy nhất* $x_0 \in [a;b]$

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1 .Cho hàm số $f:[a;b] \to [a;b]$ liên tục .

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trong $[a;b]$

Giải. Đặt $g(x) = f(x) - x$ là hàm số liên tục $[a;b]$ mà $g(a).g(b) = (f(a) - a).(f(b) - b) < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in [a;b] \Rightarrow g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - x_0 = 0$ hay phương trình $f(x) = x$ có nghiệm $x_0 \in [a;b]$

Bài 2 Cho hàm số f(x) liên tục trong đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện f(0) = f(1)

Chứng minh phương trình $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2012}\right)$ có nghiệm.

Giải. Đặt $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2012}\right) - f(x)$ hàm số này xác định và liên tục trong $\left[0;\frac{2012}{2013}\right]$

Ta có $\left|\begin{array}{l} g(0) = f(\frac{1}{2013}) - f(0) \\ g(\frac{1}{2013}) = f(\frac{2}{2013}) - f(\frac{1}{2013}) \\ g(\frac{2}{2013}) = f(\frac{3}{2013}) - f(\frac{2}{2013}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(\frac{2012}{2013}) = f(1) - f(\frac{2012}{2013}) \end{array}\right.$

Suy ra $g(0) + g(\frac{1}{2013}) + g(\frac{2}{2013}) + \ldots g(\frac{2012}{2013}) = f(1) - f(0) = 0$

Do đó $g(0)+g(\frac{1}{2013})+g(\frac{2}{2013})+...g(\frac{2012}{2013})=0$, nên tồn tại $i,j\in\left[0;\frac{2012}{2013}\right]$ sao cho

$g(\frac{i}{2013}).g(\frac{j}{2013})\le 0\Rightarrow$ phương trình $g(x)=f(x+\frac{1}{2012})-f(x)$ có nghiệm hay phương trính $f(x)=f(x+\frac{1}{2012})$ có nghiệm .

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=x^4+\text{ax}^3+bx^2+cx+d$.

Chứng minh rằng $f'(x)>0,\forall x\in R$, thì

$F(x)=f(x)+f^1(x)+f^{12}(x)+f^3(x)+f^4(x)>0,\forall x\in R$.

Giải. F(x) liên tục trong R, thỏa mãn $F(x)\to+\infty$ khi $x\to\pm\infty$, suy ra hàm số tồn tại giá trị nhỏ nhất chính là cực tiểu của hàm số , ta có $F'(x)=f^1(x)+f^2(x)+f^3(x)+f^4(x)$ là một đa thức bậc lẻ nên F'(x) có ít nhất một nghiệm. , mặt khác $F'(x)=F(x)-f(x)$

Giả sử x_0 là nghiệm F'(x) thì

$F'(x_0)=F(x_0)-f(x_0)\Leftrightarrow F(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow F(x_0)=f(x_0)>0\Rightarrow F(x)>F(x_0)>0,\forall x\in R$.

Bài 4 .Cho phương trình $x^n+x^{n-1}+...+x-1=0.$ Chứng tỏ rằng với mọi n nguyên dương thì phương trình có duy nhất một nghiệm dương x_n. Tính $\lim x_n$

Giải. Đặt $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+...+x-1$ là hàm số liên tục trong R.

Giả sử $0<x_1<x_2\Rightarrow f_n(x_1)-f_n(x_2)=\left(x_1^n-x_2^n\right)+\left(x_1^{n-1}-x_2^{n-1}\right)+...\left(x_1-x_2\right)<0\Rightarrow f_n(x_1)<f_n(x_2)$ suy ra hàm số đồng biến trong $(0;+\infty)$.

Mặt khác ta có $f_n(0)=-1<0,f_n(1)=n-1>0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm .

Vậy ứng với một giá trị n phương trình có đúng một nghiệm $x_n\in(0;1)$

Vì x_n là nghiệm phương trình đã cho nên $x_n^n+x_n^{n-1}+...+x_n-1=0$, nhận thấy khi n tăng thì x_n giảm , tức là dãy $\{x_n\}$ giảm và bị chặn nên dãy có hội tụ.

Giả sử dãy hội tụ về $a\in(0;1)$ nghĩa là $\lim x_n=a$, ta có:

$$x_n^n+x_n^{n-1}+...+x_n-1=0\Leftrightarrow 1=\frac{1-x_n^n}{1-x_n}x_n\Rightarrow 1=\lim\frac{1-x_n^n}{1-x_n}x_n=\frac{a}{1-a}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow \lim x_n=\frac{1}{2}$$

II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU

Bài 1. *Giải phương trình : $tgx=2^{\cos 2x}$,* với $x\in(0;\frac{\pi}{2})$.

Lời giải :

Phương trinh tương đương: $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2^{\cos^2 x}}{2^{\sin^2 x}}\Leftrightarrow\sin x.2^{\sin^2 x}=\cos x.2^{\cos^2 x}$.

Vì $x\in(0;\frac{\pi}{2})\Rightarrow$ sinx>0 ;cosx>0 .Do đó.

Xét hàm số: f(t)=$t.2^t$ là hàm số liên tục và đồng biến $\forall t>0$.

Nên phương trình tương đương: f(sinx)=f(cosx) $\Leftrightarrow$ sinx=cosx$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\frac{\pi}{4}$

Bài 2. *(Đề thi ĐH & CĐ năm 2000)*

Giải phương trình: $\log_3\left(\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}\right)=x^2+3x+2.$

Lời giải : Ta có $\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}>0, \quad \forall x\in R$.

Ta nhận thấy : $(2x^2+4x+5)-(x^2+x+3)=(x^2+3x+2)$. Do đó phương trình tương đương.

$\log_3(x^2+x+3)-\log_3(2x^2+4x+5)=(2x^2+4x+3)-(x^2+x+3)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2+x+3)+(x^2+x+3)=\log_3(2x^2+4x+5)+(2x^2+4x+5)$. (1)

Xét hàm số $y=f(t)=\log_3 t+t$. là hàm số đồng biến và liên tục với $\forall t>0$

Nên phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x^2+x+3)=f(2x^2+4x+5) \Leftrightarrow x^2+x+3=2x^2+4x+5$

$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-1$ hoặc $x=2$.

Vậy nghiệ của phương trình trên là: $x=-1$ hoặc $x=2$.

Bài 3. *(TH&TT T7/298)*

Giải phương trình : $3^x=1+x+\log_3(1+2x)$.

Lời giải :ĐK: $x>-\dfrac{1}{2}$

Phương trình tương đương :$3^x+x=1+2x+\log_3(1+2x)$

Đặt: $t=\log_3(1+2x) \Rightarrow 1+2x=3^t$. Vậy phương trình trên viết lại: $3^x+x=3^t+t$ (1)

Xét hàm số :$f(a)=3^a+a$, là hàm số liên tục và đồng biến trong tập số thực R.

Phương trình (1) tương đương :$f(x)=f(t) \Rightarrow x=t$.

Vậy phương trình trở thành:$1+2x=3^x$.

Tương tự chứng minh như trên ,nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị : $y=1+2x$ và $y=3^x$ .Vẽ hai đồ thị ,ta sẽ có 2 hoành độ giao điểm là: $x=0$ và $x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=0$ hoặc $x=1$.

Bài 4. *Giải phương trình* $(2x+1)(2+\sqrt{4x^2+4x+4})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$.

HD. Phương trình tương đương

$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})=-3x(2+\sqrt{(-3x)^2+3}) \Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)$.

Trong đó $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$, là hàm đồng biến và liên tục trong R, phương trình trở thành

$f(2x+1)=f(-3x) \Leftrightarrow 2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất.

Bài 5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$$

(Đề tuyển sinh Đại học, Cao đẳng Khối A năm 2007)

Phân tích và lời giải

- Ta có thể sử dụng phương pháp biến đổi để giải bài toán;
- Định hướng: ta biến đổi phương trình về một vế theo x xem là hàm số biến *x*;
- Bài toán giải đơn giản hơn dựa vào phương pháp đạo hàm.

Điều kiện $x\ge 1$

Phương trình tương đương: $-3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=m$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}; t\geq 0$

Lúc đó phương trình theo t là: $-3t^2+2t=m$

Vì $t=\sqrt{1-\dfrac{2}{x+1}}\Rightarrow 0\leq t<1$

Trên [0; 1) ta có $-1<f(t)\leq\dfrac{1}{3}$

Vậy phương trình có nghiệm khi $-1<m\leq\dfrac{1}{3}$

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$2^x+3=m\sqrt{4^x+1}.$$

(Cấu trúc đề thi TN THPT và Đại học của Bộ giáo dục năm 2008)

Phân tích và lời giải

- Ta có thể sử dụng phương pháp tam thức để giải bài toán;
- Định hướng: ta biến đổi phương trình về một vế theo hàm biến *x*;
- Bài toán giải đơn giản hơn dựa vào phương pháp đạo hàm.

Ta có phương trình viết lại: $\dfrac{2^x+3}{\sqrt{4^x+1}}=m$

Bằng cách đặt ẩn phụ $t=2^x, t>0$. Lúc đó phương trình là: $m=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ trên $(0;+\infty)$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đồ thị của hàm số *f(x)* và đường thẳng *y = m* có một điểm chung duy nhất.

Ta có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}-\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}(t+3)}{t^2+1}=\dfrac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'(t)		+	0	−	
f(t)	3	↗	$f_{CĐ}=\sqrt{10}$	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình có nghiệm duy nhất khi $\left[\begin{array}{l}1<m<3\\ m=\sqrt{10}\end{array}\right.$.

Chú ý: *Bài toán yêu cầu phương trình có nghiệm ta cần* $m\leq\sqrt{10}$ *; bài toán yêu cầu phương trình có hai nghiệm phân biệt ta cần* $3<m<\sqrt{10}$

Bài 7. Giải phương trình: $\log_2 \dfrac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$ (*)

(Đề dự bị Đại học khối A năm 2007)

Phân tích và lời giải

- Định hướng trong phương trình vừa chứa logarít vừa chứa biểu thức mũ và biến ở đa thức;
- Ta thử nghĩ đến cách giải phương trình thông qua việc xét các hàm số.

