# 🕮 *Chuyên đề 6:* BẤT ĐẲNG THỨC

## A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**I. Một số ghi nhớ:**

- $a^2 \ge 0$ , $(a \pm b)^2 \ge 4ab$ ; $\forall$ a, b
- $a^2 \pm ab + b^2 > 0$ ; $\forall$ a, b
- $|a| \ge \pm a$ ; $\forall$ a
- $|a + b| \le |a| + |b|$ ; $\forall$ a, b
- $|a - b| \ge |a| - |b|$ ; $\forall$ a, b
- $-1 \le \sin x \le 1; -1 \le \cos x \le 1$

**II. Bất đẳng thức Cauchy**

Cho hai số a, b không âm

1. Ta có: $a + b \ge 2\sqrt{a.b}$ dấu "=" xảy ra khi a = b
2. Nếu a + b = const thì tích a.b lớn nhất khi a = b
3. Nếu a.b = const thì tổng a + b nhỏ nhất khi a = b

## B. ĐỀ THI

**Bài 1:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn [1; 4] và $x \ge y, x \ge z$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x}$ .

***Giải***

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \ge \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với a, b dương và $ab \ge 1$.

Ta có: $P = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x} = \dfrac{1}{2+3\dfrac{y}{x}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}}$

$$\ge \frac{1}{2+3\dfrac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\dfrac{z}{y}\dfrac{x}{z}}} = \frac{1}{2+3\dfrac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\dfrac{x}{y}}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{z}{y} = \dfrac{x}{z}$ hoặc $\dfrac{x}{y} = 1$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ . Với x, y thuộc đoạn [1; 4] và $x \ge y$ thì $t \in [1; 2]$ .

Khi đó: $P \ge \dfrac{1}{2+3\dfrac{1}{t^2}} + \dfrac{2}{1+t} = \dfrac{t^2}{2t^2+3} + \dfrac{2}{1+t}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{2t^2+3} + \dfrac{2}{1+t}$ trên $[1; 2]$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-2[4t^3(t-1)+3(2t^2-t+3)]}{(2t^2+3)^2(t+1)^2} < 0, \forall x \in [1; 2]$.

Suy ra hàm số f nghịch biến trên $[1; 2]$. Do đó: $f(t) \le f(2) = \dfrac{34}{33}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} \dfrac{z}{x} = \dfrac{x}{z} \text{ hoặc} = \dfrac{x}{y} = 1 \\ t = \sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2 \end{cases}$ (*) .

Dễ thấy x = 4, y = 1, z = 2 thỏa (*).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{34}{33}$ khi x = 4, y = 1, z = 2 .

***Cách 2:***

Lấy đạo hàm theo biến z ta được:

$$P'(z) = 0 - \frac{y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(y+z)^2(z+x)^2}$$

- Nếu x = y thì $P = \dfrac{x}{2x+3x} + \dfrac{x}{x+z} + \dfrac{z}{z+x} = \dfrac{6}{5}$.
- Nếu x > y thì $P'(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - xy = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{xy}$.

| z | | $\sqrt{xy}$ | |
|---|---|---|---|
| P'(z) | − | 0 | + |
| P | ↘ | $P(\sqrt{xy})$ | ↗ |

Vậy $P \ge P(\sqrt{xy}) = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{y+\sqrt{xy}} + \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+x} = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$

$$= \frac{\frac{x}{y}}{2\frac{x}{y}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Đặt: $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $(t \in (1; 2])$ thì $P \ge \dfrac{t^2}{2t^2+3} + \dfrac{2}{1+t}$

Đặt: $f(t) = \dfrac{t^2}{2t^2+3} + \dfrac{2}{1+t}$. Tương tự như trên ta có $\min P = \dfrac{34}{33}$.

***Cách 3:*** Ta có: $P = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x} = \dfrac{1}{2+3\dfrac{y}{x}} + \dfrac{\dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}} + \dfrac{\dfrac{z}{x}}{\dfrac{z}{x}+1}$

Đặt $a = \dfrac{y}{x}$ và $b = \dfrac{z}{x}$. Vì $x, y, z \in [1; 4]$ và $x \ge y, x \ge z$ nên $a, b \in \left[\dfrac{1}{4}; 1\right]$.

Khi đó: $P = \dfrac{1}{2+3a} + \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+1}$.

