PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Thầy Lâm Phong

DẠNG 1: CHUYỂN PHƯƠNG TRÌNH VỀ CÙNG MỘT CƠ SỐ.

→ ***PP: sử dụng các công thức biến đổi PT để đưa về dạng*** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ***hoặc*** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

a. $4^{2x+1}.\,5^{4x+3} = 5.\,10^{2x^2+3x-78}$

→ **HD giải:** Để ý vế phải có cơ số 10 = 2.5 nên ta biến đổi về trái:

Ta xét Vế trái = $4^{2x+1}.\,5^{4x+3} = 2^{4x+2}.\,5^{4x+3} = 2^{4x+2}.\,5.5^{4x+2} = 5.10^{4x+2}$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 5.10^{4x+2} = 5.\,10^{2x^2+3x-78}$

$\Leftrightarrow 10^{4x+2} = 10^{2x^2+3x-78}$

$\Leftrightarrow 4x + 2 = 2x^2 + 3x - 78 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{1 \pm \sqrt{641}}{4}}$

b. $\sqrt[4]{3}.\,243^{\frac{2x+3}{x+8}} = 3^{-2}.\,9^{\frac{x+8}{x+2}}$

→ **HD giải:** Điều kiện là $\begin{cases} x + 8 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -8 \end{cases}$

Nhận xét cả 2 vế phương trình đều có thể đưa về cơ số 3, nên ta biến đổi:

$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$; $9 = 3^2$; $243 = 3^5$; nên phương trình đã cho có dạng: $3^{\frac{1}{4}}.\,3^{5^{\frac{2x+3}{x+8}}} = 3^{-2}.\,3^{2^{\frac{x+8}{x+2}}}$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{4}+5\left(\frac{2x+3}{x+8}\right)} = 3^{-2+2\left(\frac{x+8}{x+2}\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + 5\left(\frac{2x+3}{x+8}\right) = -2 + 2\left(\frac{x+8}{x+2}\right)$ (1)

Quy đồng và rút gọn có PT (1) trở thành $41x^2 + 102x - 248 = 0 \Leftrightarrow$ **x = - 4 v x =** $\boldsymbol{\frac{62}{41}}$

c. $(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^{11x-20}$

→ **HD giải:** PT $\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x - 2 > 0} \\ \boldsymbol{x^2 + 2x = 11x - 20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 9x + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 4 \text{ v } x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$ **x = 4 v x = 5**

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a. $\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_{(x+3)} 2} = 2 + \log_2(x+1)$

→ **HD giải:** Điều kiện $\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 0 < x + 3 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$

Vì $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ nên phương trình đã cho có dạng:

$\log_2(3x-1) + \log_2(x+3) = \log_2 2^2 + \log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2[(3x-1)(x+3)] = \log_2 4(x+1)$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x+3) = 4(x+1)$ (*)

Rút gọn và giải (*) ta được $\mathbf{x = \frac{-7}{3}}$ **(loại), x = 1** (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm **x = 1**

b. $\mathbf{2\log_9(x^2 - 5x + 6)^2 = \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x - 1}{2}\right) + \log_3 (x - 3)^2}$

→ **HD giải:** Điều kiện $\begin{cases}(x^2 - 5x + 6)^2 > 0\\ x - 1 > 0\\ (x - 3)^2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 5x + 6 \neq 0\\ x > 1\\ x - 3 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 1\\ x \neq 2\\ x \neq 3\end{cases}$ (*)

PT $\Leftrightarrow 2\log_{3^2}(x^2 - 5x + 6)^2 = \log_{3^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x - 1}{2}\right) + \log_3 (x - 3)^2$

$\Leftrightarrow \log_3 [(x -2)^2(x - 3)^2] = \log_3\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 + \log_3(x - 3)^2$

$\Leftrightarrow (x -2)^2(x - 3)^2 = \left(\frac{x - 1}{2}\right)^2.(x - 3)^2$ (do $x \neq 3$ nên $x - 3 \neq 0$)

$\Leftrightarrow (x -2)^2 = \left(\frac{x - 1}{2}\right)^2$ (2)

Giải phương trình (2) ta được **x = 3 (loại) và** $\mathbf{x = \frac{5}{3}}$ **(thỏa mãn).**

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\mathbf{x = \frac{5}{3}}$.

Chú ý: + Khi giải các bài toán về LOG, ta cần chú ý đến điều kiện tồn tại của $\log_a b$ đó là $0 < a \neq 1$ và $b > 0$. Đặc biệt nếu $A^2 > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$.

c. $\mathbf{\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}} (x + 2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4 - x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x + 6)^3}$

→ **HD giải:** Điều kiện $\begin{cases}(x + 2)^2 > 0\\ x + 6 > 0\\ 4 - x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6 < x < 4\\ x \neq -2\end{cases}$

PT $\Leftrightarrow 3\log_{\frac{1}{4}} |x + 2| - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}} (4 - x) + 3\log_{\frac{1}{4}} (x + 6)$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} |x + 2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}} (4 - x) + \log_{\frac{1}{4}} (x + 6)$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} |x + 2| - \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{4}} [(4 - x)(x + 6)]$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} [4|x + 2|] = \log_{\frac{1}{4}} [(4 - x)(x + 6)]$

$\Leftrightarrow 4|x + 2| = - x^2 - 2x + 24$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4(x + 2) = x^2 + 2x - 24\\ 4(x + 2) = - x^2 - 2x + 24\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 + \sqrt{33}\\ x = 1 - \sqrt{33}\\ x = 2\\ x = -8\end{array}\right.$. So điều kiện ta nhận **x = 2 ,** $\mathbf{x = 1 - \sqrt{33}}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN: **Giải các phương trình sau:**

1) $2^{x^2 - 3}.5^{x^2 - 3} = 0,01.(10^{x - 1})^3$ **2)** $(0,6)^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2 - 12} = (0,216)^3$ **3)** $2^x.3^{x - 1}.5^{x - 2} = 12$

4) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2}$ **5)** $2^{x^2+3x-4} = 4^{x-1}$ **6)**

7) $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}$ **8)** $32^{\frac{x+5}{x-7}} = \frac{1}{4}.128^{\frac{x+17}{x-3}}$ **9)** $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$

10) $5^{x+1} + 6.5^x - 3.5^{x+1} = 52$ **11)** $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}$ **12)** $(x^2 - 2x + 2)^{\sqrt{4-x^2}} = 1$

13) $2^{x+1}.3^{x-2}.5^x = 200$ **14)** $4.9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$ **15)** $3^{x^2+3x+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

16) $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$ **17)** $\log_2\left(\dfrac{x^2+3}{5}\right) = 2\log_{\frac{1}{4}}(x-1) - \log_2(x+1)$

18) $\log_2(x-2) - 2 = 6\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$ **19)** $\log_{\frac{1}{3}}\left[\sqrt{2}(x^3+x^2) - 2\right] + \log_3(2x+2) = 0$

20) $\log_x(x^2 + 4x - 4) = 3$ **21)** $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2(x^3 + x + 1)$

22) $\log_2(x^2+3x+2) + \log_2(x^2+7x+12) = 3 + \log_2 3$ **23)** $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$

24) $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$ **25)** $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) - \log_8(x-1)^3 = 0$

26) $\log_2(x^2+3x+2) - \log_{\frac{1}{4}}(x^2+7x+12)^2 = 2 + \log_4\sqrt{3}$ **27)** $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$

DẠNG 2: CHUYỂN VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH (Đặt thừa số chung)

→ ***PP: thường sử dụng đối với các bài toán có nhiều cơ số hoặc có x ở ngoài số mũ.***

Ví dụ 1: Giải phương trình:

a. $\mathbf{25^x = 9^x + 2.5^x + 2.3^x}$

→ **HD giải:** PT $\Leftrightarrow \mathbf{5^{2x} = 3^{2x}} + 2.5^x + 2.3^x$

$\Leftrightarrow (5^{2x} - 3^{2x}) - 2(5^x + 3^x) = 0$

$\Leftrightarrow (5^x - 3^x)\mathbf{(5^x + 3^x)} - 2\mathbf{(5^x + 3^x)} = 0$

$\Leftrightarrow (5^x + 3^x)(5^x - 3^x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x + 3^x = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 5^x = 3^x + 2 \text{ (Giải bằng dạng 5)} \end{array}\right.$

b. $\mathbf{4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1}$

→ **HD giải:** Nhận xét $2x^2 + 3x + 7 = (x^2 - 3x + 2) + (x^2 + 6x + 5)$

Do đó phương trình $\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$

$\Leftrightarrow (4^{x^2-3x+2} - 1) + 4^{x^2+6x+5} - 4^{(x^2-3x+2)+(x^2+6x+5)} = 0$

$\Leftrightarrow (4^{x^2-3x+2} - 1) + 4^{x^2+6x+5} - 4^{x^2+6x+5}.4^{x^2-3x+2} = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{(4^{x^2-3x+2} - 1)} + 4^{x^2+6x+5}\mathbf{.(1 - 4^{x^2-3x+2})} = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{(4^{x^2-3x+2} - 1)}.(1 - 4^{x^2+6x+5}) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x^2-3x+2} = 1 \\ 4^{x^2+6x+5} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ v } x = 1 \\ x = -5 \text{ v } x = -1 \end{array}\right.$

c. $\mathbf{12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20}$

→ **HD giải:** PT $\Leftrightarrow (12.3^x + 3.15^x) - 5.5^x - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 3.3^x\mathbf{(4 + 5^x)} - 5\mathbf{(5^x + 4)} = 0$

$\Leftrightarrow (4 + 5^x)(3.3^x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = -4 < 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 3^x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{5}{3}$$

d. $\mathbf{9^x + 2(x - 2)3^x + 2x - 5 = 0}$

→ **HD giải:** PT $\Leftrightarrow 3^{2x} + \mathbf{2x}.3^x - 4.3^x + \mathbf{2x} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (3^{2x} - 4.3^x - 5) + 2x(3^x + 1) = 0$ (để tạo ra thừa chung ta sử dụng *công thức Vi-et*)

$\Leftrightarrow \mathbf{(3^x + 1)}(3^x - 5) + 2x\mathbf{(3^x + 1)} = 0$

$\Leftrightarrow (3^x + 1)(3^x - 5 + 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = -1 < 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 3^x = 5 - 2x \text{ (Giải bằng dạng 5)} \end{array}\right.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a. $\mathbf{\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x.\log_3 x}$

→ **HD giải:** Điều kiện $x > 0$

PT $\Leftrightarrow (\log_2 x - 1) + \mathbf{\log_3 x} - \log_2 x.\mathbf{\log_3 x} = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{(\log_2 x - 1)} + \mathbf{(1 - \log_2 x)}.\log_3 x. = 0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(1 - \log_3 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_3 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. \text{(thỏa } x > 0)$$

b. $\mathbf{(x + 1)[\log_2 x]^2 + (2x + 5)\log_2 x + 6 = 0}$

→ **HD giải:** Điều kiện $x > 0$

So với VD1 câu d thì bài toán này cũng tương tự nhưng chúng ta sẽ thử làm theo cách *" xét Δ "*

Nếu xem $\log_2 x$ là biến số và x là tham số, ta có phương trình bậc 2.

