PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Nguyễn Văn Quốc Tuấn K112 Đại học Y Hà Nội

Sử dụng phương pháp đánh giá để giải hệ phương trình.

Lưu ý: khi giải các bài toán hệ phương trình dùng phương pháp đánh giá là chúng ta cần nắm vững các bất đẳng thức cơ bản, vận dụng linh hoạt các điều kiện đề bài cho, dự đoán dấu bằng và tách ghép để làm sao cho thỏa mãn. Phương pháp này không thể áp dụng cho mọi bài toán hệ phương trình nhưng nó là một phương pháp khá hay và ngắn gọn đòi hỏi người áp dụng phải có một mối am hiểu sâu về giải hệ phương trình. Qua tài liệu này mình mong có thể giúp thêm được nhiều điều cho các bạn. Nếu có sai sót gì mong các bạn cho ý kiến để mình hoàn thiện tốt hơn. Chúc các bạn học tốt. Thân!

I. Lý thuyết

Các bất đẳng thức quan trọng

- Bất đẳng thức Cosi.

Với n số thực không âm $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ta có

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.........a_n}$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

- Bất đẳng thức Bunhiacoxky

Với 2 bộ sô $(a_1;\ a_2;...;a_n)$ và $(b_1;\ b_2;...;b_n)$ ta có:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

- Bất đẳng thức Svacxo.

Với $b_1, b_2...b_n > 0$ ta có: $\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \frac{{a_3}^2}{b_3} ...... + \frac{{a_n}^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Các bất đẳng thức phụ cần ghi nhớ.

- Với $a, b > 0$ ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.
- Với $ab \geq 1$ thì $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$. Với $ab \leq 1$ thì bất đẳng thức đổi chiều.

  Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

II. Các thí dụ và bài tập tự luyện.

Thí dụ 1: (Đề tuyển sinh đại học khối A- 2014)

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3};\quad 2\le y\le 12$

Với 2 số thực a,b bất kỳ ta có: $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2}\ge ab$

Áp dụng ta được: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}\le \dfrac{x^2-y+12}{2} \\ \sqrt{y\left(12-x^2\right)}=\sqrt{y}.\sqrt{12-x^2}\le \dfrac{12-x^2+y}{2} \end{cases}$

Nên $x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\le 12$ do đó: $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y=12-x^2 \end{cases}$

Thay vào (2) ta được: $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}\Leftrightarrow x^3-8x-3+2\left(1-\sqrt{10-x^2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0\quad (3)$$

Do $x\ge 0\Rightarrow x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}>0$ khi đó $(3)\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=3$ (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(3;3)$

Thí dụ 2: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1) \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} & (2) \end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 0\le y\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxky ta có:

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right) \quad (*)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{1+2x^2}=\sqrt{1+2y^2} \Leftrightarrow x=y$

Ta lại có:

$$\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}-\frac{2}{1+2xy}=\frac{2(x-y)^2(2xy-1)}{(1+2x^2)(1+2y^2)(1+2xy)}\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\le\frac{2}{1+2xy} \quad (**)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta suy ra

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2 \le \frac{4}{1+2xy} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow x=y$ thế xuống phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{x(1-2x)}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}\Rightarrow y=\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=\left(\frac{9\pm\sqrt{73}}{36};\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}\right)$

Thí dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x+2=y^3+3y^2 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x^3-3x^2+y+2}=x^2-3y \end{cases}$

Lời giải

Nhận xét: Nhìn vào phương trình đầu của hệ ta có cảm giác ngay là sử dụng hàm số đại diện t^3-3t nhưng cần có điều kiện của biến. Ở đây biến muốn tìm điều kiện của biến y thì chúng ta cần suy ra từ phương trình 2 nhưng khó khan nên chúng ta phải nghĩ hướng khác. Ở đây chúng ta có thể phân tích thành nhân tử nên thử đi theo hướng đó xem sao.