Điều kiện $\begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 1 = 2^0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

$(*) \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{2^x - 1}{x} = 1 - 2^x + x$ và $x > 0$

$\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) - \log_2 x = 1 - 2^x + x$ và $x > 0$

$\Leftrightarrow (2^x - 1) + \log_2(2^x - 1) = x + \log_2 x$ (**)

Xét hàm $f(t) = t + \log_2 t$ đồng biến khi $t > 0$

Do đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$, với $u > 0, v > 0$

Vậy từ (**) $\Leftrightarrow 2^x - 1 = x \Leftrightarrow 2^x - x - 1 = 0$ (***)

Lại xét hàm $g(x) = 2^x - x - 1$ khi $x > 0$

$g'(x) = 2^x \ln 2 - 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{1}{\ln 2} = \log_2 e > 1 \Leftrightarrow x = \log_2(\log_2 e) > 0$

Ta có $g''(x) > 0$ với mọi x nên $g'(x)$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}$

+) $g'(x) < 0, \forall x < \log_2(\log_2 e) \Rightarrow g$ giảm trên $\left(-\infty; \log_2(\log_2 e)\right]$

+) $g'(x) > 0, \forall x > \log_2(\log_2 e) \Rightarrow g$ tăng trên $\left[\log_2(\log_2 e); +\infty\right)$

$\Rightarrow g(x) = 0$ có tối đa là 1 nghiệm trên $\left(-\infty; \log_2(\log_2 e)\right]$

và có tối đa là 1 nghiệm trên $\left[\log_2(\log_2 e); +\infty\right)$.

bằng cách thử nghiệm ta có pt $g(x) = 0$ (***) có 2 nghiệm là $x = 0; x = 1$.

Vì $x > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 8. Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số hữu tỉ, α là số thực sao cho

$$\alpha^3 - \alpha = [f(\alpha)]^3 - f(\alpha) = 33^{2009}.$$

Chứng minh rằng $\left(f^{(n)}(\alpha)\right)^3 - f^{(n)}(\alpha) = 33^{2009}$

Trong đó $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots f(x)\ldots)))}_{\text{n lần f}}$, n là số nguyên dương

Phân tích và lời giải

- Khai thác giả thiết: $\alpha^3 - \alpha = [f(\alpha)]^3 - f(\alpha) = 33^{2009}$;
- Ta có suy nghĩ α *và* $f(\alpha)$ đều là nghiệm của phương trình

$$x^3 - x = 33^{2009} (1);$$

- Bài toán yêu cầu chứng minh $\left(f^{(n)}(\alpha)\right)^3 - f^{(n)}(\alpha) = 33^{2009}$
- Nên α *và* $f(\alpha)$ có thể bằng nhau;
- Từ đó nghĩ đến chứng minh α tồn tại duy nhất.

Sử dụng phương pháp đạo hàm ta xét hàm số:

$$g(x) = x^3 - x \text{ trên } (-\infty; +\infty).$$

Ta có g’(x) = $3x^2 - 1$, g’(x) = 0 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$y_{CT} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

Đồ thị của g(x) và đường thẳng y = 33^{2009} trên $\mathbb{R}$ chỉ có một điểm chung duy nhất

Suy ra trên $\mathbb{R}$ phương trình $x^3 - x = 33^{2009}$ có nghiệm duy nhất nên $\alpha = f(\alpha)$

$$\Rightarrow \alpha = f(\alpha) = f(f(\alpha)) = ... = f(f(f(...f(\alpha)...))) = f^{(n)}(\alpha)$$

Hay $\left(f^{(n)}(\alpha)\right)^3 - f^{(n)}(\alpha) = 33^{2009}$.

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương:

$$a\sqrt{2x^2+7} < x + a \text{ nghiệm đúng với mọi x.}$$

Phân tích và lời giải

- Có thể giải bài toán bằng phương pháp tam thức; nhưng phương pháp tam thức tỏ ra khá phức tạp, khi định lí đảo về dấu tam thức và so sánh một số với các nghiệm của tam thức không được học một cách hệ thống;
- Ta biến đổi bất phương trình một vế chứa biến *x*, vế còn lại chứa tham số a như sau: bất phương trình $\Leftrightarrow a < \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+7}-1}$;

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+7}-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi *x* khi a nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất của hàm số *f(x)*

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{\sqrt{2x^2+7} - 1 - x\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+7}}}{\left(\sqrt{2x^2+7}-1\right)^2} = \frac{7-\sqrt{2x^2+7}}{\sqrt{2x^2+7}\left(\sqrt{2x^2+7}-1\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{21} \\ x = -\sqrt{21} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{21}$		$\sqrt{21}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$-\dfrac{\sqrt{21}}{6}$	↗	$\dfrac{\sqrt{21}}{6}$	↘	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bất phương trình có nghiệm với mọi x khi $a < -\frac{\sqrt{21}}{6}$

Chú ý: *Bài toán yêu cầu tìm a để bất phương trình có nghiệm thì chỉ cần a nhỏ hơn giá trị lớn nhất của hàm số f(x)*

Bài 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$. Tìm *m* để hệ phương trình có nghiệm.

(Cấu trúc đề thi TN THPT và Đại học của Bộ giáo dục năm 2008)

Phân tích và lời giải

- Đây là hệ đối xứng loại I. Biểu diễn *x* và *y* qua hai biến *S* và *P* như sau:

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$. Điều kiện $S^2 \geq 4P (*)$;

- Khai thác điều kiện $S^2 \geq 4P$ để tìm ra khoảng chứa *S* (hoặc *P*);
- Hệ có nghiệm khi phương trình theo *S* và *P* có nghiệm thỏa mãn điều kiên vừa tìm được.

Hệ viết lại theo *S* và *P* là: $\begin{cases} S + P = m \\ S^2 - 2P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S \\ S^2 + 2S - 3m = 0 \end{cases}$

Ta có $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow 3m - 2S - 4(m - S) \geq 0$

$$\Leftrightarrow S \geq \frac{m}{2} \Leftrightarrow S \geq \frac{S^2 + 2S}{6} \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $S^2 + 2S - 3m = 0$ có nghiệm thỏa $0 \leq S \leq 4$

Hay phương trình $S^2 + 2S = 3m$ có nghiệm thỏa $0 \leq S \leq 4$

Xét hàm số $f(S) = S^2 + 2S$

Ta có hàm số luôn đồng biến trong $(-1; +\infty)$ nên đồng biến trên $[0; 4]$

Nên $\max\limits_{[0;4]} f = f(4) = 24$

$\min\limits_{[0;4]} f = f(0) = 0$

Phương trình có nghiệm khi $0 \leq m \leq 8$

I.HỆ PHƯƠNG TRÌNH :

- **Hệ phương trình ba ẩn**: *Dạng loại hệ phương trình, sau khi biến đổi đưa về hệ*

$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$ ***hoặc dạng*** $\begin{cases} g(y) = f(x) \\ g(z) = f(y) \\ g(x) = f(z) \end{cases}$

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Ta xét các hàm số f(t) ; g(t). Vận dụng khoảng đơn điệu của hàm số để chứng minh hệ phương trình có nghiệm thỏa x = y = z . Từ đó suy ra tìm nghiệm phương trình .

Bài1: *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 2x+1 = y^3+y^2+y \\ 2y+1 = z^3+z^2+z \\ 2z+1 = x^3+x^2+x \end{cases}$

Lời giải Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(y^3+y^2+y-1) = f(y) \\ y = \frac{1}{2}(z^3+z^2+z-1) = f(z) \\ z = \frac{1}{2}(x^3+x^2+x-1) = f(x) \end{cases}$.

Đặt f(t) = $\frac{1}{2}(t^3+t^2+t-1)$**,** $\forall t \in (-\infty;\ +\infty)$**. Ta có f'(t) =** $\frac{1}{2}(3t^2+2t+1) > 0$**,** $\forall t \in (-\infty;\ +\infty)$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trong $(-\infty;\ +\infty)$.

Giả sử x > y $\Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow y > z \Rightarrow f(z) > f(x) \Rightarrow z > x$. Vậy x > y > z > x Mâu thuẩn ! Tương tự x < y cũng dẫn đến mâu thuẫn , suy ra x = y = z . Do đó hệ phương trình tương đương

$x = \frac{1}{2}(x^3+x^2+x-1) \Rightarrow x = -1; x = 1$

Vậy nghệm của hệ trên là (-1 ;-1 ;-1) hoặc (1,1,1).

Bài 2 **:** (Thi HSG bảng A 2005-2006).

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}.\log_3(6-y) = x \\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log_3(6-z) = y \\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3(6-x) = z \end{cases}$$

Lời giải : Điều kiện xác định x,y,z < 6 .Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \log_3(6-y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} \quad (1) \\ \log_3(6-z) = \dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} \quad (2) \\ \log_3(6-x) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(y) = f(x) \\ g(z) = f(y) \\ g(x) = f(z) \end{cases}$$

Xét hàm số : $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}}$ với t < 6 . Ta có $f'(t) = \dfrac{6-t}{(t^2-2t+6)\sqrt{t^2-2t+6}} > 0$ với t< 6

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trong khoảng $(-\infty; 6)$.

Mặt khác ta xét hàm số $g(t) = \log_3(6-t)$, là hàm giảm trong khoảng $(-\infty; 6)$.

Nếu (x,y,z) là một nghiệm của hệ phương trình ta chứng minh x = y = z. Không mất tính tổng quát, giả sử x = max(x,y,z) thì có hai trường hợp.

TH1 . $x \ge y \ge z \Rightarrow f(x) \ge f(y) \ge f(z) \Rightarrow \log_3(6-y) \ge \log_3(6-z) \ge \log_3(6-x) \Rightarrow x \ge z \ge y \Rightarrow x = y = z$

TH2. $x \ge z \ge y \Rightarrow f(x) \ge f(z) \ge f(y) \Rightarrow \log_3(6-y) \ge \log_3(6-x) \ge \log_3(6-z) \Rightarrow z \ge x \ge y \Rightarrow x = y = z$

Vậy phương trình f(x) = g(x) có nghiệm duy nhất x = 3 .hệ có nghiệm duy nhất x = y = z = 3

Bài 3 (THTT T9/333)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3 - x) + 1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3 - y) + 1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3 - z) + 1 \end{cases}$

Lời giải : Viết hệ dã cho dưới dạng $\begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 2y^3 + 1 \\ y^3 + y^2 + 2y = 2z^3 + 1 \\ z^3 + z^2 + 2z = 2x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$

Xét hai hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $g(t) = 2t^3 + 1$.

Vì $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0$;$g'(t) = 6t^2 > 0$.Suy ra hai hàm số f(t) và g(t) luôn đồng biến trong R.

Giả sử (x,y,z) là nghiệm hệ đã cho , không giảm tổng quát giả sử

$x \geq y \Rightarrow g(y) = f(x) \geq f(y) = g(z) \Rightarrow y \geq z$

Mặt khác vì $x \geq y \Rightarrow f(y) = g(z) \geq g(y) = f(x) \Rightarrow y \geq x$. Điều này chỉ xảy ra khi x = y = z.

Vậy hệ tương đương với hệ $\begin{cases} x = y = z \\ f(x) = h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z & (1) \\ x^3 + x^2 + 2x = 2x^3 + 1 & (2) \end{cases}$

Phương trình (2) tương đương $h(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ là hàm số liên tục trên R

và ta có h(-2) < 0 ; h(0) > 0 ; h(1) < 0 ; và h(2) > 0

suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt trong (- 2 ; 2) .