Lấy đạo hàm theo biến b ta được:

$$P'(b) = 0 - \frac{a}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} = \frac{(1-a)\left(b^2-a\right)}{(a+b)^2(b+1)^2}.$$

- Nếu a = 1 thì $P = \dfrac{1}{2+3} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{b}{b+1} = \dfrac{6}{5}$.
- Nếu a < 1 thì $P'(b) = 0 \Leftrightarrow b^2 - a = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{a}$.

| b | $\frac{1}{4}$ | | $\sqrt{a}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| P'(b) | | – | 0 | + | |
| P | | ↘ | $P\left(\sqrt{a}\right)$ | ↗ | |

Vậy $P \ge P\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2+3a} + \dfrac{a}{a+\sqrt{a}} + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$.

Đặt: $t = \sqrt{a}$ $\left(t \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]\right)$ thì $P \ge \dfrac{1}{2+3t^2} + \dfrac{t^2}{t^2+t} + \dfrac{t}{t+1}$.

Đặt: $f(t) = \dfrac{1}{2+3t^2} + \dfrac{t^2}{t^2+t} + \dfrac{t}{t+1} = \dfrac{1}{2+3t^2} + \dfrac{t}{t+1} + \dfrac{t}{t+1} = \dfrac{1}{2+3t^2} + \dfrac{2t}{t+1}$.

Ta có: $f'(t) = -\dfrac{6t}{\left(2+3t^2\right)^2} + \dfrac{2}{(t+1)^2} \ge 0,\ \forall t \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Suy ra: f(t) đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow f(t) \ge f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{34}{33}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ b = \sqrt{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{z}{x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (*).

Dễ thấy x = 4, y = 1, z = 2 thỏa (*). Ta lại có: $\dfrac{34}{33} < \dfrac{6}{5}$ nên $\min P = \dfrac{34}{33}$.

**Cách 4** : P = $\dfrac{1}{2+3\dfrac{y}{x}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}}$

Đặt a = $\dfrac{z}{y}$ , b = $\dfrac{x}{z}$. Ta có a > 0, b > 0 ; ab = $\dfrac{x}{y}\geq 1$ .

P thành $\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{ab}}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}$

Mà $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\geq\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ và khi a = b thì dấu "=" xảy ra.

Nên P = $\dfrac{ab}{2ab+3}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\geq\dfrac{ab}{2ab+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

Đặt t = $\sqrt{ab}$, vì $1\leq ab=\dfrac{x}{y}\leq 4$ nên $1\leq t\leq 2$

Suy ra P $\geq\dfrac{t^2}{2t^2+3}+\dfrac{2}{1+t}=\dfrac{t^2}{2t^2+3}-\dfrac{4}{11}+\dfrac{2}{1+t}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{34}{33}$

$$=\frac{3t^2-12}{11(2t^2+3)}+\frac{2(2-t)}{3(1+t)}+\frac{34}{33}$$

$$=(2-t)\left[\frac{-3(t+2)}{11(2t^2+3)}+\frac{2}{3(1+t)}\right]+\frac{34}{33}$$

$$=(2-t)\left[\frac{35t^2-27t+48}{33(2t^2+3)(1+t)}\right]+\frac{34}{33}=$$

$$=(2-t)\left[\frac{8t^2+27(t-1)+48}{33(2t^2+3)(1+t)}\right]+\frac{34}{33}\geq\frac{34}{33},\forall t\in[1,2]$$

Khi a = b và t = 2 thì $P = \frac{34}{33}$.

Do đó $P \geq \frac{34}{33}$ và $P = \frac{34}{33}$ khi x = 4, y = 1 và z = 2

Vậy ta có $\min P = \frac{34}{33}$.

( Ghi chú: $35t^2 - 27t + 48$ là 1 tam thức bậc 2 có a > 0 và $\Delta < 0$ nên luôn luôn dương )

**Bài 2:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

| |
|---|
| Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. <br> Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$. |

***Giải***

- Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ( t > 0 ) thì :
  - $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = t^2 - 2$
  - $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{a}{b}.\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = t^3 - 3t$

  Suy ra: $P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$
- Theo giả thiết ta có: $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$

  $\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)(ab + 2)$ (Chia hai vế cho $ab \neq 0$)

  $\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a + b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ (1)

  Ta có: $(a + b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{(a + b).2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$ (2)

  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a + b = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

  Với $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ( t > 0 ) và kết hợp với (1) và (2) ta được:

$$2t+1\geq 2\sqrt{2(t+2)} \Leftrightarrow 4t^2+4t+1\geq 4\left[2(t+2)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4t^2-4t-15\geq 0 \Leftrightarrow t\geq \frac{5}{2} \text{ (vì } t>0).$$

- Xét $P(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$, với $t\geq \frac{5}{2}$.

