www.laisac.page.tl

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

GV NGUYỄN TRUNG KIÊN 0988844088- 01256813579

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Bình phương 2 vế của phương trình

a) **Phương pháp**

✓ Thông thường nếu ta gặp phương trình dạng : $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D}$, ta thường bình phương 2 vế , điều đó đôi khi lại gặp khó khăn

✓ Khi gặp phương trình dạng: $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ Ta lập phương 2 vế phương trình $\Rightarrow A+B+3\sqrt[3]{A.B}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C$ và sử dụng phép thế : $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=C$ ta được phương trình : $A+B+3\sqrt[3]{A.B.C}=C$

Ví dụ

Ví dụ 1) Giải phương trình sau : $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$

Giải: Đk $x\geq 0$

Bình phương 2 vế không âm của phương trình ta được: $1+\sqrt{(x+3)(3x+1)}=x+2\sqrt{x(2x+1)}$, để giải phương trình này là không khó nhưng

Phương trình giải sẽ rất đơn giản nếu ta chuyển vế phương trình :

$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}$

Bình phương hai vế ta có : $\sqrt{6x^2+8x+2}=\sqrt{4x^2+12x}\Leftrightarrow x=1$

Thử lại x=1 thỏa mãn.

Nhận xét : Nếu phương trình : $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$

Mà có : $f(x)+h(x)=g(x)+k(x)$, thì ta biến đổi phương trình về dạng :

$\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$ sau đó bình phương ,giải phương trình hệ quả khi giải xong nhớ kiểm tra lại nghệm xem có thỏa mãn hay không?

Ví dụ 2) . Giải phương trình sau :

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$$

Giải:

Điều kiện : $x\geq -1$

Bình phương 2 vế phương trình ?

Nếu chuyển vế thì chuyển như thế nào?

Ta có nhận xét : $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}.\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}.\sqrt{x+1}$, từ nhận xét này ta có lời giải như sau :

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}$$

Bình phương 2 vế ta được: $\dfrac{x^3+1}{x+3}=x^2-x-1 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Thử lại : $x=1-\sqrt{3}, x=1+\sqrt{3}$ l nghiệm

Qua lời giải trên ta có nhận xét : Nếu phương trình : $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$

Mà có : $f(x).h(x)=k(x).g(x)$ thì ta biến đổi $\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$

2. Trục căn thức

2.1) Trục căn thức để xuất hiện nhân tử chung

Phương pháp

Khi gặp các phương trình vô tỉ mà ta có thể nhẩm được nghiệm x_0 thì phương trình luôn đưa về được dạng tích $(x-x_0)A(x)=0$ ta có thể giải phương trình $A(x)=0$ hoặc chứng minh $A(x)=0$ vô nghiệm ,

Để giải quyết triệt để ta cần chú ý điều kiện nghiệm của phương trình để có thể đánh giá phương trình $A(x)=0$ bằng phương pháp đạo hàm hoặc sử dụng các bất đẳng thức.

Ví dụ 1) Giải phương trình sau : $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Giải:

Ta nhận thấy : $(3x^2-5x+1)-(3x^2-3x-3)=-2(x-2)$ v

$(x^2-2)-(x^2-3x+4)=3(x-2)$

Ta có thể trục căn thức 2 vế : $\dfrac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x+1)}}=\dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$

$$-(x-2)\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x+1)}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right)=0$$

Dể dàng nhận thấy x=2 là nghiệm duy nhất của phương trình .

Ví dụ 2) Giải phương trình sau : $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Giải: Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{5}{3}$

Ta nhận thấy : x=2 là nghiệm của phương trình , như vậy phương trình có thể phân tích về dạng $(x-2)A(x)=0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm , tách như sau :

$$\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Dễ dàng chứng minh được : $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0,\ \forall x>\dfrac{5}{3}$

Ví dụ 3) Giải phương trình : $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-1}$

Giải :Đk $x\ge\sqrt[3]{2}$

Nhận thấy x=3 là nghiệm của phương trình , nên ta biến đổi phương trình

$$\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5\Leftrightarrow(x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right]=\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Ta chứng minh : $1+\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\dfrac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$

Vậy pt có nghiệm duy nhất x=3

Ví dụ 4) Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$

Giải:

Điều kiện: $2\le x\le 4$. Nhận thấy phương trình trên có nghiệm $x=3$ nên ta nghĩ đến cách giải phương trình trên bằng phương pháp nhân lượng liên hợp

PT $\Leftrightarrow\sqrt{x-2}-1+\sqrt{4-x}-1=2x^2-5x-3\Leftrightarrow\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{x-3}{\sqrt{4-x}+1}=(x-3)(2x+1)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}=2x+1(*)\end{array}\right.$$

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}\le 1;\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1\Rightarrow VT(*)\le 2-\sqrt{2}$

Mặt khác $x\ge 2\Rightarrow VP(*)=2x+1\ge 5\Rightarrow(*)$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x=3.

Ví dụ 5) Giải phương trình: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

$$PT\Leftrightarrow x^2-2x-7+3(x+2)-(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-7+(x+2)\left(3-\sqrt{x^2-2x+2}\right)=0\Leftrightarrow x^2-2x-7-\frac{(x+2)\left(x^2-2x-7\right)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-7\right)\left(1-\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x-7\right)\left(\frac{\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{7}\\x=1-\sqrt{7}\end{array}\right.$$

Tại sao ta phát hiện ra lượng x^2-2x-7

Ta thấy x=-2 không là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế phương trình cho x+2 ta có $\sqrt{x^2-2x+2}=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$. Giả sử ta cần thêm vào hai vế phương trình một lượng mx+n khi đó ta có

$$\sqrt{x^2-2x+2}-(mx+n)=\frac{x^2+x-1}{x+2}-(mx+n)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(1-m^2\right)x^2-2(1+mn)x+2-n^2}{\sqrt{x^2-2x+2}-(mx+n)}=\frac{\left(1-m\right)x^2+(1-2m-n)x-1-2n}{x+2}$$

Ta cần chọn m, n sao cho $\dfrac{1-m^2}{1-m}=\dfrac{2(1+mn)}{2m+n-1}=\dfrac{n^2-2}{2n+1}$ Từ đó ta có m=0, n=3

Ví dụ 6) Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

Giải: Điều kiện xác định: $\dfrac{5}{2}\le x\le 4$

$$PT\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)+\left(\sqrt{2x-5}-1\right)=2x^2-5x-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}+\frac{3-x}{\sqrt{4-x}-1}+\frac{2\left(x-3\right)}{\sqrt{2x-5}-1}=\left(2x+1\right)\left(x-3\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-1}+\frac{1}{\sqrt{4-x}-1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}-1}\right)=\left(2x+1\right)\left(x-3\right)$$