Đặt x = 2cosu với $u \in (0;\pi)$. Phương trình trở thành $8\cos^3u - 4\cos^2u - 4\cos u + 1 = 0$.

suy ra $\sin u\,(8\cos^3u - 4\cos^2u - 4\cos u + 1) = 0$

$\Rightarrow 8\sin u\cos^3 u - 4\cos^2 u.\sin u - 4\cos u.\sin u + \sin u = 0 \Leftrightarrow 4\sin u.\cos u(2\cos^2 u - 1)$

$= 3\sin u - 4\sin^3 u = \sin 3u$.

Tương đương sin4u = sin3u . Giải phương trình ta thu được $u \in \left\{\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\right\}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình trên là x = y = z = 2cosu với $u \in \left\{\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\right\}$

Bài 4. *Giải các hệ phương trình sau:*

$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$.*(HSG bảng A 1994) ;*

$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$ *(HSG Bảng B 2006)*

HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN *đưa về phương trình dạng f(x) = f(y) hoặc f(h(x)) = f(g(y))*

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP *:Xét hàm số f(t) .Vận dụng tính đơn điệu của hàm số trong khoảng , đoạn nào đó để dẫn đến x = y hoặc $h(x) = g(y)$,từ đó suy ra cách giải .*

Bài 1. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} (x-y)[2-(x+y)] = 2\ln\dfrac{1+x}{1+y} & (1) \\ 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - 3 = 2^{\sqrt{x}} + 2^{\sqrt{y}} & (2) \end{cases}$$

Lời giải :
ĐK: $x \ge 0$; $y \ge 0$.
Phương trình (1) tương đương:$y^2-2y+2\ln(1+y)= x^2-2x+2\ln(1+x)$, có dạng f(y) = f(x) .
Xét hàm số :$f(t)= t^2-2t+2\ln(1+t)$, liên tục trong $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2t-2+\frac{2}{1+t}$ và $f''(x)=\frac{2t^2+2t}{(1+t)^2} > 0 \quad \forall t \ge 0$.

Từ đó suy ra :f(t) luôn đồng biến trong $(0;+\infty)$.
Do đó p/t: $y^2-2y+2\ln(1+y)= x^2-2x+2\ln(1+x) \Leftrightarrow f(y)=f(x) \Leftrightarrow x=y$.

Thế y = x vào (2) ta có: $4^{\sqrt{x}} - 3 = 2.2^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sqrt{x}} = -1 & (l) \\ 2^{\sqrt{x}} = 3 & (n) \end{cases}$

P/t có nghiệm là: $x=\log_2^2 3$.

Bài 2 : *Định m để hệ phương trình sau có nghiệm:* $\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{3-y} = m \\ \sqrt{2y} + \sqrt{3-x} = m \end{cases}$

HD :Trừ hai vế phương trình ta có: $\sqrt{2x} - \sqrt{3-x} = \sqrt{2y} - \sqrt{3-y}$
Đặt $f(t) = \sqrt{2t} + \sqrt{3-t}$. Hàm số xác định trong [0 ; 3].
CM hàm số đồng biến , suy ra x = y. Thế y = x vào phương trình (1) ta có

$\sqrt{2x} + \sqrt{3-x} = m \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2x} + \sqrt{3-x} \\ y = m \end{cases}$

Lập bảng biến thiên suy ra kết quả.
Bài 3. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} (\sin^2 x)^{\cos^2 y} = (\cos^2 y)^{\sin^2 x} & (1) \\ \cos^{2007} x + \cos^{2007} y = 1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.
Ta nhận thấy: $\sin x \ne 0$ $\cos x \ne 0$, $\sin y \ne 0$ $\cos y \ne 0$,nên

Phương trình tương đương: (1) $\Leftrightarrow \frac{\ln(\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(\cos^2 y)}{\cos^2 y}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ liên tục trong (0;1) có $f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2} > 0 \quad \forall t \in (0;1)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trong (0;1) .Do đó p/t: $\frac{\ln(\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(\cos^2 y)}{\cos^2 y} \Leftrightarrow f(\sin^2 x)=f(\cos^2 y)$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x=\cos^2 y$.
Thế $\sin^2 x=\cos^2 y$ vào phương trình (2) ta có :$\sin^{4014}x+\cos^{2007}x=1 \Rightarrow$ P/t có nghiệm là:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee x = \pi + k\pi$ .Do đó hệ có nghiê4mj là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee y = \pi + k\pi$

Hoặc $y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee x = \pi + k\pi$

Bài 4. (*Olympic 2004).* *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+y} = e^{x-y} & (1) \\ 64.8^{\sqrt{x}} - 96.4^{\sqrt{x}}.3^{\sqrt{y}} + 36.2^{\sqrt{x}}.9^{\sqrt{y}} - 3.27^{\sqrt{y}} = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải **:**

ĐK : $x \geq 0$, $y \geq 0$

Từ (1) $\Rightarrow \ln\left(\dfrac{1+x}{1+y}\right) = x - y \Leftrightarrow y - \ln(1+y) = x - \ln(1+x)$ (*)

Đặt f(t) = t – ln(1+t) xác định $\forall t \geq 0$

Ta có : $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t} \geq 0$, $\forall t \geq 0 \Rightarrow$ f(t) luôn luôn đồng biến $[0, +\infty)$.

Do đó phương trình (*) : y- ln(1+y) = x – ln(1+x) $\Leftrightarrow$ f(y) = f(x) $\Leftrightarrow$ y = x

Thế vào (2) ta có : $64.8^{\sqrt{x}} - 96.4^{\sqrt{x}}.3^{\sqrt{x}} + 36.2^{\sqrt{x}}.9^{\sqrt{x}} - 3.27^{\sqrt{x}} = 0$

Chia 2 vế cho $27^{\sqrt{x}}$ phương trình trở thành : $64.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3\sqrt{x}} - 96.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\sqrt{x}} + 36.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{x}} - 3 = 0$

Chia 2 vế cho 4 phương trình trở thành : $16.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3\sqrt{x}} - 24.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\sqrt{x}} + 9.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{x}} = \dfrac{3}{4}$

Đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{x}}$, vì $x \geq 0 \Rightarrow 0 < t \leq 1$.

Phương trình trở thành : $16t^3 - 24t^2 + 9t = \dfrac{3}{4}$

Lại đặt $t = \cos^2 X$ ($X \in (0, \pi)$), phương trình thành : $16.\cos^6 X - 24.\cos^4 X + 9\cos^2 X = \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow (4.\cos^3 X - 3\cos X)^2 = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \cos^2 3X = \dfrac{3}{4} \Rightarrow X = 10^0, X = 50^0, X = 70^0$

$\Rightarrow t = \cos^2 10^0, t = \cos^2 50^0, t = \cos^2 70^0$

$\Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}}{}^2(\cos^2 10^0), x = \log_{\frac{2}{3}}{}^2(\cos^2 50^0), x = \log_{\frac{2}{3}}{}^2(\cos^2 70^0)$ là 3 nghiệm phương trình trên .

Bài 5: *(TH&TT T9/309).*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_2(1 + 3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1 + 3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$

Lời giải :

Điều kiện có nghĩa : cosx > 0, siny > 0 .Từ hệ đã cho ta có :

$\log_2(1 + 3\cos x) + \log_3(\cos x) = \log_2(1 + 3\sin y) + \log_3(\sin y)$. (2)

Xét hàm số $f(t) = \log_2(1 + 3t) + \log_3 t$, với t > 0

Ta có $f'(t) = \dfrac{3}{(1+3t)\ln 2} + \dfrac{1}{t\ln 3} > 0, \quad \forall t > 0$

Do vậy, f(t) la hàm số đồng biến trên $(0 + \infty)$, từ (2) có f(cosx) = f(siny).

Do f(t) đồng biến suy ra siny = cosx .

Thay vàohệ phương trình (1) ta được : $\log_2(1 + 3\cos x) - \log_3(\cos x) = 2$ (3).

Xét hàm số $g(v) = \log_2(1 + 3v) - \log_3 v$, với $v = \cos x \in (0,1\}$.

Ta có $g^{'}(v) = \dfrac{3}{(1+3v)\ln 2} - \dfrac{1}{v\ln 3}$ và $g^{'}(v) = 0$ khi $v = v_0 = \dfrac{\ln 2}{3(\ln 3 - \ln 2)} \in (0,1\}$.
Lập bảng biến thiên, ta thấy g(v) nghịch biến từ $(0, v_0]$, và đồng biến từ $[v_0, 1)$.
Nên p/t (3) có nhiều nhất là 2 nghiệm theo cosx
và 2 nghiệm đó là:cosx = 1 và cosx = $\dfrac{1}{3}$.
Vậy hệ đã cho tương đương với 2 hệ :

$$\begin{cases}\cos x = 1\\ \sin y = 1\end{cases} \quad (4) \qquad \text{và} \qquad \begin{cases}\cos x = \dfrac{1}{3}\\ \sin y = \dfrac{1}{3}\end{cases} \quad (5)$$

Giải các hệ (4) và (5) ta có :

$$\begin{cases}x = 2k\pi\\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi k, n \in Z\end{cases} \qquad \text{và} \qquad \begin{cases}x = \pm ar\cos\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2k\pi\\ y = (-1)^n ar\sin\left(\dfrac{1}{3}\right) + n\pi k, n \in Z\end{cases}$$

Bài 6. *(HSG bảng B 1994)*.Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2 + 3x + \ln(2x+1) = y\\ y^2 + 3y + \ln(2y+1) = x\end{cases}$

Phương trình lại đưa về dạng hệ phương trình dạng 2 .

NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP *: (Đây là dạng vận dụng hàm số ngược) . Đặt một biểu thức nào đó của phương trình thành một hàm số rồi dẫn đến hệ phương trình có tính chất đối xứng.*

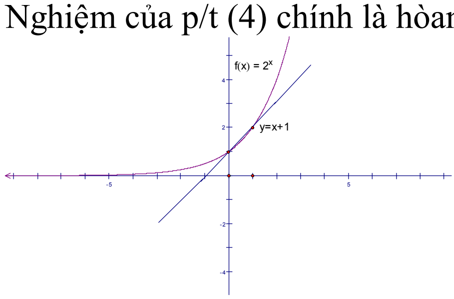
Bài 1. *Giải phương trình :* $2^x - \log_2(1+x) = 1$. *(TH&TT T6128)*

Lời giải *:*

ĐK: x>-1.

Đặt : y =$\log_2(x+1) \Rightarrow x = 2^t - 1$. Do đó ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}2^x = 1 + y & (1)\\ 2^y = 1 + x & (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ cho (2) ta có:$2^x - 2^y = y - x \Rightarrow 2^x + x = 2^y + y$. (3)
Xét hàm số :$f(a) = 2^a + a$ là hàm liên tục và đồng biến trong tập số thực R
Phương trình (3) tương đương: $f(x)=f(y) \Rightarrow x = y$.
Vậy phương trình (1) trở thành : $2^x = 1 + x$.(4)
Nghiệm của p/t (4) chính là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = 2^x$ và $y = x + 1$



Dựa vào đồ thị ta nhận thấy hai đồ thị cắt nhau lần lượt tại hai điểm có hoành độ là :x=0 và x=1.
Vậy nghiệm của phương trình là: x=o hoặc x=1

Bài 2 : Định tham số a để phương trình sau đây có ba nghiệm phân biệt : $x^3 - a = \sqrt[3]{x+a}$

HD : Đặt y = $\sqrt[3]{x+a} \Rightarrow y^3 = x + a$.