  Ta có: $P'(t) = 12t^2 - 18t - 12 > 0, \forall t\geq \frac{5}{2}$.

  Do đó: Hàm số P(t) đồng biến trên $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$

  Suy ra: $P(t) \geq P\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a+b=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2\left(\frac{a+b}{ab}\right) \\ \frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a^2+b^2=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ (a+b)^2-2ab=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a+b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2\end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=1\end{cases}.$$

  Vậy $\min P = -\frac{23}{4}$ khi $\begin{cases} a=1 \\ b=2\end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=1\end{cases}$.

**Bài 3:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

| |
|---|
| Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. |

***Giải***

Đặt $t = ab + bc + ca$, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$\Rightarrow 1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2t$ và $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$

Theo B.C.S ta có: $t^2 = (ab + bc + ca)^2 \leq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

$\Rightarrow M \geq t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t} = f(t)$

$f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1-2t}}$

$f''(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} < 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \Rightarrow f'(t)$ là hàm giảm

$$f'(t) \ge f'(\frac{1}{3}) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{f tăng} \Rightarrow f(t) \ge f(0) = 2, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$$

$\Rightarrow M \ge 2$, $\forall$ a, b, c không âm thỏa a + b + c = 1

Khi a = b = 0 và c = 1 thì M = 2. Vậy min M = 2.

**Bài 4:** CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Cho hai số thực dương thay đổi x, y thỏa mãn điều kiện $3x + y \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

***Giải***

*Cách 1:* $1 \ge 3x + y = x + x + x + y \ge 4\sqrt[4]{x^3y} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{x^3y}} \ge 4$

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \ge \frac{2}{\sqrt{x\sqrt{xy}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3y}} \ge 8$$

Khi $x = y = \frac{1}{4}$ ta có A = 8. Vậy min A = 8.

*Cách 2:* Áp dụng: $\forall a, b > 0$: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \ge \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}} \ge \frac{4}{x + \frac{x}{2} + \frac{y}{2}} = \frac{8}{3x+y} \ge 8$$

Khi $x = y = \frac{1}{4}$ ta có A = 8. Vậy min A = 8.

**Bài 5:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn x(x + y + z) = 3yz, ta có $(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \le 5(y + z)^3$.

***Giải***

$$x(x + y + z) = 3yz \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 3\frac{y}{x}\frac{z}{x}$$

Đặt $u = \frac{y}{x} > 0, v = \frac{z}{x} > 0, t = u + v > 0$. Ta có:

$$1 + t = 3uv \le 3\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = 3\frac{t^2}{4} \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \ge 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t+2) \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 2$$

Chia hai vế cho $x^3$ bất đẳng thức cần chứng minh đưa về

$$(1+u)^3 + (1+v)^3 + 3(1+u)(1+v)(u+v) \le 5(u+v)^3$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^3 - 3(1+u)^2(1+v) - 3(1+u)(1+v)^2 + 3(1+u)(1+v)t \le 5t^3$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^3 - 6(1+u)(1+v) \le 5t^3 \Leftrightarrow (2+t)^3 - 6(1+u+v+uv) \le 5t^3$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^3 - 6\left(1+t+\frac{1+t}{3}\right) \le 5t^3 \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 - 4t \ge 0 \Leftrightarrow t(2t+1)(t-2) \ge 0$$

Đúng do $t \ge 2$.