* Với $x-3=0\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện)

* Nếu $x-3\ne 0$ thì suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}-1}+2x+1$ (2)

Với điều kiện $\dfrac{5}{2}\le x\le 4$, ta có: VP của (2) $>2x+1>2.\dfrac{5}{2}+1=6;VT\left(2\right)<1+2=3$

Do đó pt(2) vô nghiệm. Hay pt(1) không có nghiệm khác 3. Vậy pt(1) có nghiệm duy nhất $x=3$

Ví dụ 7) Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^3+4x^2+4x}-\sqrt[3]{16x^3+12x^2+6x-3}=4x^4+2x^3-2x-1$

Giải: Điều kiện: $2x^3+4x^2+4x\ge 0\Leftrightarrow x\left(2x^2+4x+4\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$

Phương trình được viết lại như sau:

$$\left[\sqrt{2(x+1)^2+2x^3-1}-(2x+1)\right]+\left[(2x+1)-\sqrt[3]{(2x+1)^3+4(2x^3-1)}\right]=\left(2x^3-1\right)\left(2x+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^3-1}{A}-\frac{4\left(2x^3-1\right)}{B}=\left(2x^3-1\right)\left(2x+1\right)\Leftrightarrow\left(2x^3-1\right)\left(\frac{1}{A}-\frac{4}{B}-(2x+1)\right)=0$$

Với $A=\sqrt{2(x+1)^2+2x^3-1}+(2x+1)$

$$B=(2x+1)^2+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^3+4(2x^3-1)}+\sqrt[3]{\left[(2x+1)^3+4(2x^3-1)\right]^2}$$

Vì $x\ge 0\Rightarrow A\ge 1;B>0\Rightarrow\dfrac{1}{A}-\dfrac{4}{B}-2x-1<0$

Suy ra PT $\Leftrightarrow 2x^3-1=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

2.2) Đưa về "hệ tạm "

a) Phương pháp

❖ Nếu phương trình vô tỉ có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$, mà : $A-B=\alpha C$

ở dây C có thể là hằng số ,có thể là biểu thức của x. Ta có thể giải như sau :

$\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=C\Rightarrow\sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha$, khi đó ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{A}+\sqrt{B}=C\\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{A}=C+\alpha$

b) Ví dụ

Ví dụ 1) Giải phương trình sau : $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Giải:

Ta thấy : $\left(2x^2+x+9\right)-\left(2x^2-x+1\right)=2\left(x+4\right)$

$x=-4$ không phải là nghiệm

Xét $x\neq-4$

Trục căn thức ta có : $\frac{2x+8}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4\Rightarrow\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$

Vậy ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{8}{7}\end{array}\right.$

Thử lại thỏa; vậy phương trình có 2 nghiệm : x=0 v x=$\frac{8}{7}$

Ví dụ 2) Giải phương trình : $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

Ta thấy : $\left(2x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=x^2+2x$, như vậy không thỏa mãn điều kiện trên.Tuy nhiên

Ta có thể chia cả hai vế cho x và đặt $t=\frac{1}{x}$ thì bài toán trở nên đơn giản hơn

Nhận thấy x=0 không phải là nghiệm, chia hai vế pt cho x ta có $\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=3$

Đặt $t=\frac{1}{x}$ ta có phương trình mới là $\sqrt{t^2+t+2}+\sqrt{t^2-t+1}=3$ việc giải phương trìn.h này là hoàn toàn đơn giản.

Ta có $\left(\sqrt{t^2+t+2}+\sqrt{t^2-t+1}\right)\left(\sqrt{t^2+t+2}-\sqrt{t^2-t+1}\right)=2t+1\Rightarrow\sqrt{t^2+t+2}-\sqrt{t^2-t+1}=\frac{2t+1}{3}$

Từ đó ta có hệ sau :

$$\begin{cases}\sqrt{t^2+t+2}+\sqrt{t^2-t+1}=3\\ \sqrt{t^2+t+2}-\sqrt{t^2-t+1}=\frac{2t+1}{3}\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{t^2+t+2}=\frac{2t+10}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\frac{7}{8}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\frac{8}{7}\end{array}\right.$$

Ví dụ 3) Giải phương trình: $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x$

Giải:

Phương trình xác định với mọi x thuộc R

Phương trình có dạng:

$$\frac{-5(5-x)^2}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}=5-x \Leftrightarrow (5-x)\left(1+\frac{5(5-x)}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ 1+\dfrac{5(5-x)}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}=5(x-5)$. Kết hợp với phương trình ở đề bài ta có hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}=5(x-5) \\ \sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2-9x+24}=2x-10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x^2-9x+24=(2x-10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4(L) \\ x=\dfrac{19}{3}(TM) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là : $x=5; x=\dfrac{19}{3}$

3. Phương trình biến đổi về tích

❖ **Sử dụng đẳng thức**

***)** $u+v=1+uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1)=0$

***)** $au+bv=ab+vu \Leftrightarrow (u-b)(v-a)=0$

***)** $A^2=B^2$

Ví dụ 1) Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Giải: $PT \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{x+2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ví dụ 2) Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2+x}$

Giải:

\+ $x=0$, không phải là nghiệm

\+ $x\ne 0$, ta chia hai vế cho x: $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{x}=1+\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=1$

Ví dụ 3) Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

Giải:Điều kiện: $x\ge -1$

PT$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-2x\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Ví dụ 4) Giải phương trình : $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$

Giải:
Đk: $x\ge 0$

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+3}$: $1+\dfrac{4x}{x+3}=2\sqrt{\dfrac{4x}{x+3}}\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{\dfrac{4x}{x+3}}\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$

Ví dụ 5) Giải phương trình: $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+8x-7}+1$
Giải: Điều kiện $1\le x\le 7$.
Đặt $a=\sqrt{7-x},b=\sqrt{x+1};a,b\ge 0\Rightarrow ab=\sqrt{-x^2+8x-7}$
Phương trình đã cho trở thành: $b^2+2a=2b+ab\Leftrightarrow(a-b)(b-2)=0\Leftrightarrow a=b\vee b=2$
- Nếu a=b thì $\sqrt{7-x}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 7-x=x+1\Leftrightarrow x=3$ thỏa mãn điều kiện đề bài
- Nếu b=2 thì $\sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow x=3$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x=3.