Từ phương trình trên ta suy ra hệ $\begin{cases}x^3 = a + y\\ y^3 = a + x\end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = y - x \Rightarrow x^3 + x = y^3 + y$ (1)

Đặt $f(t) = t^3 + t$, có đạo hàm $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ mọi t thuộc R , nên ham số luôn đồng biến trong R .

Từ phương trình (1) suy ra $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. từ đó ta có $x^3 = x + a$ (*) .
Vậy để phương trình trên có ba nghiêm phân biệt thì phương trình (*) phải có ba nghiệm phân biệt.
Dùng bảng biến thiên để phgương trình có ba nghiệ phân biêt thì $|a| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Bài 3 : Giải phương trình : $\log_2(\sin x + 1) = 2^{\sin x} - 1$.
HD : Đặt $y = \log_2(\sin x + 1) \Rightarrow \sin x = 2^y - 1$. (1).
Phương trình trở thành hệ : $\begin{cases} y = 2^{\sin x} - 1 \\ \sin x = 2^y - 1 \end{cases} \Rightarrow y - \sin x = 2^{\sin x} - 2^y \Leftrightarrow y + 2^y = \sin x + 2^{\sin x}$.
Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$ có $f'(t) = 1 + 2^t.\ln 2 > 0$. Hàm số luôn luôn đồng biến R
$\Rightarrow y + 2^y = \sin x + 2^{\sin x} \Leftrightarrow f(y) = f(\sin x) \Rightarrow y = \sin x$.
Do đó từ (1) ta có $y = 2^y - 1 \Leftrightarrow 2^y = y + 1 \Leftrightarrow y = 0 \quad ; y = 1$.
Khi $y = 0 \Rightarrow 2^{\sin x} = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$.
Khi $y = 1 \Rightarrow 2^{\sin x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi$.
Thử lại , phương trình có nghiệm :$x = \frac{n\pi}{2}. \quad (n \in Z)$

Bài 4 : Giải phương trình : $\log_{\frac{1}{4}} x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

HD. Đặt $y = \log_{\frac{1}{4}} x \Rightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^y$. Phương trình trở thành hệ $\begin{cases} y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ x = \left(\frac{1}{4}\right)^y \end{cases}$

(Dùng phương pháp hàm ngược để giải)

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 1 = y^3 + y^2 + y \\ 2y + 1 = z^3 + z^2 + z \\ 2z + 1 = x^3 + x^2 + x \end{cases}$

Phân tích và lời giải

- Để ý nếu xét một phương trình của hệ và xem một ẩn là biến thì ẩn kia là hàm theo biến đó hệ viết lại như sau:

Hệ phương trình viết lại $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(y^3 + y^2 + y - 1) \ (1) \\ y = \frac{1}{2}(z^3 + z^2 + z - 1) \ (2) \\ z = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + x - 1) \ (3) \end{cases}$.

- Ta có hàm của biến này lại là biến của hàm kia;

- Ta nghĩ đến xét hàm $f(t) = \frac{1}{2}(t^3 + t^2 + t - 1)$ trên $(-\infty; +\infty)$

Có $f'(t) = \frac{1}{2}(3t^2 + 2t + 1) > 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$, nên hàm số luôn luôn đồng biến.

Nếu $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Từ (3) và (1) $\Rightarrow z > x \Rightarrow f(z) > f(x)$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow y > z$

Vậy $\Rightarrow x > y > z > x$ không thể xảy ra

Tương tự:

Nếu y > z thì y > z > x > y

Nếu z > x thì z > x > y > z

Nên ta có có $x = y = z$.

Nghiệm của hệ (1; 1; 1), (-1; -1; -1)

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2} = 3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2} = 3^{x-1}+1 \end{cases}$; $x, y \in \mathbb{R}$ (I)

Phân tích và lời giải

- Hệ không mẫu mực, để ý trong hệ số mũ của cơ số 3 là $x - 1$ và $y - 1$;

- Ta cố ý biến đổi hệ theo $x - 1$ và $y - 1$.

Đặt $u = x - 1$, $v = y - 1$

(I) thành $\begin{cases} u+\sqrt{u^2+1} = 3^v \\ v+\sqrt{v^2+1} = 3^u \end{cases}$ (II) ;

Xét hàm $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$

$$f'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} > \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0;$$

Vậy f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $u > v \Rightarrow f(u) > f(v) \Rightarrow 3^v > 3^u \Rightarrow v > u$ (vô lý) ;

Tương tự nếu v > u cũng dẫn đến vô lý

Do đó hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} u+\sqrt{u^2+1} = 3^u \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3^u(\sqrt{u^2+1}-u) \quad (1) \\ u = v \end{cases}$

(Vì $\sqrt{u^2+1}-u \neq 0$ nên $u+\sqrt{u^2+1} = 3^u \Leftrightarrow 1 = 3^u(\sqrt{u^2+1}-u)$)

Đặt $g(u) = 3^u(\sqrt{u^2+1}-u)$

$$\Rightarrow g'(u) = 3^u \ln 3(\sqrt{u^2+1}-u)+3^u\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}-1\right)$$

$$g'(u) = 3^u\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\ln 3-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) > 0, \forall u \in R$$

Vậy $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g(0) = 1$. Vậy $u = 0$ là nghiệm duy nhất của (1)

Nên (II) $\Leftrightarrow$ $u = 0 = v$

Vậy (I) $\Leftrightarrow x = y = 1$.

Bài 9. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0 & (1) \\ x^3 - 3x + 1 - a > 0 & (2) \end{cases}$. Tìm *a* để hệ có nghiệm.

Phân tích và lời giải

- Thực chất của bài toán là tìm *a* để bất phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn (1);

Nghiệm của bất phương trình (1) là: $-1 < x < \frac{1}{3}$

Gọi vế trái của (2) là *f(x)*

Ta có $f(x) = x^3 - 3x + 1 - a \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$

Bảng biến thiên

x		-1		$\frac{1}{3}$		1	
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$		$3 - a$	↘	$\frac{1}{27} - a$			

Hệ có nghiệm khi $\min\limits_{\mathbb{R}} f > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{27} - a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{27}$

C. DỒN BIẾN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1: Cho $x, y \in R$ thỏa mãn $y \le 0; x^2 + x = y + 12$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = xy + x + 2y + 17$

Giải:

Từ giả thiết ta có $y = x^2 + x - 12 \le 0$ hay $-4 \le x \le 3$. Khi đó $x^3 + 3x^2 - 9x - 7$. Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7; x \in [-4;3]$

Ta có $f'(x) = 3(x^2 - 3 + 2x); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

Lập bảng biến thiên ta có $\min f(x) = f(1) = -12; \max f(x) = f(-3) = f(3) = 20$

Vậy min P=-12 đạt được khi x=1;y=-10 và max P=20 đạt được khi x=-3; y=-6 hoặc x=3; y=0

<u>Nhận xét:</u> Bài toán này được giải bằng cách thế một biến qua biến còn lại nhưng phải đánh giá biến còn lại. Từ đó tìm GTLN, GTNN của hàm số chứa biến bị chặn.

Bài 2. Cho x,y>0 thỏa x+y=1. Tìm GTNN của biểu thức

$$K = \frac{x}{\sqrt{1 - x}} + \frac{y}{\sqrt{1 - y}}$$

Giải:Từ giả thiết ta có y=1-x, 0<x<1. Khi đó K viết lại thành $K=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}$

Xét hàm số f(x)= $\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}-\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Vậy min K=$\sqrt{2}$ đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$

Bài 3. Cho $xy\neq 0$ thỏa mãn $x+y=1$. Tìm GTNN của: $P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{y^2+1}+\frac{y^2}{x^2+1}$

Giải:

Đặt $t=x^2+y^2$ ta có $(x+y)^2=1$ nên $xy=\frac{1-t}{2}$

Áp dụng BĐT $(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)$ suy ra $t\geq\frac{1}{2}$. Khi đó

$$P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{(x^4+y^4)+(x^2+y^2)}{x^2y^2+(x^2+y^2)+1}=\frac{1}{t}+\frac{2t^2+8t-2}{t^2+2t+5}$$

Xét hàm số $f(t)=P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{(x^4+y^4)+(x^2+y^2)}{x^2y^2+(x^2+y^2)+1}=\frac{1}{t}+\frac{2t^2+8t-2}{t^2+2t+5}$

Nếu sử dụng công thức đạo hàm ta có

$$f'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{-4t^2+24t+44}{(t^2+2t+5)^2}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow(t-1)(t+1)^2(t-5)=0$$

Từ BTT ta có

$\max P=\max f(t)=f(\frac{1}{2})=f(5)=\frac{12}{5}$ đạt được khi (x;y)=$(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ hoặc x = 2;y =1

$\min P=\min f(t)=f(1)=2$ đạt được khi (x;y)=(1;0) hoặc (0;1)

Bài 4: Cho x,y,z thoả mãn là các số thực: $x^2-xy+y^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất ,nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$

Giải:Từ giả thiết suy ra:

$$1=x^2-xy+y^2\geq 2xy-xy=xy;1=(x+y)^2-3xy\geq -3xy$$

ta có $-\frac{1}{3}\leq xy\leq 1$.

Mặt khác $x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + xy$ nên $x^4 + y^4 = -x^2y^2 + 2xy + 1$.
Đặt $t=xy$

bài toán sẽ trở thành tìm GTLN,GTNN của: $P = f(t) = \dfrac{-t^2 + 2t + 2}{t+2}; -\dfrac{1}{3} \le t \le 1$

Tính $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -1 + \dfrac{6}{(t+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{6} - 2 \\ t = -\sqrt{6} - 2 (l) \end{array}\right.$

Do hàm số liên tục trên$[-\dfrac{1}{3};1]$ nên so sánh giá trị của $f(\dfrac{-1}{3}), f(\sqrt{6}-2), f(1)$ cho ra kết quả:

$MaxP = f(\sqrt{6}-2) = 6 - 2\sqrt{6}$, $\min P = f(-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{11}{15}$

Nhận xét: Giả thiết và biểu thức P ở dạng đối xứng với 2 biến x,y. Vì vậy ta tìm cách đổi biến t=xy. Nhưng để giải trọn vẹn ta phải tìm điều kiện của biến t.
Sau đây là một số bài toán tương tự.

Bài 5: Cho $x^2 + y^2 = x + y$. Tìm GTNN,GTLN của biểu thức $P = x^3 + y^3 + x^2y + y^2x$

Giải:Đặt $t = x + y$ từ giả thiết ta có $2xy = (x+y)^2 - (x+y) = t^2 - t$ hay $xy = \dfrac{t^2 - t}{2}$.