Xét $\Delta = (2x + 5)^2 - 24(x + 1) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$ (Δ có dạng số chính phương)

Khi đó $\log_2 x = \dfrac{-(2x + 5) + (2x - 1)}{2(x + 1)} = \mathbf{\dfrac{-3}{2(x + 1)}}$ hay $\log_2 x = \dfrac{-(2x + 5) - (2x - 1)}{2(x + 1)} = \mathbf{-2}$

Vậy ta có $\log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

Và $\log_2 x = \dfrac{-3}{2(x + 1)}$ (Dùng dạng 5 để giải tiếp)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN: Giải các phương trình sau:

1) $2^{x^2 - 5x + 6} + 2^{1 - x^2} = 2.2^{6 - 5x} + 1$

2) $x^2.2^x + 6x + 12 = 6x^2 + x.2^x + 2^{x + 1}$

3) $2^{x + 1} + 3^x = 6^x + 2$

4) $4^{x^2} + x.3^x + 3^{x + 1} = 2x^2.3^x + 2x + 6$

5) $x.2^x = x(3 - x) + 2(2^x - 1)$

6) $2[\log_2 x]^2 + x\log_2 x + 2x - 8 = 0$

7) $3.25^{x - 2} + (3x - 10).5^{x - 2} + 3 - x = 0$

8) $(x + 2)[\log_3 (x + 1)]^2 + 4(x + 1)\log_3 (x + 1) - 16 = 0$

9) $8 - x.2^x + 2^{3 - x} - x = 0$

10) $x^2.3^x + 3^x (12 - 7x) = - x^3 + 8x^2 - 19x + 12$

11) $25^x - 2(3 - x).5^x + 2x - 7 = 0$

12) $\log_2^2 x + (x - 1)\log_2 x = 6 - 2x$

13) $x^2 + (2^x - 3)x + 2(1 - 2^x) = 0$

14) $\lg^2 (x^2 + 1) + (x^2 - 5)\lg(x^2 + 1) - 5x^2 = 0$

15) $\log_4 x. \log_x 5 - 1 = \log_4 x - \log_x 5$

16) $\log_3 x + 5\log_5 x = 5 + \log_3 x.\log_5 x$

DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ - ĐỔI BIẾN

→ ***PP: Phương trình tồn tại a^x , a^{-x} , a^{2x} , a^{3x} , v.v.. ⇒ ta đặt $t = a^x > 0$***

Hoặc PT có a^x và b^x với $a^x.b^x = 1$ ⇒ ta đặt $t = a^x > 0$ và khi đó $b^x = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{t}$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

a. $\mathbf{2^x + 2^{3 - x} = 9}$

→ **HD giải:** PT $\Leftrightarrow 2^x + \frac{2^3}{2^x} = 9 \Leftrightarrow 2^x + \frac{8}{2^x} = 9$. (Đặt $t = 2^x > 0$)

PT thành $t + \frac{8}{t} = 9 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 8 \end{array}\right.$ (Nhận vì thỏa $t > 0$)

Khi đó với $t = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$

Và $t = 8 \Leftrightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $\mathbf{x = 0, x = 3}$

b. $\left(\sqrt{6 - \sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x = 12$

→ **HD giải:** Nhận xét $\left(\sqrt{6 - \sqrt{35}}\right)^x . \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x = \left(\sqrt{36 - 35}\right)^x = 1^x = 1$

Nên ta đặt $t = \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x > 0$ thì $\left(\sqrt{6 - \sqrt{35}}\right)^x = \frac{1}{t}$

Khi đó, PT thành $\frac{1}{t} + t = 12 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 + \sqrt{35} \\ t = 6 - \sqrt{35} \end{array}\right.$ (thỏa mãn vì $t > 0$)

Với $t = 6 + \sqrt{35} \Leftrightarrow \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x = 6 + \sqrt{35} \Leftrightarrow (6 + \sqrt{35})^{\frac{x}{2}} = (6 + \sqrt{35})^1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2}$

Với $t = 6 - \sqrt{35} \Leftrightarrow \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x = 6 - \sqrt{35} \Leftrightarrow (6 + \sqrt{35})^{\frac{x}{2}} = (6 + \sqrt{35})^{-1} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \mathbf{x = -2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $\mathbf{x = 2, x = -2}$.

c. $\mathbf{3^{2x^2 + 2x + 1} - 28.3^{x^2 + x} + 9 = 0}$

→ **HD giải:** PT $\Leftrightarrow 3.3^{2(x^2 + x)} - 28.3^{x^2 + x} + 9 = 0$ (Đặt $t = 3^{x^2 + x} > 0$)

$\Leftrightarrow 3t^2 - 28t + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right.$ (Nhận vì thỏa $t > 0$)

Với $t = 9 \Leftrightarrow 3^{x^2 + x} = 9 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{x^2 + x} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Leftrightarrow x^2 + x = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có 2 nghiệm $\mathbf{x = 1, x = -2}$.

d. $\mathbf{(3 - \sqrt{5})^{2x + 1} + (3 + \sqrt{5})^{2x + 1} = 6.2^{2x}}$

→ **HD giải:** Đối với PT trên, ta thấy rằng không thể xét $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \neq 1$

Trong khi đó PT vừa khác mũ ? vừa khác cơ số ? $\Rightarrow$ ta biến đổi phương trình để đưa về cùng mũ.

PT $\Leftrightarrow (3 - \sqrt{5})^{2x + 1} + (3 + \sqrt{5})^{2x + 1} = \mathbf{3.2}.2^{2x}$

$\Leftrightarrow (3 - \sqrt{5})^{\mathbf{2x + 1}} + (3 + \sqrt{5})^{\mathbf{2x + 1}} = 3.2^{\mathbf{2x + 1}}$ **(*)**

Đến đây PT đã cùng mũ nhưng lại khác cơ số ? Rõ ràng $(3 - \sqrt{5})$ và $(3 + \sqrt{5})$ hoàn toàn có "*bà con*"

Ta chia 2 vế phương trình (*) cho $2^{2x + 1}$ và được:

(*) $\Leftrightarrow \frac{(3 - \sqrt{5})^{\mathbf{2x + 1}}}{2^{\mathbf{2x + 1}}} + \frac{(3 + \sqrt{5})^{\mathbf{2x + 1}}}{2^{\mathbf{2x + 1}}} = 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{2x + 1} + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2x + 1} = 3$

Nhận xét $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x+1}.\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{9-5}{4}\right)^{2x+1} = 1^{2x+1} = 1$. (đến đây ta đã biến đổi thành công !)