**Bài 6:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$ .

***Giải***

$$\begin{cases}(x+y)^3 + 4xy \ge 2\\ (x+y)^2 - 4xy \ge 0\end{cases} \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 - 2 \ge 0 \Rightarrow x+y \ge 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} \ge \frac{1}{2}$$ dấu "=" xảy ra khi : $x = y = \frac{1}{2}$

Ta có: $x^2y^2 \le \frac{(x^2+y^2)^2}{4}$

$$A = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2(x^2+y^2) + 1 = 3\left[(x^2+y^2)^2 - x^2y^2\right] - 2(x^2+y^2) + 1$$

$$\ge 3\left[(x^2+y^2)^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right] - 2(x^2+y^2) + 1$$

$$= \frac{9}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1$$

Đặt $t = x^2 + y^2$, đk $t \ge \frac{1}{2}$

$$f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \Rightarrow f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0, \forall t \ge \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) \ge f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{16}$$

Vậy: $A_{min} = \frac{9}{16}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

**Bài 7:** ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$

***Giải***

**Cách 1:**

Ta có: $|p| = \left|\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right| \le \frac{(x+y)(1+xy)}{[(1+x)+(1+xy)]^2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le p \le \frac{1}{4}$

- Khi x = 0, y = 1 thì $p = -\frac{1}{4}$ là GTNN
- Khi x = 1, y = 0 thì $p = \frac{1}{4}$ là GTLN

**Cách 2:** $p = \frac{x - x^2y - y + xy^2}{(1+x)^2(1+y)^2} = \frac{x(1+y^2) - y(1+x^2)}{(1+x)^2(1+y)^2}$

$$= \frac{x(1+2y+y^2) - y(1+2x+x^2)}{(1+x)^2(1+y)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{y}{(1+y)^2}$$

Ta luôn có: $0 \le \frac{a}{(1+a)^2} \le \frac{1}{4}; \forall a \ge 0$

Nên $p_{max} = \frac{1}{4}$ khi x = 1, y = 0 và $p_{min} = -\frac{1}{4}$ khi x = 0, y = 1.

**Bài 8:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện xyz = 1.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$$

***Giải***

Ta có: $x^2(y + z) \ge 2x\sqrt{x}$. Tương tự $y^2(z+x) \ge 2y\sqrt{y}$, $z^2(x+y) \ge 2z\sqrt{z}$

$$\Rightarrow P \ge \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$$

Đặt $a = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}$, $b = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}$, $c = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}$

Suy ra: $x\sqrt{x} = \frac{4c + a - 2b}{9}$, $y\sqrt{y} = \frac{4a + b - 2c}{9}$, $z\sqrt{z} = \frac{4b + c - 2a}{9}$

Do đó $P \ge \frac{2}{9}\left(\frac{4c + a - 2b}{b} + \frac{4a + b - 2c}{c} + \frac{4b + c - 2a}{a}\right)$

$$= \frac{2}{9}\left[4\left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - 6\right] \ge \frac{2}{9}(4.3 + 3 - 6) = 2$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ x = y = z = 1. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

**Bài 9:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$$

***Giải***

Ta có: $P = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$

Do $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} \geq xy + yz + zx$

Nên $P \geq \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z}\right)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}$ với $t > 0$. Lập bảng biến thiên của f(t) ta suy ra

$f(t) \geq \frac{3}{2}, \forall t > 0$. Suy ra: $P \geq \frac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

**Bài 10:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Cho hai số thực $x \neq 0$ và $y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện:

$$(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

***Giải***

Từ giả thiết ta suy ra: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}$

Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$ ta có: $a + b = a^2 + b^2 - ab$ (1)

$A = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = (a + b)^2$.

Từ (1) suy ra: $a + b = (a + b)^2 - 3ab$.

Vì $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ nên $a + b \geq (a + b)^2 - \frac{3}{4}(a + b)^2$

$\Rightarrow (a + b)^2 - 4(a + b) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a + b \leq 4$. Suy ra: $A = (a + b)^2 \leq 16$

Với $x = y = \frac{1}{2}$ thì A = 16. Vậy giá trị lớn nhất của A là 16.

**Bài 11:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y - 2|$$

***Giải***

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy xét M(x – 1; –y), N(x + 1; y).

Do OM + ON ≥ MN nên

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\ge\sqrt{4+4y^2}=2\sqrt{1+y^2}$$

Do đó: $A\ge 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|=f(y)$.

- Với $y\le 2\Rightarrow f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$

$\Rightarrow f'(y)=\dfrac{2y}{\sqrt{y^2+1}}-1$

| y | $-\infty$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(y) | | $-$ | 0 | $+$ | |
| f(y) | | $\searrow$ | $2+\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | |

$$f'(y)=0\Leftrightarrow 2y=\sqrt{1+y^2}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\4y^2=1+y^2\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Do đó ta có bảng biến thiên như hình bên:

- Với $y\ge 2\Rightarrow f(y)\ge 2\sqrt{1+y^2}\ge 2\sqrt{5}>2+\sqrt{3}$.