Áp dụng BĐT $(x+y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 2(x+y)$ hay $t^2 \le 2t$ suy ra $0 \le t \le 2$. Khi đó biểu thức $P = (x+y)^3 - 2xy(x+y) = t^2$

Do đó Max P=4 đạt được khi $t = 2$ hay $x + y = 2$ và $xy = 1$ suy ra $x = 1; y = 1$

Ta có min P=0 khi $t = 0$ hay $x = 0; y = 0$

Bài 6: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Tìm GTLN của biểu thức $K = \dfrac{xy}{x+y+1}$

Giải:Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết ta có $xy = t^2 - 1$. Áp dụng BĐT $(x+y)^2 \ge 4xy$ ta có $0 < t \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó $K = t - 1 \le \dfrac{\sqrt{3-3}}{3}$

Vậy $maxK = t - 1 \le \dfrac{\sqrt{3-3}}{3}$ đạt được khi $(x;y) = (\dfrac{2}{\sqrt{3}}); -\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ và hoán vị của chúng.

Bài 7: Cho a,b,c là 3 số thực thuộc $[\dfrac{1}{3};3]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Giải:Đặt $P(a) = \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$. Xem đây là hàm theo biến a, còn b,c là hằng số.

Ta có: $P'(a) = \dfrac{b}{(a+b)^2} - \dfrac{c}{(a+c)^2} = \dfrac{(b-c)(a^2 - bc)}{(a+b)^2(a+c)^2}$

Nếu $a \ge b \ge c$ và $a,b,c \in \left[\frac{1}{3};3\right]$, suy ra: $b-c \ge 0; a^2 - bc \ge 0 \Rightarrow P'(a) \ge 0 \Rightarrow P(a)$ tăng trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$

$\Rightarrow P(a) \le P(3) = \frac{3}{3+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+3} = f(c)$

Xem $f(c)$ là hàm theo biến c. Khi đó:

$f'(c) = -\frac{b}{(b+c)^2} + \frac{3}{(c+3)^2} = \frac{(b-3)(3b-c^2)}{(b+c)^2(c+3)^2} \le 0$

Do đó $f(c)$ giảm trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$, suy ra $f(c) \le f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3+b} + \frac{3b}{3b+1} + \frac{1}{10} = g(b)$.

Xem $g(b)$ là hàm theo biến b. Khi đó:

$g'(b) = \frac{3}{(3b+1)^2} - \frac{3}{(3+b)^2} = \frac{(1-b)(1+b)}{(3b+1)^2(3+b)^2}$

Lập bảng biến thiên của $g(b)$ trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$, ta có: $g(b) \le g(1) = \frac{8}{5}$.

* Nếu $c \ge b \ge a$ và $a,b,c \in \left[\frac{1}{3};3\right]$. Từ kết quả trên ta có $P(c,b,a) \le \frac{8}{5}$.

Mặt khác: $P(a,b,c) - P(c,b,a) = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \le 0 \Rightarrow P(a,b,c) \le \frac{8}{5}$

Vậy $maxP = \frac{8}{5} \Leftrightarrow (a,b,c) = \left\{\left(3,1,\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{3},3,1\right);\left(3,\frac{1}{3},1\right)\right\}$

<u>Bài 9:</u> (Khối A–2011) Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn [1;4] và $x \ge y; x \ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

Giải:Đặt:

Đặt $\frac{y}{x} = a; \frac{z}{y} = b; \frac{x}{z} = c.$

Khi đó $abc = 1$ và $2 \ge \sqrt{bc} \ge 1.$

Ta có $P = \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$

Xét bài toán mới này có các biến b và c bình đẳng nên ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $b = c = \frac{1}{\sqrt{a}}.$

Khi đó $P = \frac{1}{2+3a} + \frac{2\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} := f(a)$ với $a \in \left[\frac{1}{4};1\right].$

So sánh $f\left(\frac{1}{4}\right)$ với $f(1)$ ta dự đoán được P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = \frac{1}{4}.$

Khi đó b=c=2 và ta tìm được các giá trị của (x,y,z) tương ứng là $(4,1,2)$.

Bài 10: Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh $a^2+b^2+c^2+abc \geq 4$

Giải:

Ta có: $a^2+b^2+c^2+abc=(a+b)^2-2ab+c^2+abc=(c-2)ab+(3-c)^2+c^2=(c-2)ab+2c^2-6c+9$

Đặt: $t=ab; (0 \leq t \leq \frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(3-c)^2}{4})$

Ta có: $f(t)=(c-2)t+2c^2-6c+9$

Dễ thấy: $f(t)$ là một hàm bậc nhất với biến t. Ta lại có

$f(0)=2c^2-6c+9=2(c-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}>4$

$f(\frac{(3-c)^2}{4})=(c-2)\frac{((3-c)^2)}{4}+2c^2-6c+9=\frac{(c-1)^2(c+2)}{4}+4 \geq 4$

Suy ra: $f(t) \geq 4; t \in [0;\frac{(3-c)^2}{4}]$. Điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi: $a=b=c=1$.

Bài 11: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa $a \geq 2b$. Chứng minh rằng:

$14\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 5\left(a+b+c\right)^2$

Giải : $14(a^2+b^2+c^2) \geq 5(a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow 9\left(a^2+b^2+c^2\right)-10\left(ab+bc+ca\right) \geq 0$

Cố định a và c. Xét hàm:

$f\left(b\right)=9\left(a^2+b^2+c^2\right)-10\left(ab+bc+ca\right)$ với $b \in \left(0;\frac{a}{2}\right]$

$f'\left(b\right)=18b-10a-10c<0$

$\Rightarrow f\left(b\right) \geq \frac{25}{4}a^2+9c^2-15ac=\left(\frac{5}{2}a-3c\right)^2 \geq 0$

Tư đây ta có đpcm

Bài 12:(Khối A –2012) Cho x,y,z thực không âm thỏa x+y+z=0. Tìm GTNN của chiều thức

thức: $P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}$

Cách 1: Từ giả thiết ta có $z=-(x+y)$ (1) trong 3 số x,y,z luôn có 2 số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử hai số đó là x,y ta có $xy \geq 0$

Thay (1) vào P ta có $P=3^{|x-y|}+3^{|2y+x|}+3^{|2x+y|}-\sqrt{12(x^2+y^2+xy)}$

$P=3^{|x-y|}+3^{|2y+x|}+3^{|2x+y|}-\sqrt{[12(x+y)^2-xy)]}$

$\geq 3^{|x-y|}+2.3^{\frac{|2y+x|+|2x+y|}{2}}-2\sqrt{3}\,|x+y| \geq 3^{|x-y|}+2.3^{\frac{3|x+y|}{2}}-2\sqrt{3}\,|x+y|$

Đặt $t=|x+y|,(t \geq 0)$ xét $f(t)=2.(\sqrt{3})^{3t}-2\sqrt{3}t$

$f'(x)=2.3(\sqrt{3})^{3t}ln\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}.(\sqrt{3}(\sqrt{3})^{3t}ln\sqrt{3}-1)>0$

Nên suy ra hàm f đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên $f(t) \geq f(0)=2$

Ta có: $3^{|x-y|} \geq 3^0 = 1$ vậy $P \geq 3^0 + 2 = 3$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$

Cách 2:

Ta chứng minh $3^t \geq t + 1 (*)$

Xét hàm $f(t) = 3^t - t - 1$

Có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 1 > 0, \forall t \geq 0$ và $f(t) = 0$ nên (*) đúng

Áp dụng (*), ta có:

$$3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} \geq 3 + |x-y| + |y-z| + |z-x|$$

Áp dụng bất đẳng thức: $|a| + |b| \geq |a+b|$ ta có:

$$(|x-y|+|y-z|+|z-x|)^2 = |x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2 + |x-y|(|y-z|+|z-x|) + |y-z|(|x-y|+|z-x|) +$$

$$\geq 2(|x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2)$$

Do đó:

$$|x-y| + |y-z| + |z-x| \geq \sqrt{2\left(|x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2\right)} = \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 2\left(x+y+z\right)^2}$$ Mà

$x + y + z = 0$ suy ra $|x-y| + |y-z| + |z-x| \geq \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$

Suy ra $P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2} \geq 3$

Khi $x = y = z = 0$ thì dấu bằng xảy ra, vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

Bài 13: (Khối B–2012) Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTLN của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$

Giải. Nếu $x + y + z = 0$ thì $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Chứng minh: Vì $x + y + z = 0$ nên dễ có được $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Tương đương

$(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) \leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy + yz + xz) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

$\leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Mà $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên ta chỉ cần tìm GTLN của: $P = \frac{5}{2}xyz = \frac{5}{2}x.\frac{(y+z)^2 - (y^2 + z^2)}{2} = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x$

Đặt $f(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x$ với x thuộc $[-1;1]$

$f'(x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{5}{4}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{-\sqrt{6}}{6}$

ta tìm được $GTLN = \frac{5\sqrt{6}}{36}$ khi x,y,z là bộ hoán vị của $(\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{6}}{3})$

Bài 14: Cho a,b,c số thực dương và $(a+b+c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) > 0$

Tìm max ;min P= $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

Giải. Từ giả thiết ta có : $ab+bc+ac=\frac{1}{4}(a+b+c)^2$. Do đó

$$P=\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{16}\left[(\frac{4a}{a+b+c})^3+(\frac{4b}{a+b+c})^3+(\frac{4c}{a+b+c})^3\right]$$

Đặt $x=\frac{4a}{a+b+c};y=\frac{4b}{a+b+c};z=\frac{4c}{a+b+c}$

Ta có

$$\begin{cases}x+y+z=4\\xy+xz+yz=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=4-x\\yz=x^2-4x+4\end{cases}$$

Do $(y+z)^2\ge 4yz\Rightarrow 0\le x\le\frac{8}{3}$

$$P=\frac{1}{16}(x^3+y^3+z^3)=\frac{1}{16}\left[x^3+(y+z)^3-3zy(y+z)\right]\Rightarrow P=\frac{1}{16}(3x^3-12x^2+12x+16)$$

Xét hàm số $f(x)=3x^3-12x^2+12x+16$ với $x\in[0;\frac{8}{3}]$

$\Rightarrow f'(x)=9x^2-24x+12\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=v\vee x=\frac{2}{3}$ thỏa mãn đk

$f(0)=16;f(2)=16;f(\frac{2}{3})=\frac{176}{9};f(\frac{8}{3})=\frac{176}{9}$

Vậy $MinP=1$ chẳng hạn khi $a=0;b=c\ne 0$

$MaxP=\frac{11}{9}$ chẳng hạn khi $a=b;c=4a;a\ne 0$

Bài 15: Cho a,b,c>0 thỏa mãn : $21ab+2bc+8ac\le 12$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge\frac{15}{2}$

Giải. Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ bài toán trở thành:

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $2x+8y+21z\le 12xyz$. Chứng minh rằng: $x+2y+3z\ge\frac{15}{2}$ (1)

Từ giả thiết $z(12xy-21)\ge 2x+8y>0$, từ đó $z\ge\frac{2x+8y}{12xy-21}$ với $x>\frac{7}{4y}$ (2).