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 2 \\ x^3-3x^2+y+2\ge 0 \end{cases}$

Ta có:

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

$$\begin{aligned}
&PT(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = (y+1)^3 - 3(y+1) \\
&\Leftrightarrow x^3 - (y+1)^3 = 3(x-y-1) \\
&\Leftrightarrow (x-y-1)\left[x^2 + x(y+1) + (y+1)^2\right] = 3(x-y-1) \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ x^2 + x(y+1) + (y+1)^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{x^2}{4} + x(y+1) + (y+1)^2 = 3 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ \dfrac{3}{4}x^2 + \left(\dfrac{x}{2} + y + 1\right)^2 = 3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $x \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 \geq 3$ mà $\left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 \geq 0$ nên $\frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 \geq 3$

Do đó $\frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \dfrac{x}{2} + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ không thỏa mãn điều kiện.

Với $y = x - 1$ thế xuống phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-2} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + x + 1} = x^2 - 3x + 3 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x^2 - 2x - 1)} = x^2 - 3x + 3 \quad (*) \end{cases}
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \leq \dfrac{x-1}{2} \\ \sqrt{(x-1)(x^2-2x-1)} \leq \dfrac{x^2 - x - 2}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x^2-2x-1)} \leq \frac{x^2 - 3}{2}$$

Mặt khác: $x^2 - 3x + 3 \geq \frac{x^2 - 3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$

Khi đó $VP(*) \geq VT(*)$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2 \\ x \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = (3; 2)$

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

Thí dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3+y^3}{2}}=2 \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}+xy=4 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Điều kiện: $-1\le x\le 2$

Ta có các bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2\ge \dfrac{3}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0 \\ x^3+y^3\ge \dfrac{1}{4}(x+y)^3 \end{cases}$$

Khi đó ta suy ra:

$$2=\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\ge x+y \Leftrightarrow x+y\le 2$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có: $\begin{cases} 2\sqrt{2-x}\le 3-x \\ 2.2\sqrt{2x+2}\le 2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\le 3$

Và : $xy\le \dfrac{(x+y)^2}{4}\le 1$ khi đó thì: $\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}+xy\le 4$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x=y \\ 2-x=1 \\ 2x+2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

Thử lại vào hệ phương trình thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x=y=1$

Thí dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}+6y^2+8=3x+\dfrac{3}{x}+y^4+8y \quad (1) \\ 2x^3+3y+4=3x^2+6\sqrt{y} \quad (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ y\ge 0 \end{cases}$

Ta có: $(2)\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=-3\left(\sqrt{y}-1\right)^2\le 0$

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

Mà $2x^3-3x^2+1\ge 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x+1)^2\ge 0$ đúng với $x\ge \frac{1}{2}$

Do đó: $2x^3-3x^2+1\ge -3\left(\sqrt{y}-1\right)^2$ dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$

Thay lại vào phương trình (1) thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ là: $x=y=1$

Thí dụ 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x-y+4}} \\ x^3+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{y-2}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} y\ge x \\ x-y+2\ge 0 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \\ y\ge 2\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{y-x}=a \\ a\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -a^2=x-y$

Biến đổi phương trình (1)

$$\sqrt{2-a^2}+2a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4-a^2}} \Leftrightarrow \sqrt{2-a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{4-a^2}=3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2}=9 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2}\le \dfrac{10-4a^2}{2}=5-2a^2 \\ 2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2}\le 2a^2+4\end{cases} \Rightarrow \sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2}\le 9$$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{4-a^2}=\sqrt{6-3a^2} \\ a\sqrt{3}=\sqrt{4-a^2}\end{cases} \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow y-x=1 \Leftrightarrow y=x+1$

Thay xuống phương trình còn lại ta được

$$x^3+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^3+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}-2=0$$

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

Xét hàm số: $f\left(x\right)=x^3+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}-2$

Ta có: $f'\left(x\right)=2x^2+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$ mà $f\left(1\right)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=1, y=2$.

Ở các thí dụ trên chúng ta thấy chỉ sử dụng 1 phương trình của hệ để đánh giá. Chúng ta đi xét thí dụ sau.