❖ **Dùng hằng đẳng thức**
Biến đổi phương trình về dạng : $A^k=B^k$
Ví dụ 1) Giải phương trình : $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$
Giải:
Đk: $0\le x\le\sqrt{3}$ khi đó pt đ cho tương đương
: $x^3+\sqrt{3}x^2+x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\dfrac{10}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$
Ví dụ 2) Giải phương trình sau : $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$
Giải:
Đk: $x\ge -3$ phương trình tương đương :

$$\left(1+\sqrt{3+x}\right)^2=9x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}+1=3x\\ \sqrt{x+3}+1=-3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}\end{array}\right.$$

Ví dụ 3) Giải phương trình sau : $2+3\sqrt[3]{9x^2(x+2)}=2x+3\sqrt[3]{3x(x+2)^2}$

Giải : PT$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3x}\right)^3=0\Leftrightarrow x=1$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ
1. Phương pháp đặt ẩn phụ thông thường
* Đối với nhiều phương trình vô vô tỉ , để giải chúng ta có thể đặt $t=f(x)$ và chú ý điều kiện của t nếu phương trình ban đầu trở thành phương trình chứa một biến t quan trọng hơn ta có thể giải được phương trình đó theo t thì việc đặt phụ xem như "hoàn toàn " .Nói chung những phương trình mà có thể đặt hoàn toàn $t=f(x)$ thường là những phương trình dễ .

Ví dụ 1) Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

Điều kiện: $x\geq 1$

Nhận xét. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1$

Đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$ thì phương trình có dạng: $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t=1$

Thay vào tìm được $x=1$

Ví dụ 2) Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Giải

Điều kiện: $x\geq -\frac{4}{5}$

Đặt $t=\sqrt{4x+5}(t\geq 0)$ thì $x=\frac{t^2-5}{4}$. Thay vào ta có phương trình sau:

$$2.\frac{t^4-10t^2+25}{16}-\frac{6}{4}(t^2-5)-1=t\Leftrightarrow t^4-22t^2-8t+27=0$$

$$\Leftrightarrow (t^2+2t-7)(t^2-2t-11)=0$$

Ta tìm được bốn nghiệm là: $t_{1,2}=-1\pm 2\sqrt{2};\ t_{3,4}=1\pm 2\sqrt{3}$

Do $t\geq 0$ nên chỉ nhận các gái trị $t_1=-1+2\sqrt{2}, t_3=1+2\sqrt{3}$

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình l: $x=1-\sqrt{2}$ va $x=2+\sqrt{3}$

Cách khác: Ta có thể bình phương hai vế của phương trình với điều kiện $2x^2-6x-1\geq 0$

Ta được: $x^2(x-3)^2-(x-1)^2=0$, từ đó ta tìm được nghiệm tương ứng.

Đơn giản nhất là ta đặt : $2y-3=\sqrt{4x+5}$ và đưa về hệ đối xứng (**Xem phần dặt ẩn phụ đưa về hệ)**

Ví dụ 3) Giải phương trình sau: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Điều kiện: $1\leq x\leq 6$

Đặt $y=\sqrt{x-1}(y\geq 0)$ thì phương trình trở thành:

$y^2+\sqrt{y+5}=5\Leftrightarrow y^4-10y^2-y+20=0$ (với

$y\leq\sqrt{5})\Leftrightarrow (y^2+y-4)(y^2-y-5)=0\Leftrightarrow y=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ (loai), $y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

Từ đó ta tìm được các giá trị của $x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}$

Ví dụ 4) Giải phương trình sau : $x=\left(2004+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

Giải: đk $0\leq x\leq 1$

Đặt $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ PT $\Leftrightarrow 2\left(1-y\right)^2\left(y^2+y-1002\right)=0\Leftrightarrow y=1\Leftrightarrow x=0$

Ví dụ 5) Giải phương trình sau : $x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3x+1$

Giải:
Điều kiện: $-1\le x<0$

Chia cả hai vế cho x ta nhận được: $x+2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3+\frac{1}{x}$

Đặt $t=x-\frac{1}{x}$, ta giải được.

Ví dụ 6) Giải phương trình : $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

Giải: $x=0$ không phải là nghiệm , Chia cả hai vế cho x ta được: $\left(x-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2$

Đặt t= $\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$, Ta có : $t^3+t-2=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 7) Giải phương trình sau: $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^3+x\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

Lời giải: Điều kiện $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1]$

Nếu x<-1 thì $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^2+x\right)^2+\left(x-1\right)^2>0; x^3+x=x\left(x^2+1\right)<0$ nên phương trình trên không có nghiệm thỏa mãn x<-1
Đồng thời x=1 không là nghiệm của phương trình nên ta chỉ xét $x\in(0;1)$.
Phương trình tương đương với:

$$\left(x^2+1\right)-2x\left(1-x^2\right)=\left(x^2+1\right)\sqrt{x\left(1-x^2\right)}\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}-\frac{2\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}{x^2+1}=1$$

Đặt $t=\frac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}>0$, phương trình trên trở thành $t-\frac{2}{t}=1\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=2$ (do t>0)

Khi đó

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}=2\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2=4x\left(1-x^2\right)\Leftrightarrow x^4+2x^2+1-4x+4x^3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$$

So sánh với điều kiện đã nêu trên ta thấy phương trình trên có nghiệm duy nhất là $x=-1\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 8) Giải phương trình: $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$

Giải: ĐK: $-1\le x\le 1$. PT $\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(x^2-x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)=x\sqrt{2(1-x^2)}$

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\frac{t^2-1}{2}=x\sqrt{1-x^2}$. Ta có phương trình:

$t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)=\sqrt{2}\dfrac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^3+\sqrt{2}t^2-3t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t^2+2\sqrt{2}t+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t=-\sqrt{2}\pm1\end{array}\right.$

*)$t=\sqrt{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}-x=\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}-x\right)^2=1-x^2\left(do\left|x\right|\le1\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

*)$t=-\sqrt{2}-1\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=-1-\sqrt{2}$ vô nghiệm ,do $VT\ge-1>VP$

*)$t=-\sqrt{2}+1\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2}-x\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le1-\sqrt{2}\\ x^2-\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Ví dụ 8) Giải phương trình sau: $(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$

Giải:

Điều kiện $\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$.