Suy ra VT(1) $\ge x+2y+\frac{2x+8y}{4xy-7}$ (3).

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{2x+8y}{4xy-7}=\frac{4x^2y-5x+8y}{4xy-7}$ với biến $x>\frac{7}{4y}$ và y là tham số thực dương

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{16x^2y^2-56xy-32y^2+35}{(4xy-7)^2}$$

Trên $\left(\frac{7}{4y};+\infty\right)$ thì $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0=\frac{7}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$ và qua x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên f(x) đạt cực tiểu tại x_0.

Suy ra $f(x)\ge f(x_0)=2x_0-\frac{5}{4y} \Rightarrow VT(1)\ge f(x)+2y\ge f(x_0)+2y=g(y)\ (4)$.

Xét hàm số $g(y)=2y+\frac{9}{4y}+\frac{1}{2}\sqrt{32y^2+14}$

$\Rightarrow g'(y)=0 \Leftrightarrow (8y^2-9)\sqrt{32y^2+14}-28=0$.

Đặt $t=\sqrt{32y^2+14}>0$ thì pt trên trở thành $t^3-50t-112=0$. Phương trình này có duy nhất một nghiệm dương $t=8 \Leftrightarrow y=y_0=\frac{5}{4}$.

Vậy $g'\left(\frac{5}{4}\right)=0$. Với y>0 và qua y_0 thì $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương nên g(y) đạt cực tiểu tại y_0.

Lúc đó $g(y_0)=g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{15}{2}$.

Từ đó kết hợp với (4) suy ra VT(1) $\ge g(y)\ge g(y_0)=\frac{15}{2}$. Dấu "=" xảy ra với $x=3, y=\frac{5}{4}, z=\frac{2}{3}$ hay $a=\frac{1}{3}, b=\frac{4}{5}, c=\frac{3}{2}$.

<u>Bài 16</u>: Cho $x,y,z\in(0;1)$ thỏa mãn $xy+zx+xz=1$. Tìm GTLNN của $P=\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{1}{1-z^2}$.

<u>Giải.</u> Ta có $P=\frac{x^2}{x(1-x^2)}+\frac{y^2}{y(1-y^2)}+\frac{z^2}{(1-z^2)}$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{(1-x^2)}$ với $0<x<1$

$f'(x)=\frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)^2}; f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}(n) \vee x=-\frac{1}{\sqrt{3}}(l)$

Ta có bbt

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
f'(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\frac{1}{(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \forall x \in (0;1)$

Vì vậy $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(xy+xz+yz) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu"=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

D. DẠNG KHÁC

Bài 1. Tìm các giá trị của a và b để phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$
Có nghiệm và tổng a^2+b^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

HD. Giải.với $x \neq 0$ phương trình trở thành $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x+\frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$

Đặt $t = \left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow at+b = 2-t^2 \Rightarrow \left(2-t^2\right)^2 = \left(at+b\right)^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(t^2+1\right)$

Đẳng thức xảy ra khi $a = bt$

Do đó $a^2+b^2 \geq \frac{t^4-4t^2+4}{t^2+1} = t^2-5+\frac{9}{t^2+1}$

Đặt $f(u) = u-5+\frac{9}{u+1}, u \geq 4$

Dùng đạo hàm ta có $a^2+b^2 \geq f(u) \geq f(4) = \frac{4}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} u = t^2 = 4 \\ a = bt \\ at+b = 2-t^2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{4}{5}; b = -\frac{2}{5} \\ a = \frac{4}{5}; b = -\frac{2}{5} \end{array}\right.$

Bài 2. *(HSG bảng B 1999).*
Xét các số thực a, b sao cho phương trình $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$
Có ba nghiệm thực dương (các nghiệm có thể bằng nhau).
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}$.

HD.Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$, ta có

$x_1+x_2+x_3 = x_1.x_2.x_3 = \frac{1}{a}$ (1) ; $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = \frac{b}{a}$ (2).

Vì x_1, x_2, x_3 dương nên a,b dương .

Áp sụng bất đẳng thức $((x_1+x_2+x_3)^2 \geq 3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$.Từ (1) và (2) ta có
$\frac{1}{a^2} \geq \frac{3b}{a} \Leftrightarrow 0 < b \leq \frac{1}{3a}$.(3)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x_1+x_2+x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1.x_2.x_3} \Rightarrow \frac{1}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}} \Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (4).

Xét hàm số $P(a,b) = \frac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}$ theo biến số b thuộc $\left(0;\frac{1}{3a}\right]$ do (3) .

Vì $P'(b)=\dfrac{-2a^2-2}{a^2(b-a)^2}<0$ với mọi b ,suy ra hàm P(b) là hàm giảm ,do đó

$P(a,b)\ge P(a,\dfrac{1}{3a})$ hay $P(a,b)\ge \dfrac{3(5a^2+1)}{a(1-3a^2)}$ (5).

Lại xét hàm số $g(a)\ge \dfrac{3(5a^2+1)}{a(1-3a^2)}$ trên $\left(0;\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right]$ theo (4).

Vì $g'(a)=\dfrac{15a^4+14a^2-1}{a^2(3a^2-1)^2}<0$ với mọi a trên tập xác định (4) nên g(a) là hàm số giảm, do đó .

$g(a)\ge g(\dfrac{1}{3\sqrt{3}})\Leftrightarrow g(a)\ge 4\sqrt{4}$ .Do đó từ (5) ta có $P(a,b)\ge 12\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, b=\sqrt{3}$ và lúc đó $x_1=x_2=x_3=\sqrt{3}$. Vậy $P_{\min}=12\sqrt{3}$ **.**

Bài 3. Cho hàm số $f:(0;+\infty)\to R$ thỏa mãn điều kiện $f(\tan 2x)=\tan^4 x+\cot^4 x, \forall x\in R$
Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(\cos x)$.

Giải . Đặt $y=\tan 2x \Rightarrow y=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\Rightarrow \dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{\text{tanx}}-\text{tanx}\Rightarrow$

$$\frac{4}{y^2}=\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}-2\Rightarrow \left(\frac{4}{y^2}+2\right)^2=\tan^4 x+\frac{1}{\tan^4 x}+2$$

Suy ra $\dfrac{16}{y^4}+\dfrac{16}{y^2}+2=\tan^4 x+\cot^4 x$

Do đó ta xác định hàm số f(x) là $f(y)=\dfrac{16}{y^4}+\dfrac{16}{y^2}+2, \forall y\in(0;+\infty)$

Từ đó ta đi cầu hỏi $f(\cos x)=\dfrac{16}{\cos^4 x}+\dfrac{16}{\cos^2 x}+2, \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài 4. *(HSG-QG Bảng A 2003).*
Cho hàm số f xác định trên tập hợp số thực R ,lấy giá trị trên R và thỏa mãn điều kiện f(cotgx) = sin2x + cos2x với mọi x thuộc khoảng $(0;\pi)$.
Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số g(x) = f(x) .f(1 – x) trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải : Ta có f(cotgx) = sin2x + cos2x , $\forall x\in(0;\pi)$.

$$\Leftrightarrow f(\cot gx)=\frac{2\cot gx}{\cot g^2x+1}+\frac{\cot g^2x-1}{\cot g^2x+1}=\frac{\cot g^2x+2\cot gx-1}{\cot g^2x+1}\quad \forall x\in(0;\pi).$$

Từ đó ,lưu ý rằng với mọi t $\in$R đều tồn tại $x\in(0;\pi)$ sao cho cotgx = t , ta được

$$f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}\quad \forall t\in R.$$

Dẫn tới g(x) = f(x) .f(1 – x) = $\dfrac{x^2(1-x)^2+8x(1-x)-2}{x^2(1-x)^2-2x(1-x)+2}\quad \forall x\in R$. (1) .

Đặt u = x(1 – x).Dễ thấy . khi x chạy qua [-1 ;1] thì u chạy qua $[-2\,;\dfrac{1}{4}]$.

Vì vậy từ (1) ta được : $\min\limits_{-1\le x\le 1} g(x) = \min\limits_{-2\le u\le \frac{1}{4}} h(u)$ và $\max\limits_{-1\le x\le 1} g(x) = \max\limits_{-2\le u\le \frac{1}{4}} h(u)$ trong đó

$h(u) = \dfrac{u^2+8u-2}{u^2-2u+2} \Rightarrow h'(u) = \dfrac{2(-5u^2+4u+6)}{(u^2-2u+2)^2}$ .Khảo sát dấu đạo hàm trên [-1 ;1] có kết quả :

ming(x) = $4-\sqrt{34}$; maxg(x) = $\dfrac{1}{25}$.

Bài 5. (Bảng A _2006). Cho b là số thực dương . Hãy xác định tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình

$f(x+y) = f(x).3^{b^y+f(y)-1} + b^x\left(3^{b^y+f(y)-1} - b^y\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương $f(x+y)+b^{x+y} = \left(f(x)+b^x\right).3^{b^y+f(y)-1}, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Đặt $g(x) = f(x)+b^x$. Khi đó (1) có dạng $g(x+y) = g(x).3^{g(y)-1}\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.(2)

Thay y = 0 vào phương trình (2) , ta có $g(x) = g(x).3^{g(0)-1}\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R} \\ g(0)=1 \end{array}\right.$

- $g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ thì $f(x) = -b^x$.
- g(0) = 1, thế x = 0 vào phương trình (2) ta được.

$g(y) = g(0).3^{g(y)-1} \Leftrightarrow g(y) = 3^{g(y)-1} \Leftrightarrow 3^{g(y)-1} - g(y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}$ (3).

Xét hàm số h(t) = 3^{t-1} – t có h'(t) = 3^{t-1}ln3 – 1 , khi h'(t) = 0 $\Leftrightarrow t = \log_3(\log_3 e)+1 < 1$.

Ta có bảng biến thiên sau , với a = $\log_3 e - \log_3(\log_3 e) - 1 < 0$.

t	$-\infty$		$\log_3(\log_3 e)+1$		1		$+\infty$
h'(t)		-	0	+			
h)t)	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy PT h(t) = 0 có hai nghiệm t_1 = 1; t_2= c với 0 < c < 1 $\left(h(0)=\dfrac{1}{3}\right)$.

Tức $g(y) = 3^{g(y)-1} \Leftrightarrow \begin{cases} g(y)=1 \\ g(y)=c, 0<c<1 \end{cases} \forall y \in \mathbb{R}$ (4).

Giả sử tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho g(y_0) = c.

Khi đó 1 = g(0) = g(y_0) = g(y_0-y_0) = g(-y_0). $3^{g(y)-1}$ =cg(-y_0).

Suy ra g(-y_0) = $\dfrac{1}{c} \neq c$,mâu thuẫn với (4). Vậy g(y) = 1 $\forall y \in \mathbb{R}$, suy ra f(x) = 1 – b^x .