Thí dụ 7: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{4y^2+x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}} \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=\dfrac{x^2+4(y-1)}{2} \end{cases}. \quad \text{(mathlinks.vn)}$$

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 1; y\geq 1$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+y}}+\frac{1}{\sqrt{4y^2+x}}\geq\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\left(4x^2+y\right)\left(4y^2+x\right)}}}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}}\geq\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\left(4x^2+y\right)\left(4y^2+x\right)}}} \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(4x^2+y\right)\left(4y^2+x\right)}\geq 2\left(x+y\right)^2+x+y \\
&\Leftrightarrow 4\left(4x^2+y\right)\left(4y^2+x\right)\geq\left[2\left(x+y\right)^2+x+y\right]^2 \\
&\Leftrightarrow 16x^2y^2+4(x^3+y^3)+xy\geq\left(x+y\right)^4+\left(x+y\right)^3+\frac{1}{4}\left(x+y\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\left[\frac{1}{4}+x^2+y^2+6xy-3(x+y)\right]\leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\left[\left(x+y\right)^2-3(x+y)+4xy+\frac{1}{4}\right]\leq 0\Leftrightarrow x=y
\end{aligned}.$$

Bởi vì với $x, y\geq 1$ ta có

$$\left(x+y\right)^2-3(x+y)+4xy+\frac{1}{4}\geq\left(x+y\right)^2-3(x+y)+4+\frac{1}{4}>0.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

$$\begin{aligned}
&2x\sqrt{x-1}=\frac{x^2+4(x-1)}{2}\\
&\Leftrightarrow x^2-4x\sqrt{x-1}+4(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x=2
\end{aligned}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Thí dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y=6(1-\sqrt{xy}) \\ x+\dfrac{6\sqrt{2(x^6+y^6)}}{x^2+xy+y^2}=3+\sqrt{2(x^2+y^2)} \end{cases}$ (mathlinks.vn)

Lời giải

Điều kiện: $xy>0$.

Ta có:

$$\frac{6\sqrt{2(x^6+y^6)}}{x^2+xy+y^2}=\frac{6\sqrt{2(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)}}{x^2+xy+y^2}\ge 2\sqrt{2(x^2+y^2)}.$$

Thật vậy, ta chứng minh

$$\begin{aligned}
&3\sqrt{x^4-x^2y^2+y^4}\ge x^2+xy+y^2\\
&\Leftrightarrow 9x^4-9x^2y^2+9y^4\ge\left(x^2+xy+y^2\right)^2.\\
&\Leftrightarrow (x-y)^2\left(4x^2+7xy+4y^2\right)\ge 0
\end{aligned}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $3-x\ge\sqrt{2(x^2+y^2)}$ (1).

Từ phương trình đầu của hệ sử dụng bất đẳng thức AM –GM ta có

$$x-y=6-6\sqrt{xy}\ge 6-3(x+y)\Rightarrow 2x+y\ge 3\ (2).$$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta được:

$$x+y\ge\sqrt{2(x^2+y^2)}\Leftrightarrow x=y\Rightarrow x=y=1.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x=y=1$.

Thí dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y & (1) \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$

Ý tưởng: Đây là hệ phương trình đối xứng loại 2 nên nghiệm của bài toán sẽ là $x=y$ nhưng nếu làm theo cách thông thường thì sẽ rất khó khăn vì có sự xuất hiện của căn bậc 3. Chúng ta thử kết hợp 2 phương trình lại với nhau xem được như thế nào. Khi cộng 2 vế lại với nhau

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

thì vế trái xuất hiện $2xy$ và vế phải xuất hiện x^2+y^2 đến đây ta nghĩ tới việc đánh giá tiếp phương trình mới được hình thành đó.

Lời giải

Với $x=0 \Rightarrow y=0$ thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x,y \neq 0$. Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được:

$$x+y+2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2+x+y$$

$$\Leftrightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2 \quad (3)$$

Suy ra $xy>0$. Mặt khác ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}\le\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\le\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\le 1$$

$$\Rightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)\le 2xy\le x^2+y^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $x=y=1$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=(0;0),(1;1)$

Thí dụ 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1}=y \\ \dfrac{2y^2}{y^2+1}=z \\ \dfrac{2z^2}{z^2+1}=x \end{cases} \quad (x,y,z\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Ta thấy $x=y=z=0$ là 1 nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x,y,z\neq 0$ thì $x,y,z>0$ khi đó nhân 3 vế của hệ phương trình ta có:

$$\frac{8x^2y^2z^2}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}=xyz \Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=8xyz$$