Nên ta đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x+1} > 0$ và khi đó $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x+1} = \frac{1}{t}$

PT thành $\frac{1}{t} + t = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ (Nhận vì thỏa $t > 0$)

Với $t = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} \Leftrightarrow 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với $t = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy phương trình có 2 nghiệm **$x = 0, x = -1$**

e. $125^x - 4.50^x + 20^x + 6.8^x = 0$

→ **HD giải:** *Đối với câu e này, ta thấy rằng các PT cùng mũ nhưng cả 4 cơ số đều khác nhau. Nên ta quyết định sẽ chia bớt cho một cơ số để tìm mối quan hệ giữa các cơ số còn lại.* ***Kinh nghiệm là ta sẽ chia cho cơ số lớn nhất hoặc cơ số nhỏ nhất.***

Cách 1: *Chia cho cơ số lớn nhất 125^x*

PT $\Leftrightarrow 1 - 4.\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{25}\right)^x + 6.\left(\frac{8}{125}\right)^x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 4.\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} + 6.\left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = 0$ (Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$)

PT thành $1 - 4t + t^2 + 6t^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{2}$ **(Chú ý: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$)**

Với $t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{3}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Cách 2: *Chia cho cơ số nhỏ nhất 8^x*

PT $\Leftrightarrow \left(\frac{125}{8}\right)^x - 4.\left(\frac{25}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{2}\right)^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} - 4.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^x + 6 = 0$ (**HS tự làm tiếp**)

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a. $\log_2(4^{x+1} + 4).\log_2(4^x + 1) = 3$

→ **HD giải:** Điều kiện: $\begin{cases} 4^{x+1} + 4 > 0 \\ 4^x + 1 > 0 \end{cases}$ (luôn đúng)

PT $\Leftrightarrow \log_2(4.4^x + 4).\log_2(4^x + 1) = 3$

$\Leftrightarrow \log_2[\mathbf{4.(4^x + 1)}].\log_2(4^x + 1) = 3$ (Ta có $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$)

$\Leftrightarrow [\log_2 \mathbf{4} + \log_2\mathbf{(4^x + 1)}].\log_2(4^x + 1) = 3$

$\Leftrightarrow [2 + \mathbf{\log_2(4^x + 1)}].\mathbf{\log_2(4^x + 1)} = 3$ (đặt $t = \log_2(4^x + 1)$)

PT thành $(2 + t).t = 3$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_2(4^x + 1) = 1 \Leftrightarrow 4^x + 1 = 2^1 \Leftrightarrow 4^x = 1 = 4^0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $t = -3 \Leftrightarrow \log_2(4^x + 1) = -3 \Leftrightarrow 4^x + 1 = 2^{-3} \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{8} - 1 = \frac{-7}{8} < 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có 1 nghiệm $\mathbf{x = 0}$

b. $\mathbf{1 + \log_2 (x - 1) = \log_{(x - 1)} 4}$

→ **HD giải:** Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow 1 + \log_2 (x - 1) = \log_{(x - 1)} 2^2$ (ta có $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$)

$\Leftrightarrow 1 + \log_2 (x - 1) = \mathbf{2}\log_{(x - 1)} 2$ (ta có $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$)

$\Leftrightarrow 1 + \mathbf{\log_2 (x - 1)} = 2\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\log_2 (x - 1)}}$ (Đặt $t = \log_2 (x - 1)$ **)**

PT thành $1 + t = \frac{2}{t} \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_2 (x - 1) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận)

Với $t = -2 \Leftrightarrow \log_2 (x - 1) = -2 \Leftrightarrow x - 1 = 2^{-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ (nhận)

Vậy phương trình có 2 nghiệm $\mathbf{x = 3,\ x = \frac{5}{4}}$.

c. $\mathbf{\log_2^2 (x - 1)^4 - 5\log_2 (x - 1)^2 + 1 = 0}$

→ **HD giải:** Điều kiện: $(x - 1)^4 > 0 \Leftrightarrow x - 1 \neq 0$

PT $\Leftrightarrow [\log_2 (x - 1)^4]^2 - 10.\log_2 (x - 1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow [4\log_2 (x - 1)]^2 - 10.\log_2 (x - 1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 16[\mathbf{\log_2 (x - 1)}]^2 - 10.\mathbf{\log_2 (x - 1)} + 1 = 0$ (đặt $t = \log_2 (x - 1)$)

PT thành $16t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{8} \end{array}\right.$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 (x - 1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$

Với $t = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_2 (x - 1) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x - 1 = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[8]{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $\mathbf{x = 1 + \sqrt{2},\ \ x = 1 + \sqrt[8]{2}}$

Chú ý: Cần phân biệt $\boldsymbol{\log_a b^2 \neq \log_a^2 b}$

d. $\mathbf{\log_{2 + \sqrt{3}}\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \log_{2 - \sqrt{3}}\sqrt{x - 1} = \log_{7 - 4\sqrt{3}}(x + 2)}$

→ **HD giải:** Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Ta có $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$ và $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$

Nên ta đặt $t = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{t}$

Ta có PT $\Leftrightarrow -\log_t\sqrt{x^2-3x+2}+\log_t\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}\log_t(x+2)$

$\Leftrightarrow -\log_t\sqrt{(x-1)(x-2)}+\log_t\sqrt{x-1}=\log_t\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow -(\log_t\sqrt{x-1}+\log_t\sqrt{x-2})+\log_t\sqrt{x-1}=\log_t\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \log_t\sqrt{x+2}+\log_t\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow \log_t\sqrt{x^2-4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=t^0=1 \Leftrightarrow x^2-4=1 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