Vậy có hai hàm số thỏa mãn đề bài là f(x) = – b^x và f(x) = 1 – b^x .

Bài 6 Cho dãy số xác định bỡi : $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)...\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)$.

HD: Dùng phương pháp đạo hàm ta ta chứng minh bất đẳng thức $x-\dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.\quad (\forall x>0)$

Ta có $\ln x_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức trên với $\begin{cases} x = \dfrac{i}{n^2} \\ i = 1,2,3... \end{cases}$ ta được $\dfrac{i}{n^2} - \dfrac{i^2}{2n^4} < \ln(1 + \dfrac{i}{n^2}) < \dfrac{i}{n^2}$.

Suy ra $\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+...+n) - \dfrac{1}{2n^4}(1^2+2^2+3^2+...+n^2) < \ln x_n < \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)$

Điều này tương đương $V_n = \dfrac{1}{n^2}.\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{1}{n^4}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} < \ln x_n < \dfrac{1}{n^2}.\dfrac{n(n+1)}{2} = U_n$

Mà ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

Bài 7. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện 4(a+b+c) – 9 = 0.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^b\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)^c\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)^a$

Giải : $\ln S = b\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) + c\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right) + a\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$

Xét hàm số $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x>0$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{4}{5}$. Do đó tiếp tuyến của hàm số tại $\left(\dfrac{3}{4};\ln 2\right)$ có phương trình là

$y = \dfrac{4}{5}x + \ln 2 - \dfrac{3}{5}$

Lại có $f''(x) = \dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} < 0, \forall x>0$, nên đồ thị lồi trong khoảng $(0;+\infty)$

Dó đó tiếp tuyến của đồ thị nằm phía trên đồ thị, suy ra

$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \le \dfrac{4}{5}x + \ln 2 - \dfrac{3}{5}, \forall x>0$.

Áp dụng bất đẳng thức này cho số dương a ta có

$\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \le \dfrac{4}{5}a + \ln 2 - \dfrac{3}{5} \Rightarrow b\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \le \dfrac{4}{5}ab + \left(\ln 2 - \dfrac{3}{5}\right)b$

Tương tự ta có $c\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right) \le \dfrac{4}{5}bc + \left(\ln 2 - \dfrac{3}{5}\right)c$

$a\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right) \le \dfrac{4}{5}ca + \left(\ln 2 - \dfrac{3}{5}\right)a$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$\ln S \le \dfrac{4}{5}(ab+bc+ca) + \left(\ln 2 - \dfrac{3}{5}\right)(a+b+c) \le \dfrac{4}{5}\dfrac{(a+b+c)^2}{3} + \left(\ln 2 - \dfrac{3}{5}\right)(a+b+c) = \dfrac{9}{4}\ln 2$

Suy ra giá trị lớn nhất của S là $4\sqrt[4]{2}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{3}{4}$

Bài 8 : *Cho n số tùy ý $a_1, a_2...an$ và $x \in [-1;1]$ thỏa mãn*

$$x^2 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + ... + an\cos nx \ge a_1 + a_2 + ... + an$$

Chứng minh : $a_1 + 4a_2 + 9a_3 + ... n^2 an \le 2$

HD: Xét hàm số $f(x) = x^2 + a_1(\cos x - 1) + a_2(\cos 2x - 1) + ... + an(\cos nx - 1)$

Ta có $f''(x) = 2 - a_1\cos x - 4a_2\cos 2x - ... - n^2\cos nx$.

Nếu $f''(0) < 0 \Rightarrow \exists\delta$ là lân cận của 0 mà $f''(x) < 0 \ \forall x \in (-\delta;\delta)$.Suy ra f'(x) nghịch biến trong $(-\delta;\delta)$

Do đó f'(x) < f'(0) $\forall x \in [0\,;\delta)$ nên f(x) nghịch biến trong $[0\,;\delta)$ .suy ra f(x) < f(0) = 0 $\forall x \in [0\,;\delta)$

Điều này mâu thuẫn với giả thuyết $f(x) \geq 0 \quad x \in [-1; 1]$

Vậy f''(0) $\geq 0 \Leftrightarrow$ $a_1 + 4a_2 + 9a_3 + \ldots n^2 a_n \leq 2$ (dpcm).

Bài 9. (QG 2003). *Cho ba số thực không âm x,y,z thỏa mãn x+y+z > 0.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}$

HD: Nhận xét : P(ax, ay,az) = P(x,y,z) với mọi a > 0 .Tính thuần nhất của P cho ta thêm giả thiết x+y+z =1 mà không mất tính tổng quát . Bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của Q = $x^3+y^3+16z^3$ với điều kiện x+y+z =1

Ta có $x^3 + y^3 \geq \dfrac{(x+y)^3}{4} = \dfrac{1}{4}(1-z)^3$. Từ đó $Q \geq \dfrac{1}{4}(1-z)^3 + 16z^3$. Đặt

$f(z) = \dfrac{1}{4}(1-z)^3 + 16z^3$; $z \in (0;1)$,f'(x) = $-\dfrac{3}{4}(1-z)^2 + 48z^2$. Khi f'(x) = 0 thì $z = \dfrac{1}{9}$ $(z \in (0;1))$

Lập bảng biến thiên hàm f(z) trên đoạn [0; 1] ta thấy $f(z) \geq f(\frac{1}{9}) = \dfrac{64}{81}$.

Vậy GTNN(P) = $\dfrac{64}{81}$ khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{8}{9}, z = \dfrac{1}{9}$

Bài 10.*(HSG bảng A 1995)*.Giải phương trình $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - 8\sqrt[4]{4x+4} = 0$.

HD.Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 40 \Rightarrow min(x) = f(3) = 13$.

$g(x) = 8\sqrt[4]{4x+4} \Rightarrow \max g(x) = g(3) = 13$.

Bài 11 . *Chứng minh rằng phương trình* $x^{x+1} = (x+1)^x$ *có một nghiệm duy nhất*

HD:lấy logarit cơ số e hai vế ta có $(x+1)\ln x = x\ln(x+1)$..

Đặt $f(x) = x\ln(x+1) - x\ln x - \ln x$. có f'(x) = $\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} - \ln x - \dfrac{1}{x} - 1 = \ln\dfrac{x+1}{x} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x+1}{x}$

Lại đặt $t = \dfrac{x+1}{x} > 1$ ta có $g(t) = \ln t - t + \dfrac{1}{t} \Rightarrow g'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2} - 1 < 0$.$\Rightarrow$g(t) giảm trong $(1\,;+\infty)$.

Nên g(t) < g(1) = 0 với mọi $t \in (1;+\infty)$ .Do đó f'(x) < 0 $\forall x \in (0;+\infty)$ suy ra f(x) giảm trong $(0;+\infty)$ .Ta có f(1) = ln2 > 0 .

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\dfrac{x+1}{x} - \ln x\right] = -\infty$.

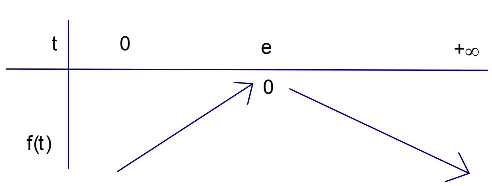
Bài 12. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^y + y = y^x + x$.

Giải Dễ thấy (x;y)=(a;a) là nghiệm với mọi $a \in N^*$

Giả sử $x \neq y, x > y \Rightarrow x^y - y^x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{\ln y}{y}$

Để thỏa mãm Bất đẳng thức trên khi (b; 1)

Đặt $f(t) = \dfrac{\ln t}{t} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$. Có bảng biến thiên



Nên hàm f(t) giảm trong $(e;+\infty)$. **Vậy** $4>3 \Rightarrow f(3)>f(4) \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$

Do đó để có số nguyên (x;y) sao cho $x>y$ và thỏa $\frac{\ln x}{x}>\frac{\ln y}{y}$ khi (x;y) = (3;2).

Do đó các nghiệm nguyên của phương trình là (a; a), (b; 1), ((1; c), (3; 2), (2; 3)

<u>Bài 13</u>. *Giải phương trình* $(2x+1)(2+\sqrt{4x^2+4x+4})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$.

<u>HD</u>. Phương trình tương đương

$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})=-3x(2+\sqrt{(-3x)^2+3}) \Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)$.

Trong đó $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$, là hàm đồng biến và liên tục trong R, phương trình trở thành

f(2x+1) = f(-3x) $\Leftrightarrow 2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất

<u>Bài 14</u>. Giải phương trình $(\text{sinx-2})(\sin^2 x-\text{sinx}+1)=3\sqrt[3]{3\sin x-1}+1$

Giải. Phương trình đã cho tương đương

$\sin^3 x-3\sin^2 x+3\text{sinx-2}=3\sqrt[3]{3\sin x-1}+1$

$\Leftrightarrow (\text{sinx-1})^3=3\sqrt[3]{3\sin x-1}+2$

Cách 1. Đặt $u=\text{sinx-1},\ \text{v}=\sqrt[3]{\text{3sinx-1}}$

Ta có hệ $\begin{cases} u^3=3v+2 \\ v^3=3u+2 \end{cases}$

Cách 2. Biến đổi phương trình tương đương

$(\text{sinx-1})^3+3(\text{sinx-1})=3\sin x-1+3\sqrt[3]{3\sin x-1}$

$\Leftrightarrow f(\text{sinx-1})=f\left(\sqrt[3]{3\sin x-1}\right)$

Trong đó $f(t)=t^3+3t$

<u>Bài 15</u>. Giải phương trình $\text{sinx+cosx-sinxcosx}=1+\lg\frac{3+\text{sinx+cosx}}{4+\text{sinxcosx}}$

Giải Ta có $3+\text{sinx+cosx}>1;\quad 4+\text{sinxcosx}>1$

Phương trình trên tương đương $\log(4+\text{sinxcosx})-(4+\text{sinxcosx})=\log(3+\text{sinx+cosx})-(3+\text{sinx+cosx})$

Xét hàm số $f(t)=\lg t-t,\ t\in(1;+\infty)$

<u>Bài 16</u> .

Tìm tham số a để hệ sau có nghiệm (x;y) thỏa mãn điều kiện $x\ge 4$.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}\le a \end{cases}$$

<u>HD</u>**:** Đặt $\sqrt{x}=t \Rightarrow y=(t-3)^2$. Vì $x\ge 4 \Rightarrow t\ge 2$. Hệ trên có nghiệm khi bất phương trình

f(t)=$\sqrt{t^2+5}+\sqrt{t^2-6t+12}\le a$ có ít nhất một nghiệm thỏa $t\ge 2$

tương đương $M\inf(t)\le a\ (t\ge 2)$

Ta có f'(t) = $\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}+\frac{2t-6}{2\sqrt{t^2-6t+12}}$ > 0 mọi t thuộc $[2;+\infty)$ suy ra hàm số f(t) luôn đồng biến trong $[2;+\infty)$. Do đó Mìn(t) = f(2) = 5 . Vậy $a\ge 5$

<u>Bài 17</u>. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x^2+2x-1<0 & (1) \\ x^3-3x+1-a>0 & (2) \end{cases}$. Tìm *a* để hệ có nghiệm.