Phương trình được viết lại như sau:

$7\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\right)-2\left((2x-3)\sqrt{2x-3}+(5-2x)\sqrt{5-2x}\right)=2+8\sqrt{(5-2x)(2x-3)}$

Đặt $t=\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\Rightarrow\sqrt{(5-2x)(2x-3)}=\dfrac{t^2-2}{2}$. Điều kiện $\left(\sqrt{2}\le t\le2\right)$

Phương trình đã cho có dạng: $t^3-4t^2+t+6=0\Rightarrow t=2\Rightarrow x=2$

Ngoài ra ta cũng có thể giải phương trình trên bằng cách đưa về hệ.

Nhận xét : Đối với cách đặt ẩn phụ như trên chúng ta chỉ giải quyết được một lớp bài đơn giản, đôi khi phương trình đối với t lại quá khó giải

2. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất bậc 2 đối với 2 biến :

* Chúng ta đã biết cách giải phương trình: $u^2+\alpha uv+\beta v^2=0$ (1) bằng cách

- Xét $v=0$ thử trực tiếp

- Xét $v\ne0$ phương trình trở thành : $\left(\dfrac{u}{v}\right)^2+\alpha\left(\dfrac{u}{v}\right)+\beta=0$

Các trường hợp sau cũng đưa về được (1)

✓ $a.A\left(x\right)+bB\left(x\right)=c\sqrt{A\left(x\right).B\left(x\right)}$

✓ $\alpha u+\beta v=\sqrt{mu^2+nv^2}$

Chúng ta thay các biểu thức A(x) , B(x) bởi các biểu thức vô tỉ thì sẽ nhận được phương trình vô tỉ theo dạng này .

a) Phương trình dạng : $a.A(x)+bB(x)=c\sqrt{A(x).B(x)}$

Như vậy phương trình $Q(x)=\alpha\sqrt{P(x)}$ có thể giải bằng phương pháp trên nếu

$$\begin{cases}P(x)=A(x).B(x)\\Q(x)=aA(x)+bB(x)\end{cases}$$

Xuất phát từ đẳng thức :

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

$$4x^4+1=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$$

Ta dễ dàng tạo ra những phương trình vô tỉ dạng trên ví dụ như: $4x^2-2\sqrt{2}x+4=\sqrt{x^4+1}$

Ví dụ 1) Giải phương trình : $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$

Giải: Đặt $u=\sqrt{x+1}, v=\sqrt{x^2-x+1}$

Phương trình trở thành : $2(u^2+v^2)=5uv \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=2v\\u=\dfrac{1}{2}v\end{array}\right.$ Tìm được: $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Ví dụ 2) Giải phương trình : $x^2-3x+1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

Ta có $\sqrt{x^4+x^2+1}=\sqrt{x^4+2x^2+1-x^2}=\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

Ta giải bài toán như sau:

Giả sử: $x^2-3x+1=\alpha(x^2-x+1)+\beta(x^2+x+1)$.

Suy ra $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\-\alpha+\beta=-3\\\alpha+\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=-1\end{cases}$. Phương trình được viết lại như sau:

$$2(x^2-x+1)-(x^2+x+1)=\frac{-\sqrt{3}}{3}\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

Hay $6u^2-3v^2=-\sqrt{3}uv$. Đến đây thì bài toán là đơn giản

Ví dụ 3) Giải phương trình sau : $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

Giải:

Đk: $x\geq 1$

Nhận xt : Ta viết $\alpha(x-1)+\beta(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$

Đồng nhất thức ta được: $3(x-1)+2(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$

Đặt $u = x-1 \geq 0, v = x^2+x+1 > 0$, ta được: $3u+2v = 7\sqrt{uv} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 9u \\ v = \frac{1}{4}u \end{array}\right.$

Ta được : $x = 4 \pm \sqrt{6}$

Ví dụ 4) Giải phương trình : $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$

Giải:

Nhận xét : Đặt $y = \sqrt{x+2}$ ta hãy biến pt trên về phương trình thuần nhất bậc 3 đối với x và y :

$$x^3 - 3x^2 + 2y^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x(x+2) + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -2y \end{array}\right.$$

Phương trình có nghiệm : $x = 2, \quad x = 2-2\sqrt{3}$

b).Phương trình dạng : $\alpha u + \beta v = \sqrt{mu^2 + nv^2}$

Phương trình cho ở dạng này thường khó "phát hiện " hơn dạng trên , nhưng nếu ta bình phương hai vế thì đưa về được dạng trên.

Ví dụ 1) Giải phương trình : $x^2 + 3\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$

Giải:

Ta đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ v = \sqrt{x^2-1} \end{cases}$ khi đó phương trình trở thành :

$$u + 3v = \sqrt{u^2 - v^2} \Leftrightarrow 10v^2 + 6uv = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 0 \\ v = -\frac{3}{5}u(VN) \end{array}\right. \Rightarrow v = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Ví dụ 2) Giải phương trình sau : $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$

Giải

Đk $x \geq \frac{1}{2}$. Bình phương 2 vế ta có :

$$\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)} = x^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+2x)(2x-1)} = (x^2+2x)-(2x-1)$$

Ta có thể đặt : $\begin{cases} u = x^2+2x \\ v = 2x-1 \end{cases}$ khi đó ta có hệ : $uv = u^2 - v^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \frac{1-\sqrt{5}}{2}v \\ u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}v \end{array}\right.$

Do $u, v \geq 0$. $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}v \Leftrightarrow x^2 + 2x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(2x-1)$

Vì sao ta phân tích được như trên. Hãy xét ví dụ sau:

Ví dụ 3) Giải phương trình : $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Giải:

Đk $x\ge 5$. Chuyển vế bình phương ta được: $2x^2-5x+2=5\sqrt{\left(x^2-x-20\right)\left(x+1\right)}$

Giả sử: $2x^2-5x+2=\alpha\left(x^2-x-20\right)+\beta\left(x+1\right)$

Khi đó ta có : $\begin{cases}\alpha=2\\-\alpha+\beta=-5\\-20\alpha+\beta=2\end{cases}$ không tồn tại α,β thỏa mãn hệ.

Vậy ta không thể đặt $\begin{cases}u=x^2-x-20\\v=x+1\end{cases}$

Nhưng ta có : $\left(x^2-x-20\right)\left(x+1\right)=\left(x+4\right)\left(x-5\right)\left(x+1\right)=\left(x+4\right)\left(x^2-4x-5\right)$

Giả sử: $2x^2-5x+2=\alpha\left(x^2-4x-5\right)+\beta\left(x+4\right)$. Suy ra $\begin{cases}\alpha=2\\-4\alpha+\beta=-5\\-5\alpha+4\beta=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=3\end{cases}$

Ta viết lại phương trình: $2\left(x^2-4x-5\right)+3\left(x+4\right)=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$. Đến đây bài toán được giải quyết .