Do $x > 2 \Rightarrow$ nhận $\mathbf{x=\sqrt{5}}$

e. $\mathbf{\log_{3x+7}(4x^2+12x+9)=4-\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)}$

→ **HD giải:** Điều kiện: $\begin{cases}3x+7>0,\ 3x+7\neq 1\\ 2x+3>0,\ 2x+3\neq 1\\ 4x^2+12x+9>0\\ 6x^2+23x+21>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{-3}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$ (*)

PT $\Leftrightarrow \log_{3x+7}(2x+3)^2=4-\log_{2x+3}[\mathbf{(3x+7)(2x+3)}]$

$\Leftrightarrow \mathbf{2}\log_{3x+7}(2x+3)=4-[\log_{2x+3}\mathbf{(3x+7)}+\log_{2x+3}\mathbf{(2x+3)}]$

$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3)=3-\log_{2x+3}(3x+7)$

Đặt $t=\log_{3x+7}(2x+3)\Rightarrow \frac{1}{t}=\log_{2x+3}(3x+7)$

PT $\Leftrightarrow 2t=3-\frac{1}{t}\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow$ $\mathbf{t=1}$ v $\mathbf{t=\frac{1}{2}}$

Với $t=1\Leftrightarrow \log_{3x+7}(2x+3)=1\Leftrightarrow 2x+3=3x+7\Leftrightarrow x=-4$ (loại vì không thỏa (*))

Với $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x+3=(3x+7)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow (2x+3)^2=3x+7$

$\Leftrightarrow 4x^2+9x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{4}\text{ (nhận)}\\ x=-2\text{ (loại)}\end{array}\right.$ .Vậy phương trình có nghiệm $\mathbf{x=\frac{-1}{4}}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN: Giải các phương trình sau:

1) $3^{x+2}+3^{2-x}=30$ **2)** $2^{2x+6}+2^{x+7}-17=0$ **3)** $9^{x^2+x+1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0$

4) $64.9^x-84.12^x+27.16^x=0$ **5)** $4^{1+\sqrt{3x^2-2x}}-9.2^{\sqrt{3x^2-2x}}+2=0$ **6)** $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}-6=0$

7) $3.3^{\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}}-10.3^{\frac{\sqrt{x}-2}{2}}+3=0$ **8)** $3.2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}}-8.2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}+4=0$ **9)** $2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0$

10) $25^x=25^{\sqrt{x}+1}+24.5^{x+\sqrt{x}}$ **11)** $(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=14$ **12)** $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$

13) $8^x-3.4^x-3.2^{x+1}+8=0$ **14)** $2^{3x}-6.2^x-\frac{1}{2^{3(x-1)}}+\frac{12}{2^x}=1$ **15)** $(\sqrt{5}+1)^x+2(\sqrt{5}-1)^x=3.2^x$

16) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(5-2\sqrt{6}\right)^x=10$ **17)** $(5-\sqrt{21})^x+7(5+\sqrt{21})^x=2^{x+3}$ **18)** $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$

19) $3.4^x+2.9^x=5.6^x$ **20)** $(7+5\sqrt{2})^x+(\sqrt{2}-5)(3+2\sqrt{2})^x+3(1+\sqrt{2})^x+1-\sqrt{2}=0$

21) $(2+\sqrt{3})^{(x-1)^2}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$ **22)** $(2+\sqrt{3})^x+(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^x=4(2+\sqrt{3})$

23) $(\sqrt{2}-1)^x+(\sqrt{2}+1)^x-2\sqrt{2}=0$ **24)** $3.8^x+4.12^x-18^x-2.27^x=0$ **25)** $3^{2x^2}-2.3^{x^2+x+6}+3^{2(x+6)}=0$

26) $(7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 = 0$ **27)** $\log_x 2 + \log_8 x = \frac{7}{6}$ **28)** $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1$

29) $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8\sqrt{x^2} = 0$ **30)** $\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) = 3$

31) $1 + \frac{1}{4}\sqrt{-\log_2\left(\frac{1}{x^4}\right)} = \log_2\sqrt{x}$ **32)** $\left(\log_3\frac{3}{x}\right).\log_2 x - \log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2\sqrt{x}$

33) $\log^2(-x) - 2\log x^2 + 4 = 0$ **34)** $\log^2 x - \log x^2 = \log^2 3 - 1$ **35)** $\log_2(5^x - 1).\log(2.5^x - 2) = 2$

36) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$ **37)** $\log_2(4^x + 15.2^x + 27) + 2\log\frac{1}{4.2^x - 3} = 0$

38) $\log_x\sqrt{5} + \log_x 5x - 2{,}25 = \log_x^2\sqrt{5}$ **39)** $3\log_x 6 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$

40) $\log_x 2.\log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$ **41)** $\log_2(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1) - 2\log_4(\sqrt{\lg x} + 1) = 1$

42) $\sqrt{\log_{0,04} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 1} = 1$ **43)** $\lg^2 x - \lg x^3 + 2 = 0$

44) $\log_{\frac{x}{2}} x^2 + 40\log_{4x} x = 14.\log_{16x} x^3$ **45)** $\log^4(x-1)^2 - 5\log^2(x-1)^3 - 3376 = 0$

46) $\log_{x^2}(2+x) + \log_{\sqrt{x+2}} x = 2$ **47)** $\log_{3-2x}(2x^2 - 9x + 9) + \log_{3-x}(4x^2 - 12x + 9) = 4$

48) $\log(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ **49)** $\lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25$

50) $3 + \frac{1}{\log_3 x} = \log_x\left(9x - \frac{6}{x}\right)$ **51)** $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$

52) $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$ **53)** $4^x - 3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} = 0$

54) $\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0$ **55)** $(3+2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2}-1)^x + 3$