Phân tích và lời giải

- Thực chất của bài toán là tìm *a* để bất phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn (1);

Nghiệm của bất phương trình (1) là: $-1<x<\frac{1}{3}$

Gọi vế trái của (2) là *f(x)*

Ta có $f(x)=x^3-3x+1-a \Rightarrow f'(x)=3x^2-3; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $\left(-1;\ \frac{1}{3}\right)$

Bảng biến thiên

x		-1		$\frac{1}{3}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$3-a$	↘	$\frac{1}{27}-a$			

Hệ có nghiệm khi $\min\limits_{\mathbb{R}} f>0 \Leftrightarrow \frac{1}{27}-a>0 \Leftrightarrow a<\frac{1}{27}$

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$; $x, y \in \mathbb{R}$ (I)

Giải

- Hệ không mẫu mực, để ý trong hệ số mũ của cơ số 3 là $x-1$ và $y-1$;
- Ta cố ý biến đổi hệ theo $x-1$ và $y-1$.

Đặt $u=x-1$, $v=y-1$ (I) thành $\begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^v \\ v+\sqrt{v^2+1}=3^u \end{cases}$ (II) ;

Xét hàm *f(x)* $=x+\sqrt{x^2+1}$, ta có $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>\frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+1}}\geq 0$;

Vậy *f* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $u>v \Rightarrow f(u)>f(v) \Rightarrow 3^v>3^u \Rightarrow v>u$ (vô lý) ;

Tương tự nếu $v>u$ cũng dẫn đến vô lý

Do đó hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^u \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=3^u(\sqrt{u^2+1}-u) \quad (1) \\ u=v \end{cases}$

(Vì $\sqrt{u^2+1}-u \neq 0$ nên $u+\sqrt{u^2+1}=3^u \Leftrightarrow 1=3^u(\sqrt{u^2+1}-u)$)

Đặt $g(u)=3^u(\sqrt{u^2+1}-u) \Rightarrow g'(u)=3^u\ln 3(\sqrt{u^2+1}-u)+3^u\left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}-1\right)$

$$g'(u)=3^u\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\ln 3-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)>0, \forall u\in R$$

Vậy $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ .Ta có $g(0) = 1$. Vậy $u = 0$ là nghiệm duy nhất của (1)

Nên (II) $\Leftrightarrow$ $u = 0 = v$ Vậy (I) $\Leftrightarrow x = y = 1$.

<u>Bài 19</u>.*(HSG bảng A 1999). Giải hệ phương trình :* $\begin{cases} (1+4^{2x-y}).5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0 \end{cases}$

HD. Đặt t = 2x – y phương trình thứ nhất của hệ trở thành $(1+4^t).5^{1-t}=1+2^{t+1} \Leftrightarrow \dfrac{1+4^t}{5^t}=\dfrac{1+2^{t+1}}{5}$

Chứng minh vế trái là hàm nghịch biến,vế phải đồng biến nên t = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình đầu ,thế 2x – y = 1 $\Rightarrow x=\dfrac{y+1}{2}$ vào phương trình thứ 2 ta có $y^3+2y+3+\ln(y^2+y+1)=0$

Chứng minh vế trái, hàm số đồng biến thì ta có y = -1 là nghiệm duy nhất của phương trình 2.

Vậy hệ có nghiệm là x = 0 ; y = - 1 .

Bài 20. (HSG 2001). Tìm các giá trị thực của m để hệ phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0 \end{cases}$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$

Từ phương trình đầu suy ra $x^3-3x^2=(y-1)^3-3(y-1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$, nghịch biến trong $-1\le t\le 1$ suy ra y = x + 1

Thay vào phương trình hai , ta có $f(x)=-x^2+2\sqrt{1-x^2}=m \Rightarrow -1\le m\le 2$

<u>Bài 21</u>..*(HSG bảng B 1999).*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x=3z^3+2z^2 \\ y=3x^3+2x^2 \\ x=3y^3+2y^2 \end{cases}$

Giải. Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x+z=3z^3+2z^2+z \\ y+x=3x^3+2x^2+x \\ x+y=3y^3+2y^2+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=f(z) \\ y+x=f(x) \\ x+y=f(y) \end{cases}$

Với $f(t)=3t^3+2t^2+t \Rightarrow f'(t)=9t^2+4t+1>0, \quad \forall t\in R$

Là hàm số đồng biến trong R nên

Giả sử $x=Max\{x,y,z\}$

$x \ge z \Leftrightarrow f(x) \ge f(z) \Rightarrow y + x \ge x + z \Leftrightarrow y \ge z \Rightarrow f(y) \ge f(z) \Leftrightarrow y \ge x$

Mà $x = Max\{\text{x,y,z}\} \Rightarrow x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = z$

Suy ra hệ có nghiệm $(x;y;z) = (-1;-1;-1),(0;0;0),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Bài 22 **:** (Thi HSG bảng A 2005-2006).

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6}.\log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6}.\log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6}.\log_3(6 - x) = z \end{cases}$$

Lời giải : Điều kiện xác định x,y,z < 6 .Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \log_3(6 - y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}} \quad (1) \\ \log_3(6 - z) = \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - 2y + 6}} \quad (2) \\ \log_3(6 - x) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2 - 2z + 6}} \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(y) = f(x) \\ g(z) = f(y) \\ g(x) = f(z) \end{cases}$$

Xét hàm số : $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - 2t + 6}}$ với t < 6 . Ta có $f'(t) = \dfrac{6 - t}{(t^2 - 2t + 6)\sqrt{t^2 - 2t + 6}} > 0$ với t< 6

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trong khoảng $(-\infty; 6)$.

Mặt khác ta xét hàm số $g(t) = \log_3(6 - t)$, là hàm giảm trong khoảng $(-\infty; 6)$.

Nếu (x,y,z) là một nghiệm của hệ phương trình ta chứng minh x = y = z. Không mất tính tổng quát, giả sử x = max(x,y,z) thì có hai trường hợp.

TH1 . $x \ge y \ge z \Rightarrow f(x) \ge f(y) \ge f(z) \Rightarrow \log_3(6 - y) \ge \log_3(6 - z) \ge \log_3(6 - x) \Rightarrow x \ge z \ge y \Rightarrow x = y = z$

TH2. $x \ge z \ge y \Rightarrow f(x) \ge f(z) \ge f(y) \Rightarrow \log_3(6 - y) \ge \log_3(6 - x) \ge \log_3(6 - z) \Rightarrow z \ge x \ge y \Rightarrow x = y = z$

Vậy phương trình f(x) = g(x) có nghiệm duy nhất x = 3 .hệ có nghiệm duy nhất x = y = z = 3

Bài 23 **(**THTT T9/333)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x + 1) = 2(y^3 - x) + 1 \\ y^2(y + 1) = 2(z^3 - y) + 1 \\ z^2(z + 1) = 2(x^3 - z) + 1 \end{cases}$

Lời giải **:** Viết hệ dã cho dưới dạng $\begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 2y^3 + 1 \\ y^3 + y^2 + 2y = 2z^3 + 1 \\ z^3 + z^2 + 2z = 2x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$

Xét hai hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $g(t) = 2t^3 + 1$.

Vì $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0$; $g'(t) = 6t^2 > 0$.Suy ra hai hàm số f(t) và g(t) luôn đồng biến trong R.

Giả sử (x,y,z) là nghiệm hệ đã cho , không giảm tổng quát giả sử

$x \ge y \Rightarrow g(y) = f(x) \ge f(y) = g(z) \Rightarrow y \ge z$

Mặt khác vì $x \ge y \Rightarrow f(y) = g(z) \ge g(y) = f(x) \Rightarrow y \ge x$. Điều này chỉ xảy ra khi x = y = z.

Vậy hệ tương đương với hệ $\begin{cases} x = y = z \\ f(x) = h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z & (1) \\ x^3 + x^2 + 2x = 2x^3 + 1 & (2) \end{cases}$

Phương trình (2) tương đương h(x) =$x^3 - x^2 - 2x + 1$ là hàm số liên tục trên R
và ta có h(-2) < 0 ; h(0) > 0 ; h(1) < 0 ; và h(2) > 0
suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt trong (- 2 ; 2) .
Đặt x = 2cosu với u $\in (0;\pi)$. Phương trình trở thành $8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1 = 0$.
suy ra sinu ($8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1$) = 0

$$\Rightarrow 8\sin u\cos^3 u - 4\cos^2 u.\sin u - 4\cos u.\sin u + \sin u = 0 \Leftrightarrow 4\sin u.\cos u(2\cos^2 u - 1)$$

$$= 3\sin u - 4\sin^3 u = \sin 3u .$$

Tương đương sin4u = sin3u . Giải phương trình ta thu được $u \in \left\{\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\right\}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình trên là x = y = z = 2cosu với $u \in \left\{\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\right\}$

Bài 24: *(TH&TT T9/309).*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_2(1 + 3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1 + 3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$

Lời giải :
Điều kiện có nghĩa : cosx > 0, siny > 0 .Từ hệ đã cho ta có :
$\log_2(1 + 3\cos x) + \log_3(\cos x) = \log_2(1 + 3\sin y) + \log_3(\sin y)$. (2)
Xét hàm số f(t) = $\log_2(1 + 3t) + \log_3 t$, với t > 0

Ta có $f'(t) = \frac{3}{(1+3t)\ln 2} + \frac{1}{t\ln 3} > 0, \quad \forall t > 0$

Do vậy, f(t) la hàm số đồng biến trên (0 + ∞), từ (2) có f(cosx) = f(siny).
Do f(t) đồng biến suy ra siny = cosx .
Thay vàohệ phương trình (1) ta được : $\log_2(1 + 3\cos x) - \log_3(\cos x) = 2$ (3).
Xét hàm số g(v) = $\log_2(1 + 3v) - \log_3 v$, với v = cosx ∈ (0,1}.

Ta có $g'(v) = \frac{3}{(1+3v)\ln 2} - \frac{1}{v\ln 3}$ và $g'(v) = 0$ khi $v = v_0 = \frac{\ln 2}{3(\ln 3 - \ln 2)}$ ∈ (0,1}.

Lập bảng biến thiên, ta thấy g(v) nghịch biến từ (0, v_0], và đồng biến từ [v_0, 1).
Nên p/t (3) có nhiều nhất là 2 nghiệm theo cosx

và 2 nghiệm đó là:cosx = 1 và cosx = $\frac{1}{3}$.

Vậy hệ đã cho tương đương với 2 hệ :

$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin y = 1 \end{cases}$ (4) và $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{3} \\ \sin y = \frac{1}{3} \end{cases}$ (5)

Giải các hệ (4) và (5) ta có :

$\begin{cases} x = 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi k, n \in Z \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \pm ar\cos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ y = (-1)^n ar\sin\left(\frac{1}{3}\right) + n\pi k, n \in Z \end{cases}$