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\ge 2\sqrt{x^2}.2\sqrt{y^2}.2\sqrt{z^2}=8|xyz|=8xyz \quad (x,y,z>0)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ x^2=y^2=z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y;z)=(0;0;0),(1;1;1)$

Thí dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=\sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 3x^2-x+\dfrac{1}{2}=y\sqrt{x^2+x} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x,y>0$

Ta có: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=\sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 6x^2-2x+1=2y\sqrt{x^2+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=\sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 5x^2+(x-1)^2=2y\sqrt{x^2+x} \end{cases}$

Mặt khác $\sqrt[3]{2.4x.(2x+1)}\le \dfrac{2x+1+4x+2}{3}=2x+1$

$$\Rightarrow (x-1)^2+y^2\le \frac{2x+1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-4x+2+2y^2\le 2x+1 \Leftrightarrow 2x^2-6x+1+2y^2\le 0$$

Lại có theo cosi thì $5x^2+(x-1)^2=2y\sqrt{x^2+x}\le y^2+x^2+x \Leftrightarrow 5x^2-3x+1-y^2\le 0$

Kết hợp lại ta được:

$$2\left(5x^2-3x+1-y^2\right)+2x^2-6x+1+2y^2\le 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Thí dụ 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{x}-8x}+2\sqrt{1-2x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{4xy} \\ 4x=\sqrt{2y+3}-\sqrt{y} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y>0$, từ phương trình đầu $\Rightarrow 0<x\le \dfrac{1}{2}$.

Phương trình đầu tương đương: $\sqrt{2x\left(1-4x^2\right)}+2\sqrt{x^2(1-2x)}=y+\dfrac{1}{4y}$.

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có: $y+\frac{1}{4y}\ge 2\sqrt{y.\frac{1}{4y}}=1$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x\left(1-4x^2\right)}+2\sqrt{x^2\left(1-2x\right)}\ge 1\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2x\left(1-2x\right)}\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{2x}\right)\ge 1\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2x\left(1-2x\right)}\ge \sqrt{1+2x}-\sqrt{2x}\\
&\Leftrightarrow 2x\left(1-2x\right)\ge 1+4x-2\sqrt{2x\left(1+2x\right)}\\
&\Leftrightarrow 4x^2+2x-2\sqrt{2x\left(1+2x\right)}+1\le 0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x\left(1+2x\right)}-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow \sqrt{2x\left(1+2x\right)}=1\\
&\Leftrightarrow 2x\left(1+2x\right)=1\Leftrightarrow 4x^2+2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có: $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Thử lại thỏa mãn. Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Nguyễn Văn Quốc Tuấn

Bài tập bổ sung:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} a+b=\sqrt[3]{24} \\ \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{1}{\sqrt{3a+b}}\right)=2 \end{cases}$ $(x\in\mathbb{Z})$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2=-3 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y=24 \end{cases}$ $(x\in\mathbb{Z})$

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y=-x^3+3x+4 \\ x=2y^3-6y-2 \end{cases}$ $(x\in\mathbb{Z})$

4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{8-xy^2\left(xy^2+2\right)}=x^6+x^3y^3+\dfrac{1}{2} \\ -\sqrt{x^2+y^2+2\left(xy+2\right)}=y^6+x^3y^3+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $(x\in\mathbb{Z})$

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(x-3\right)^3=2+\sqrt{y^3+3y} \\ 3\sqrt{x-3}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$

6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy=3y^2-y\sqrt{xy} \\ \dfrac{y^2}{1+\sqrt{2-x}}+\dfrac{\left(2-x\right)^2}{1+y}=1 \end{cases}$ $(x\in\mathbb{Z})$

7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy}=4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)\left(x+y\right)}-1 \\ \sqrt{\left(x+1\right)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x\left(y+3\right)}}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{Z})$$

8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{8y-5}+y\sqrt{8x-5}=\sqrt[4]{24\left(x^2+y^2+4\right)} \\ 11x^2-6xy+3y^2=12x-4y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$ khó)

Tham khảo thêm tại:

Blog Luyện Thi Đại Học: http://toanlihoasinh.blogspot.com/

Diễn đàn: http://mathlinks.vn/

Facebook: https://www.facebook.com/chicanemhanhphucS2g.

Nguyễn Văn Quốc Tuấn