56) $\frac{3^{2x}}{100^x} = 2(0{,}3)^x + 3$ **57)** $\frac{7^{2x}}{100^x} = 6.(0{,}7)^x + 7$ **58)** $3.16^{\sqrt{x-1}} + 2.81^{\sqrt{x-1}} = 5.36^{\sqrt{x-1}}$

59) $3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.9^{\sqrt{x+4}} = 0$ 60) $5.3^{2x-1} - 7.3^{x-1} + \sqrt{1 - 6.3^x + 9^{x+1}} = 0$

61) $8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{1+\sqrt[4]{x}} = 9^{\sqrt{x}}$ **62)** $(26+15\sqrt{3})^x + 2(7+4\sqrt{3})^x - 2(2-\sqrt{3})^x = 1$

63) $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$ **64)** $\lg^2 x^9 - 20\lg\sqrt{x} + \frac{1}{9} = 0$ **65)** $3^{2x} + \sqrt{3^x + 5} = 5$

66) $9^{x^2-2x+\frac{3}{2}} - 3^{x^2} = 3^{(x-2)^2} - 1$ **67)** $2^{2x} - \sqrt{2^x + 6} = 6$ **68)** $2^{2x^2-5x+2} + 2^{4x^2-8x+3} = 1 + 2^{6x^2-13x+5}$

68) $\log_{9x} 27 - \log_{3x} 3 + \log_9 243 = 0$ **69)** $8^x + 1 = 2.\sqrt[3]{2^{x-1} - 1}$ **70)** $2^{3x} - 2^{3-3x} - 6(2^x - 2.2^{-x}) = 1$

DẠNG 4: MŨ HÓA - LOGARIT HÓA

→ ***PP: giúp ta chuyển một PT mũ - log về một PT log - mũ mà ta đã biết cách giải. Cần chú ý:***

♂. $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)}$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$ (*hoặc* $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$)

♀. $\log_a f(x) = \log_b g(x)$. ***Đặt*** $t = \log_a f(x) = \log_b g(x)$

Khi đó: $a^t = f(x)$ **và** $b^t = g(x) \Rightarrow$ **chuyển về phương trình mũ**

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau**:**

a. $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

→ **HD giải:** Điều kiện $x \neq 0$

Nhận xét ta không để đưa PT trên về cùng một cơ số và đồng thời số mũ của chúng cũng khác nhau hoàn toàn. Do vậy ta thử LOG HÓA PT mũ trên. Để thực hiện ta cần chọn cơ số cho Logarit. Việc chọn " cơ số " sẽ giúp bạn giải hoặc nhanh hoặc chậm bài toán đi nhưng cuối cùng đích đến vẫn là tìm được đáp số.

Cách 1: Lấy log 2 vế với cơ số 5.

PT $\Leftrightarrow \log_5 (5^x.8^{\frac{x-1}{x}}) = \log_5 500$

$\Leftrightarrow \log_5 5^x + \log_5 8^{\frac{x-1}{x}} = \log_5 (5^3.2^2)$ (Để phân tích $500 = 5^3.2^2$ ta chia nó cho các số nguyên tố)

$\Leftrightarrow x + 3\frac{x-1}{x}.\mathbf{\log_5 2} = 3 + 2\mathbf{\log_5 2}$

$\Leftrightarrow (x-3) + \log_5 2\left(3\frac{x-1}{x} - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3) + \log_5 2\left(\frac{x-3}{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(1 + \frac{\log_5 2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \ \text{v}\ \mathbf{1 + \frac{\log_5 2}{x} = 0}$

Với $1 + \frac{\log_5 2}{x} = 0 \Leftrightarrow x + \log_5 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_5 2$

Vậy PT có 2 nghiệm **$x = 3$ v $x = -\log_5 2$**

Cách 2: Lấy log 2 vế với cơ số 2. (vì $8 = 2^3$)

PT $\Leftrightarrow \log_2 (5^x.8^{\frac{x-1}{x}}) = \log_2 (5^3.2^2)$

$\Leftrightarrow \log_2 5^x + \log_2 2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 3\log_2 5 + 2$

$\Leftrightarrow x.\mathbf{\log_2 5} + \frac{3(x-1)}{x} = 3\mathbf{\log_2 5} + 2$

$\Leftrightarrow (x-3).\log_2 5 + \frac{3(x-1)}{x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3).\log_2 5 + \frac{x-3}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\log_2 5 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x = 3 \text{ v } x = \frac{-1}{\log_2 5} = -\log_5 2$

b. $x^{\lg x} = 1000x^2$

$\rightarrow$ **HD giải:** Điều kiện $x > 0$

PT $\Leftrightarrow \mathbf{lg}x^{\lg x} = \mathbf{lg}1000x^2$

$\Leftrightarrow \lg x.\lg x = \lg 1000 + \lg x^2$

$\Leftrightarrow \lg^2 x = 3 + 2\lg x$ (Đặt $t = \lg x$)

PT thành $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = -1 \\ \lg x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^{-1} \\ x = 10^3 \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a. $\log_3 (\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x) = 2x$

$\rightarrow$ **HD giải:** Điều kiện $x > 0$

PT $\Leftrightarrow \log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x = 3^{2x}$

$\Leftrightarrow \log_9 x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{3}$ (nhận)

b. $\log_5 \log_2 x = \log_2 \log_5 x$

$\rightarrow$ **HD giải:** Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Đặt $t = \log_5 \log_2 x \Leftrightarrow \mathbf{\log_2 x = 5^t}$ (1)

Mặt khác $t = \log_2 \log_5 x \Leftrightarrow \mathbf{\log_5 x = 2^t}$ (2)

Lại có $\log_2 x = \log_2 \mathbf{5}.\log_5 x$ nên từ (1) và (2) ta có $5^t = 2^t.\log_2 5$