Vậy $A\ge 2+\sqrt{3}$ với mọi số thực x, y.

Khi $x=0$ và $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $A=2+\sqrt{3}$ nên giá trị nhỏ nhất của A là $2+\sqrt{3}$.

**Bài 12:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2005

> Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$.
>
> Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z}\le 1$.

***Giải***

Với a, b > 0 ta có: $4ab\le(a+b)^2\Leftrightarrow\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{a+b}{4ab}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Áp dụng kết quả trên ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right)\le\frac{1}{16}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right]\qquad(1)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{x+z}\right)\le\frac{1}{16}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right]\qquad(2)$$

$$\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{x+y}\right)\le\frac{1}{16}\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]\qquad(3)$$

Vậy: $\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1$

Ta thấy trong các bất đẳng thức (1), (2), (3) thì dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = z$. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

**Bài 13:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

***Giải***

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x . \left(\frac{15}{4}\right)^x} \Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2.3^x \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2.4^x$ (2)

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2.5^x \quad (3)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3), chia hai vế của bất đẳng thức nhận được cho 2, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ (1), (2), (3) là các đẳng thức $\Leftrightarrow x = 0$.

**Bài 14:** ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

***Giải***

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có

$$1 + x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{1.x^3.y^3} = 3xy \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$$

Tương tự : $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$ ; $\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

Suy ra $\quad VT \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}}$

Hay $\quad VT \geq \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \geq 3\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1.

**Bài 15:**

Cho x, y, z là ba số dương $x + y + z \leqslant 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \dfrac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$.

***Giải***

***Cách 1:*** Xem $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{x} - x, \sqrt{2}\right)$; $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{y} - y, \sqrt{2}\right)$; $\vec{w} = \left(\dfrac{1}{z} - z, \sqrt{2}\right)$

Ta có $\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \dfrac{1}{z^2}} \geq \sqrt{\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - (x + y + z)\right]^2 + 18}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - x + y + z = \left(\dfrac{1}{x} + 9x\right) + \left(\dfrac{1}{y} + 9y\right) + \left(\dfrac{1}{z} + 9z\right) - 10(x + y + z)$

$\geq 18 - 10 = 8$ (do BĐT Cauchy và $x + y + z \leq 1$)

Do đó: Vế trái $\geq \sqrt{8^2 + 18} = \sqrt{82}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ (đpcm).

***Cách 2:*** Áp dụng BĐT Bunhia... ta có: $1 \cdot x + 9 \cdot \dfrac{1}{x} \leq \sqrt{1^2 + 9^2} \cdot \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}$ (1)

Bất đẳng thức Cauchy $x + \dfrac{9}{x} = 9\left(\dfrac{1}{x} + 9x\right) - 80x \geq 9.6 - 80x$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{82}}(54 - 80x)$

Tương tự $\quad \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{y^2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{82}}(54 - 80y)$ và $\sqrt{z^2 + \dfrac{1}{z^2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{82}}(54 - 80z)$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{1}{\sqrt{82}}\left(162 - 80(x + y + z)\right) \geq \sqrt{82}$$

Xảy ra dấu "=" khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$. (đpcm).

**Bài 16:**

Cho x, y, z là ba số dương và xyz = 1.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{1+y}+\dfrac{y^2}{1+z}+\dfrac{z^2}{1+x}\geq\dfrac{3}{2}$

***Giải***

Ta có: $\dfrac{x^2}{1+y}+\dfrac{1+y}{4}\geq 2\sqrt{\dfrac{x^2}{1+y}.\dfrac{1+y}{4}}=x$

$\dfrac{y^2}{1+z}+\dfrac{1+z}{4}\geq 2\sqrt{\dfrac{y^2}{1+z}.\dfrac{1+z}{4}}=y$ ; $\dfrac{z^2}{1+x}+\dfrac{1+x}{4}\geq 2\sqrt{\dfrac{z^2}{1+x}.\dfrac{1+x}{4}}=z$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}+\frac{1+y}{4}+\frac{1+z}{4}++\frac{1+x}{4}\geq x+y+z$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\geq\frac{3}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}\ \geq\frac{3}{4}.3\sqrt[3]{xyz}-\frac{3}{4}\ \geq\frac{3}{2}\text{ (đpcm)}$$