Đây là ví dụ điểm hình về phương trình: $\alpha u+\beta v=\sqrt{mu^2+nv^2}$ học sinh cần chú ý

3. Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

- Từ những phương trình tích

$\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-x+2\right)=0$, $\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\left(\sqrt{2x+3}-x+2\right)=0$

Khai triển và rút gọn ta sẽ được những phương trình vô tỉ không tầm thường chút nào, độ khó của phương trình dạng này phụ thuộc vào phương trình tích mà ta xuất phát .

Thông thường các phương trình này thường xuất hiện theo dạng :

$$\left[\begin{array}{l}ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{px+q}\\ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{px^2+qx+r}\\ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)\sqrt{ax^3+qx^2+rx+s}\end{array}\right.$$

Để giải các phương trình dạng này ta thường đặt $\sqrt{f(x)}=t$ sau đó đưa phương trình về dạng: $\alpha t^2-(mx+n)t+g(x)=0$ (*) . Vấn đề ở đây là ta phải chọn α như thế nào để phương trình (*) có Δ chẵn

Tức là $\Delta=(mx+n)^2-4\alpha.g(x)=\left[\begin{array}{l}(x+h(x))^2\\(2x+h(x))^2....\end{array}\right.$ (Điều kiện cần là "hệ số của x^2 trong Δ phải là số chính phương")

Phương pháp giải được thể hiện qua các ví dụ sau .

Ví dụ 1) Giải phương trình : $x^2+\left(3-\sqrt{x^2+2}\right)x=1+2\sqrt{x^2+2}$

Giải:

Đặt: $t=\sqrt{x^2+2}$, ta có phương trình mới là: $x^2-(x+2)t+3x-1=0$.

Ta cần làm xuất hiện t^2 trong phương trình này.

Ta có

$PT \Leftrightarrow \alpha t^2+(x+2)t+x^2+3x-1-\alpha(x^2+2)=0 \Leftrightarrow \alpha t^2+(x+2)t+(1-\alpha)x^2+3x-1-2\alpha=0$

$\Delta=(x+2)^2-4\alpha\left[(1-\alpha)x^2+3x-1-2\alpha\right]=\left(4\alpha^2-4\alpha+1\right)x^2+x(4-12\alpha)+4\alpha(1+2\alpha)+4$

Ta quan tâm đến phần hệ số của x^2 là $\left(4\alpha^2-4\alpha+1\right)$. Nhận thấy khi $\alpha=1$ thì

$\Delta=x^2-8x+16=(x-4)^2$

Từ đó phương trình có dạng: $t^2-\left(2+x\right)t-3+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=x-1 \end{array}\right.$ (Phần còn lại quá đơn giản)

Ví dụ 2) Giải phương trình : $\left(x+1\right)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

Giải:

Đặt : $t=\sqrt{x^2-2x+3},\quad t\ge\sqrt{2}$ Khi đó phương trình trở thnh :

$\left(x+1\right)t=x^2+1 \Leftrightarrow x^2+1-\left(x+1\right)t=0$

Bây giờ ta thêm bớt , để được phương trình bậc 2 theo t có Δ chẵn

$x^2-2x+3-\left(x+1\right)t+2\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow t^2-\left(x+1\right)t+2\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x-1 \end{array}\right.$

* Từ một phương trình đơn giản : $\left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1-x}-2+\sqrt{1+x}\right)=0$, khai triển ra ta sẽ được pt sau

Ví dụ 3) Giải phương trình sau : $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Giải:

Nhận xét : đặt $t=\sqrt{1-x}$, PT : $4\sqrt{1+x}=3x+2t+t\sqrt{1+x}+1$ (1)

$\Leftrightarrow 3x+(\sqrt{1+x}+2)t-4\sqrt{1+x}+1=0$ Ta sẽ tạo ra phương trình:

$\alpha t^2+(\sqrt{1+x}+2)t+3x-4\sqrt{1+x}-\alpha(1-x)+1=0$

$\Leftrightarrow \alpha t^2+(\sqrt{1+x}+2)t+(3+\alpha)x-4\sqrt{1+x}-\alpha+1=0$

$\Delta=x+1+4+4\sqrt{x+1}-4\alpha\left[(3+\alpha)x-4\sqrt{1+x}-\alpha+1\right]$

$=\left(-4\alpha^2-12\alpha+1\right)x+(16\alpha+4)\sqrt{x+1}+5+4\alpha^2-4\alpha$

Khi $\alpha=-1$ thì $\Delta=9(x+1)-12\sqrt{x+1}+4=\left[3\sqrt{x+1}-2\right]^2$ (TMĐK)

Vậy phương trình trở thành: $-t^2+(\sqrt{1+x}+2)t+2x-4\sqrt{1+x}+2=0$

Ta có : $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-\sqrt{x+1}-2-(3\sqrt{x+1}-2)}{-2} = 2\sqrt{x+1} \\ t = \dfrac{-\sqrt{x+1}-2+(3\sqrt{x+1}-2)}{-2} = \sqrt{x+1}-1 \end{array}\right.$

Việc còn lại là hoàn toàn đơn giản.

Ví dụ 4) Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Giải .

Bình phương 2 vế phương trình: $4\left(2x+4\right)+16\sqrt{2\left(4-x^2\right)}+16\left(2-x\right)=9x^2+16$

Ta đặt : $t=\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\geq 0$. Ta được: $9x^2-16t-32+8x=0$

Ta phải tách $9x^2=\alpha 2\left(4-x^2\right)+\left(9+2\alpha\right)x^2-8\alpha$ làm sao cho Δ_t có dạng chính phương .

Cụ thể phương pháp như sau:

Giả sử phương trình có dạng

$mt^2-16t-m(8-2x^2)+9x^2+8x-32=0 \Leftrightarrow mt^2-16t+(9+2m)x^2-8m+8x-32=0$

$\Rightarrow \Delta' = 64-m((9+2m)x^2-8m+8x-32) \Leftrightarrow \Delta' = -m((9+2m)x^2-8mx+8m^2+32m$

Ta cần chọn m sao cho Δ có thể đưa về dạng $\left[f(x)\right]^2$ từ đó ta suy ra

$\begin{cases} -m(9+2m)>0 \\ -m(9+2m)=1;4;9;16......... \end{cases} \Rightarrow m=-4$ là một giá trị thỏa mãn điều kiện

Ta có phương trình mới là $-4t^2-16t+x^2+8x=0 \Leftrightarrow 4t^2+16t-x^2-8x=0 \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-x-8}{2} \\ t=\dfrac{x}{2} \end{array}\right.$

4. Đặt nhiều ẩn phụ đưa về tích

- Xuất phát từ một số hệ "đại số " đẹp chúng ta có thể tạo ra được những phương trình vô tỉ mà khi giải nó chúng ta lại đặt nhiều ẩn phụ và tìm mối quan hệ giữa các ẩn phụ để đưa về hệ

Xuất phát từ đẳng thức $\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$, Ta có

$a^3+b^3+c^3=\left(a+b+c\right)^3 \Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)=0$

Từ nhận xét này ta có thể tạo ra những phương trình vô tỉ có chứa căn bậc ba .