Hay $\left(\frac{5}{2}\right)^t = \log_2 5 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{5}{2}} (\log_2 5)$. Thay vào (2) ta được: $\log_5 x = 2^{\log_{\frac{5}{2}} (\log_2 5)} \Leftrightarrow \mathbf{x = 5^{2^{\log_{\frac{5}{2}} (\log_2 5)}}}$

c. $\mathbf{3\log_3 (1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2 \sqrt{x}}$

→ **HD giải:** Điều kiện: $x > 0$

*Khác biệt giữa câu c này và câu b nằm ở chỗ dạng PT ở câu b là log = log. còn với bài toán ta đang gặp phải là **m**.log = **n**.log. Kinh nghiệm là ta sẽ chọn **k** là bội số chung nhỏ nhất của cả 2 số m và n đó.*

Đặt $6t = 3\log_3 (1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2 \sqrt{x}$

Ta có: $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x} = 3t \\ \log_3 (1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{6t} \\ 1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 3^{2t} \end{cases}$

Do đó $1 + 2^{3t} + 2^{2t} = 3^{2t} \Leftrightarrow 1 + 8^t + 4^t = 9^t$ (*Giải tiếp bằng cách chia bớt cơ số và dùng dạng 5*)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN: **Giải các phương trình sau:**

1) $3^x.\,2^{\frac{3(2x-1)}{x+1}} = 72$ **2)** $2^{x^2} = 3^{x-1}$ **3)** $2^{\log_2 (x+1)} = x$ **4)** $8^{\frac{x}{x+2}} = 36.3^{2-x}$

5) $5^{x^2 - 5x + 6} = 2^{x-3}$ **6)** $3^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 36$ **7)** $5^x.2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$ **8)** $3^{x^2 - 4x} = 2^{x-4}$

9) $x^{2 + \log_2^2 x} = 8$ **10)** $5^{2-x}.3^{\frac{3x}{x+1}} = 4$ **11)** $2^{x^2 - 2x}.3^x = \frac{1}{2}$ **12)** $x^{\frac{\log x + 7}{7}} = 10^{\log x + 1}$

13) $2^{\log_5 (x+3)} = x$ **14)** $\log_3 (x^2 - 3x - 13) = \log_2 x$ **15)** $\log_2 (1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$

16) $2\log_6 (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x$ **17)** $\log_7 (x + 2) = \log_5 x$ **18)** $\log_3 (x^2 + 2x + 1) = \log_2 (x^2 + 2x)$

19) $\log_2 (\log_3 x) = \log_3 (\log_2 x)$ **20)** $3\log_3 (x + 2) = 2\log_2 (x + 1)$ **21)** $\log_3 (76 + \sqrt[4]{x}) = \log_5 x$

22) $\log_2 (1 + \sqrt[3]{x}) = \log_7 x$ **23)** $\log_3 (x + 1) + \log_5 (2x + 1) = 2$ **24)** $2^{x^2 - 2x}.\,3^x = 1{,}5$

25) $\log_4 [2\log_3 (1 + 3\log_2 x)] = \frac{1}{2}$ **26)** $\log_x (x + 2) = \log_3 5$ **27)** $3^{x+1}.2^{x^2} = 8.4^x$

DẠNG 5: SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

→ ***PP: xét PT mũ - logarit f(x) = 0 (*) với x∈ D***

☺**Nếu *f*(x) đơn điệu trên D (*đồng biến hoặc nghịch biến trên D*) thì PT (*) có không quá một nghiệm. Nghĩa là nếu có nghiệm sẽ có nghiệm duy nhất.**

☻ **Nếu y = *f*(x) đơn điệu trên D (*đồng biến hoặc nghịch biến trên D*) thì f(u) = f(v) ⇔ u = v với mọi u, v ∈ D.**

☼ **Nếu y = *f*(x) có đạo hàm đến cấp *k* và liên tục trên *D*, đồng thời $f^{(k)}(x)$ có đúng m nghiệm phân biệt thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ sẽ có không quá m + 1 nghiệm.**

Chú ý: đạo hàm của $(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a$ và đạm hàm của $(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$

Hầu hết các phương pháp ở các dạng trên sau nhiều phép tính toán, biến đổi rất dễ đưa về dạng toán này. Cho nên các bạn cần chú ý học và tìm hiểu kỹ dạng này. Đó cũng là tiền đề để bạn sử dụng phương pháp này để giải các dạng toán khác.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $\mathbf{2^x = 3 - x}$

→ **HD giải:** PT $\Leftrightarrow 2^x - 3 + x = 0$

Xét $f(x) = 2^x - 3 + x$ với mọi $x \in R$

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0\ \forall x \in R$ (do $2^x > 0$ và $\ln 2 > 0$)

$\Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên R, mà $f(1) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $\mathbf{x = 1}$.

b. $\mathbf{9^x = 5^x + 4^x + 2.\sqrt{20^x}}$

→ **HD giải:** *Bài toán trên có đến 4 cơ số khác nhau, ta quyết định chia cho cơ số lớn nhất 9^x.*

PT $\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{5}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2.\left(\frac{\sqrt{20}}{9}\right)^x$ (Nhậm nghiệm thử ta thấy x = 2 thỏa mãn)

Do $0 < \frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{\sqrt{20}}{9} < 1$ nên $\ln\frac{5}{9} < 0$, $\ln\frac{4}{9} < 0$, $\ln\frac{\sqrt{20}}{9} < 0$.