$\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x+1}=2$

$\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$

Ví dụ 1) Giải phương trình : $x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$

Giải : $\begin{cases} u=\sqrt{2-x} \\ v=\sqrt{3-x} \\ w=\sqrt{5-x} \end{cases}$, ta có : $\begin{cases} 2-u^2=uv+vw+wu \\ 3-v^2=uv+vw+wu \\ 5-w^2=uv+vw+wu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)(u+w)=2 \\ (u+v)(v+w)=3 \\ (v+w)(u+w)=5 \end{cases}$, giải hệ ta được:

$u=\dfrac{\sqrt{30}}{60} \Leftrightarrow x=\dfrac{239}{120}$

Ví dụ 2) Giải phương trình sau : $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Giải . Ta đặt : $\begin{cases} a=\sqrt{2x^2-1} \\ b=\sqrt{x^2-3x-2} \\ c=\sqrt{2x^2+2x+3} \\ d=\sqrt{x^2-x+2} \end{cases}$, khi đó ta có : $\begin{cases} a+b=c+d \\ a^2-b^2=c^2-d^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$

Ví dụ 3) Giải phương trình: $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$

Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Đặt $a=\sqrt[3]{7x+1}, b=-\sqrt[3]{x^2-x-8}, c=\sqrt[3]{x^2-8x-1}$. Khi đó:

$\begin{cases} a^3+b^3+c^3=8(1) \\ a+b+c=2(2) \end{cases}$.

Mặt khác ta có hằng đẳng thức $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$ (3)

Thay (1),(2) vào (3) ta được: $(a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7x+1}=\sqrt[3]{x^2-x-8} \\ \sqrt[3]{x^2-x-8}=\sqrt[3]{x^2-8x-1} \\ \sqrt[3]{x^2-8x-1}=-\sqrt[3]{7x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x+1=x^2-x-8 \\ x^2-x-8=x^2-8x-1 \\ x^2-8x-1=-7x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x-9=0 \\ 7x=7 \\ x^2-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=9 \\ x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Thay các giá trị $-1,0,1,9$ vào phương trình đã cho thấy thỏa mãn. Vậy pt có 4 nghiệm $-1,0,1,9$.

Ví dụ 4) Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2}\right)=1$

Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Phương trình viết lại: $(x+1)+(x-2)+\sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2}\right)=0$ (*)

Đặt $a=\sqrt[3]{x+1}, b=-\sqrt[3]{x+2}$, thay vào (*) ta được:

$a^3+b^3-ab(a+b)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1}=-\sqrt[3]{x+2} \\ \sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=-x-2 \\ 0x=1(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

Thay $x=-\frac{3}{2}$ vào pt đã cho thấy thỏa mãn.Vậy $x=-\frac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất của pt.

5. Đặt ẩn phụ đưa về hệ:

5.1 Đặt ẩn phụ đưa về hệ thông thường

- Đặt $u=\alpha\left(x\right),v=\beta\left(x\right)$ và tìm mối quan hệ giữa $\alpha\left(x\right)$ và $\beta\left(x\right)$ từ đó tìm được hệ theo u,v

Ví dụ 1) Giải phương trình: $x\sqrt[3]{25-x^3}\left(x+\sqrt[3]{25-x^3}\right)=30$

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}\Rightarrow x^3+y^3=35$

Khi đó phương trình chuyển về hệ phương trình sau: $\begin{cases}xy(x+y)=30\\x^3+y^3=35\end{cases}$, giải hệ này ta tìm được $(x;y)=(2;3)=(3;2)$. Tức là nghiệm của phương trình là $x\in\{2;3\}$

Ví dụ 2) Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{2}-1-x}+\sqrt[4]{x}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Điều kiện: $0\le x\le\sqrt{2}-1$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{\sqrt{2}-1-x}=u\\\sqrt[4]{x}=v\end{cases}\Rightarrow 0\le u\le\sqrt{\sqrt{2}-1},0\le v\le\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}$

Ta đưa về hệ phương trình sau: $\begin{cases}u+v=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\u^2+v^4=\sqrt{2}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-v\\\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-v\right)^2+v^4=\sqrt{2}-1\end{cases}$

Giải phương trình thứ 2: $(v^2+1)^2-\left(v+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2=0$, từ đó tìm ra v rồi thay vào tìm nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3) Giải phương trình sau: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Điều kiện: $x\ge1$

Đặt $a=\sqrt{x-1},\ b=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}(a\ge0,b\ge0)$ thì ta đưa về hệ phương trình sau:

$\begin{cases}a^2+b=5\\b^2-a=5\end{cases}\to(a+b)(a-b+1)=0\Rightarrow a-b+1=0\Rightarrow a=b-1$

Vậy $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=5-x\Rightarrow x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}$

Ví dụ 4) Giải phương trình: $\frac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\frac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\frac{8}{3}$

Giải
Điều kiện: $-5 < x < 5$
Đặt $u = \sqrt{5-x}, v = \sqrt{5-y}$ $\left(0 < u, v < \sqrt{10}\right)$.

Khi đó ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ -\dfrac{4}{u} - \dfrac{4}{v} + 2(u+z) = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 10 + 2uv \\ (u+v)\left(1 - \dfrac{2}{uv}\right) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Ví dụ 5) Giải phương trình: $\dfrac{4}{x} + \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \dfrac{5}{x}}$ (1)

Giải: ĐK: $x \neq 0; x - \dfrac{1}{x} \geq 0; 2x - \dfrac{5}{x} \geq 0$

Giải hệ điều kiện trên ta được: $x \geq \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ hoặc $-1 \leq x < 0$ (2).

Phương trình (1) tương đương: $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} - \sqrt{2x - \dfrac{5}{x}} = x - \dfrac{4}{x}$

Đặt $u = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}; v = \sqrt{2x - \dfrac{5}{x}}$ với $u \geq 0; v \geq 0$. Ta được: $u - v = x - \dfrac{4}{x}$ (3)

Lại có $v^2 - u^2 = \left(2x - \dfrac{5}{x}\right) - \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = x - \dfrac{4}{x}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $v^2 - u^2 = u - v \Leftrightarrow \left(u - v\right)\left(u + v + 1\right) = 0$. Vì $u + v + 1 > 0$ nên $u - v = 0$

Từ (3) suy ra $x - \dfrac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Thử lại thấy nghiệm $x = -2$ không thỏa mãn điều kiện (2), nghiệm $x = 2$ thỏa mãn phương trình.

Ví dụ 6) Giải phương trình: $\sqrt[3]{24 + x} + \sqrt{12 - x} = 6$
Giải: Điều kiện: $x \leq 12$
Đặt $u = \sqrt[3]{24 + x}; v = \sqrt{12 - x} \Rightarrow u \leq \sqrt[3]{36}, v \geq 0$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + v^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - u \\ u^3 + \left(6 - u\right)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - u \\ u\left(u^2 + u - 12\right) = 0 (*) \end{cases}$

Phương trình (*) có 3 nghiệm $u = 0; u = -4; u = 3$ thỏa mãn $u \leq \sqrt[3]{36}$.
Từ đây ta tìm được: $x = -24; x = -88; x = 3$
Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = -24; x = -88; x = 3$.

Ví dụ 7) Giải phương trình: $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17 - x} = 3$
Giải: ĐK: $0 \leq x \leq 2$. Đặt $a = \sqrt[4]{x}; b = \sqrt[4]{17 - x}; a, b \geq 0$. Ta có hệ:

$\begin{cases} a + b = 3 \\ a^4 + b^4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ \left[\left(a + b\right)^2 - 2ab\right]^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a^2b^2 - 18ab + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \vee ab = 16 \end{cases}$

* Với $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=16 \end{array} \right.$

* Với $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=16 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1; x=16$.

Nhận xét: Khi gặp phương trình có dạng: $F\left(f\left(x\right)\right), \sqrt[n]{a+f\left(x\right)}, \sqrt[m]{b-f\left(x\right)}=c$ (1). Ta có thể đặt $u=\sqrt[n]{a+f\left(x\right)}, v=\sqrt[m]{b-f\left(x\right)}$, lúc đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f\left(u,v\right)=c \\ u^n+v^m=a+b \end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được u,v. Từ đây ta tìm được x.

Chú ý: Khi tìm được u,v để tìm x ta chỉ cần giải 1 trong 2 phương trình:

$$\sqrt[n]{a+f\left(x\right)}=u \text{ hoặc } \sqrt[m]{b-f\left(x\right)}=v$$

5.2 Xây dựng phương trình vô tỉ từ hệ đối xứng loại II

- Ta hãy đi tìm nguồn gốc của những bài toán giải phương trình bằng cách đưa về hệ đối xứng loại II
- Ta xét một hệ phương trình đối xứng loại II sau : $\begin{cases} \left(x+1\right)^2=y+2 & (1) \\ \left(y+1\right)^2=x+2 & (2) \end{cases}$ việc giải hệ này thì đơn giản

Bây giời ta sẽ biến hệ thành phương trình bằng cách đặt $y=f\left(x\right)$

sao cho (2) luôn đúng , $y=\sqrt{x+2}-1$, khi đó ta có phương trình :

$\left(x+1\right)^2=(\sqrt{x+2}-1)+1 \Leftrightarrow x^2+2x=\sqrt{x+2}$

Vậy để giải phương trình : $x^2+2x=\sqrt{x+2}$ ta đặt lại như trên và đưa về hệ

Bằng cách tương tự xét hệ tổng quát dạng bậc 2 : $\begin{cases} \left(\alpha x+\beta\right)^2=ay+b \\ \left(\alpha y+\beta\right)^2=ax+b \end{cases}$, ta sẽ xây dựng được phương trình

dạng sau : đặt $\alpha y+\beta=\sqrt{ax+b}$, khi đó ta có phương trình : $\left(\alpha x+\beta\right)^2=\dfrac{a}{\alpha}\sqrt{ax+b}+b-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Tương tự cho bậc cao hơn : $\left(\alpha x+\beta\right)^n=\dfrac{a}{\alpha}\sqrt[n]{ax+b}+b-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Tóm lại phương trình thường cho dưới dạng khai triển ta phải viết về dạng :

$\left(\alpha x+\beta\right)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$ v đặt $\alpha y+\beta=\sqrt[n]{ax+b}$ để đưa về hệ , chú ý về dấu của α ???

Việc chọn $\alpha;\beta$ thông thường chúng ta chỉ cần viết dưới dạng :$\left(\alpha x+\beta\right)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$ là chọn được.

Ví dụ 1) Giải phương trình: $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$

Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}$

Ta có phương trình được viết lại là: $(x-1)^2 - 1 = 2\sqrt{2x-1}$

Đặt $y - 1 = \sqrt{2x-1}$ thì ta đưa về hệ sau: $\begin{cases} x^2 - 2x = 2(y-1) \\ y^2 - 2y = 2(x-1) \end{cases}$

Trừ hai vế của phương trình ta được $(x-y)(x+y) = 0$

Giải ra ta tìm được nghiệm của phương trình là: $x = 2 + \sqrt{2}$

Ví dụ 2) Giải phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$

Giải

Điều kiện $x \geq -\dfrac{5}{4}$

Ta biến đổi phương trình như sau: $4x^2 - 12x - 2 = 2\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 2\sqrt{4x+5} + 11$

Đặt $2y - 3 = \sqrt{4x+5}$ ta được hệ phương trình

sau: $\begin{cases} (2x-3)^2 = 4y+5 \\ (2y-3)^2 = 4x+5 \end{cases} \Rightarrow (x-y)(x+y-1) = 0$

Với $x = y \Rightarrow 2x - 3 = \sqrt{4x+5} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3}$

Với $x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x \rightarrow x = 1 - \sqrt{2}$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $\{1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{3}\}$

Ví dụ 3) Giải phương trình: $8x^3 - 4x - 1 = \sqrt[3]{6x+1}$

Giải:

Ta có phương trình $\Leftrightarrow (2x)^3 - 4x - 1 = \sqrt[3]{2x + 4x + 1}$

Đặt $u = 2x; v = \sqrt[3]{2x+4x+1}$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} u^3 - 4x - 1 = v \\ v^3 - 4x - 1 = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - v^3 = v - u \\ u^3 - 4x - 1 = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 8u^3 - 4x - 1 = u \end{cases} \Leftrightarrow 8x^3 - 6x = 1(1)$

(*) Nếu $|x| > 1 \Rightarrow VT(1) = 2|x|\left(4x^2 - 3\right) > 2 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

(*) Nếu $|x| \leq 1$, đặt $x = \cos t, t \in [0;\pi]$, ta có (1) trở thành:

$\cos 3t = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{9}; t_2 = \dfrac{5\pi}{9}; t_3 = \dfrac{7\pi}{9}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x = \cos\dfrac{\pi}{9}; x = \cos\dfrac{5\pi}{9}; x = \cos\dfrac{7\pi}{9}$

Ví dụ 4) Giải phương trình: $7x^2 - 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x\left(1+3x-3x^2\right)}$

Giải:

Ta thấy x=0 không là nghiệm của phương trình.