Do đó $f'(x) = \left(\frac{5}{9}\right)^x \ln\frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^x \ln\frac{4}{9} + 2.\left(\frac{\sqrt{20}}{9}\right)^x \ln\frac{\sqrt{20}}{9} < 0\quad \forall x \in R$

Nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên R, mà $f(2) = 1$ nên phương trình $f(x) = 1$ có nghiệm duy nhất $\mathbf{x = 2.}$

C. $\mathbf{3^x + 5^x = 6x + 2}$

→ **HD giải:** *nhận xét 1 vế của phương trình là " hàm mũ ", còn vế còn lại là " hàm đa thức ". Không thể biến đổi như các dạng đã đề cập ở trên của chuyên đề nên ta quyết định sử PP hàm số.*

Xét $f(x) = 3^x + 5^x = 6x + 2$ với $x \in R$

Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 - 6$ là hàm số liên tục

Và $f'(0) = \ln 3 + \ln 5 - 6 < 0$, $f'(1) = 3\ln 3 + 5\ln 5 - 6 > 0$

Nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = x_o$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm phân biệt.

Mà $f(0) = f(1) = 0$ nên mọi nghiệm của phương trình đã cho là **x = 0 hoặc x = 1**

Để có thể ứng dụng PP hàm số này một cách hiệu quả trước tiên bạn nên " nhẩm nghiệm " PT đã cho trước. Ứng với số nghiệm tìm được ta sẽ đề xuất cách giải.

d. $\mathbf{(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 4^x}$

→ **HD giải:** PT $\Leftrightarrow \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right)^x + \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right)^x = 1$

Xér $f(x) = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right)^x + \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right)^x$ với $x \in R$

Vì $0 < \frac{2 - \sqrt{3}}{4}; \frac{2 + \sqrt{3}}{4} < 1$ nên $\ln\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right) < 0$ và $\ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) < 0$

Do đó, $f'(x) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^x.\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^x \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) < 0 \ \forall x \in R$

Nên hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên R, mà $f(1) = 1$ nên phương trình $f(x) = 1$ có nghiệm duy nhất **$x = 1$**

e. $7^{x-1} = 1 + 2\log_7 (6x - 5)^3$

→ **HD giải:** Điều kiện $6x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$

Đặt **$y - 1 = \log_7 (6x - 5)$** thì **$7^{y-1} = 6x - 5$ (1)**

PT đã cho trở thành $7^{x-1} = 1 + 2\log_7 (6x - 5)^3$

$\Leftrightarrow 7^{x-1} = 1 + 6\log_7 (6x - 5)$

$\Leftrightarrow 7^{x-1} = 1 + 6\log_7 7^{y-1}$

$\Leftrightarrow 7^{x-1} = 1 + 6(y - 1)$

$\Leftrightarrow$ **$7^{x-1} = 6y - 5$ (2)**

Lấy (1) trừ (2) ta được: $7^{y-1} - 7^{x-1} = 6x - 6y$

$\Leftrightarrow 7^{x-1} + 6(x - 1) = 7^{y-1} + 6(y - 1) \Leftrightarrow f(x - 1) = f(y - 1)$

Dễ thấy $f(t) = 7^t + 6t$ là hàm số đồng biến trên R, mà $f(x - 1) = f(y - 1) \Leftrightarrow x - 1 = y - 1 \Leftrightarrow$ **$x = y$**

Khi đó phương trình đã cho có dạng (1) $\Leftrightarrow$ **$7^{x-1} - 6x + 5 = 0$ (3) (nhẩm nghiệm $x = 1, x = 2$)**

Xét hàm số $g(x) =$ **$7^{x-1} - 6x + 5$** $\forall x \in R$

Ta có $g'(x) = 7^{x-1}.\ln 7 - 6$ nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_o = 1 + \log_7 \frac{6}{\ln 7}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 0$ chỉ có không quá hai nghiệm phân biệt

Mà $f(1) = f(2) = 0$ nên **$x = 1, x = 2$** là các nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a. $\log_2 x + \log_3 (2x - 1) + \log_5 (7x - 9) = 3$

→ **HD giải:** Điều kiện $x > \frac{9}{7}$

Xét hàm số $f(x) = \log_2 x + \log_3 (2x - 1) + \log_5 (7x - 9)$ với $x > \frac{9}{7}$

Ta có $f'(x) == \frac{1}{x.\ln 2} + \frac{2}{(2x-1)\ln 3} + \frac{7}{(7x-9).\ln 5} > 0 \ \forall x > \frac{9}{7}$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên ($\frac{9}{7}$; $+\infty$) nên phương trình $f(x) = 3$ nếu có nghiệm sẽ có nghiệm duy nhất.

Mà $f(2) = 3$ nên phương trình đã cho có nghiệm ***$x = 2$***

b. $x^3.\log_3 x = 27$

→ **HD giải:** $x > 0$

Viết phương trình đã cho dưới dạng $\log_3 x - \frac{27}{x^3} = 0$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 x - \frac{27}{x^3}$ với $x > 0$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 3} + \dfrac{81}{x^4} > 0\ \forall x > 0$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình $f(x) = 0$ nếu có nghiệm sẽ có nghiệm duy nhất. Mà $f(3) = 0$ nên phương trình có nghiệm $\boldsymbol{x = 3}$

c. $\mathbf{2^{x^2 + x} + \log_2 x = 2^{x + 1}}$

→ **HD giải:** $x > 0$

PT $\Leftrightarrow 2^{x^2 + x} + \log_2 \dfrac{x(x+1)}{x+1} = 2^{x+1}$

$\Leftrightarrow 2^{x^2 + x} + \log_2 (x^2 + x) - \log_2 (x + 1) = 2^{x+1}$

$\Leftrightarrow 2^{x^2 + x} + \log_2 (x^2 + x) = 2^{x+1} + \log_2 (x + 1)$

Đặt $f(t) = 2^t + \log_2 t$ ($t > 0$)

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + \dfrac{1}{t.\ln 2} > 0\ \forall t > 0$

Nên hàm số $y = f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$ Lại có $\boldsymbol{f(x^2 + x) = f(x + 1)}$

$\Leftrightarrow x^2 + x = x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$. Vậy $\boldsymbol{x = 1}$ là nghiệm phương trình.