Chia 2 vế phương trình cho x^3 ta được: $\frac{7}{x}-\frac{13}{x^2}+\frac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3}$

Đặt $t=\frac{1}{x},$ ta có: $8t^3-13t^2+7t=2\sqrt[3]{t^2+3t-3} \Leftrightarrow (2t-1)^3-(t^2-t-1)=2\sqrt[3]{(2t-1)+t^2-t-1}$

Đặt $u=2t-1, v=\sqrt[3]{2(2t-1)+t^2-t-1}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3-t^2+t+1=2v \\ v^3-t^2+t+1=2u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=2v-2u$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0$$

$$\Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow 2t-1=\sqrt[3]{t^2+3t-3} \Leftrightarrow 8t^3-13t^2+3t+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(8t^2-5t-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 8t^2-5t-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{5\pm\sqrt{89}}{16} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy ba nghiệm thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có 3 nghiệm.

Ví dụ 5) Giải phương trình: $8x^2-13x+7=\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}$

Giải:

$$PT \Leftrightarrow 8x^3-13x^2+7x=(x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3-(x^2-x-1)=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}$$

Đặt $u=2x-1; v=\sqrt[3]{3x^2-2}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3-(x^2-x-1)=(x+1)v \\ v^3-(x^2-x-1)=(x+1)u \end{cases} \Rightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+x+1)=0$$

(*)$u=v \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{3x^2-2} \Leftrightarrow 8x^3-15x^2+6x+1=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2-7x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{8} \end{array}\right.$$

(*)$u^2+uv+v^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left(v+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+x+1=0$

$\Leftrightarrow 4\left(v+\frac{u}{2}\right)^2+12x^2-8x+7=0 \Leftrightarrow 4\left(v+\frac{u}{2}\right)^2+4x^2+2(2x-1)^2+5=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=1; x=-\frac{1}{8}$

Ví dụ 6) Giải phương trình: $x^3-\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x+6}}=6$

Giải: Đặt $\begin{cases}\sqrt[3]{x+6}=z\\ \sqrt[3]{z+6}=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z^3-x=6\\ y^3-z=6\end{cases}$

Mặt khác với các phép đặt ẩn phụ trên, từ pt trong đầu bài, ta có $x^3-y-6=0$.

Như vậy ta được hệ pt (I): $\begin{cases}x^3=y+6(1)\\ y^3=z+6(2)\\ z^3=x+6(3)\end{cases}$

Nhìn thấy hệ trên không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x,y,z nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $x=\max(x,y,z)$ (x là số lớn nhất trong 3 số x,y,z hay $x\geq y, x\geq z$)

Nếu $x>y$, từ (1) và (2) suy ra $y+6=x^3>y^3=z+6\Rightarrow y>z$

Khi đó từ (2), (3) suy ra $y+6=x^3>y^3=x+6\Rightarrow z>x$. Mâu thuẫn với giả thiết $x\geq z$ ở trên. Do đó phải có $x=y$.

Với $x=y$, từ (1) và (2) suy ra $y=z$

Vậy $x=y=z$

Phương trình (1) trở thành: $x^3-x-6=0$ hay $(x-2)(x^2+2x+3)=0$ (4)

Vì $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$ nên PT (4) có nghiệm duy nhất $x=2$.

Ví dụ 7) Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$

Phương trình : $\Leftrightarrow 27\sqrt[3]{81x-8}=27x^3-54x^2+36x-54\Leftrightarrow 27\sqrt[3]{81x-8}=(3x-2)^3-46$

Ta đặt : $3y-2=\sqrt[3]{81x-8}$. Từ đó đưa về hệ đối xứng bậc 3. $\begin{cases}(3x-2)^3-27(3y-2)-46=0\\ (3y-2)^3=81x-8\end{cases}$

Hay $\begin{cases}(3x-2)^3=81y-8\\ (3y-2)^3=81x-8\end{cases}$ Đến đây việc giải hệ hoàn toàn đơn giản

"Dạng tổng quát của bài toán này là: $[f(x)]^n+b=a\sqrt[n]{af(x)-b}$ **. Để giải phương trình này ta đặt** $t=f(x); y=\sqrt[n]{\mathrm{af}(x)-b}$ **Ta có hệ phương trình sau:** $\begin{cases}t^n+b=ay\\ y^n+b=at\end{cases}$ **Đây là hệ đối xứng loại (II). Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta sẽ tìm được mối liên hệ t,y.**

Chú ý rằng ta có thể thay a, b bằng các biểu thức chứa x cách giải bài toán vẫn không thay đổi."

- ❖ **Dạng hệ gần đối xứng**

Ta xét hệ sau : $\begin{cases}(2x-3)^2 = 2y+x+1 \\ (2y-3)^2 = 3x+1\end{cases}$ (1) đây không phải là hệ đối xứng loại 2 nhưng chúng ta vẫn giải hệ được , và từ hệ này chúng ta xây dưng được bài toán phương trình sau :

Ví dụ 1) Giải phương trình: $4x^2+5-13x+\sqrt{3x+1}=0$

Nhận xét : Nếu chúng ta nhóm như những phương trình trước : $\left(2x-\frac{13}{4}\right)^2 = \sqrt{3x+1}-\frac{33}{4}$

Đặt $2y-\frac{13}{4}=\sqrt{3x+1}$ thì chúng ta không thu được hệ phương trình mà chúng ta có thể giải được.

Để thu được hệ ***(1)*** ta đặt : $\alpha y+\beta=\sqrt{3x+1}$, chọn α,β sao cho hệ chúng ta có thể giải được , ***(đối xứng hoặc gần đối xứng)***

Ta có hệ : $\begin{cases}(\alpha y+\beta)^2 = 3x+1 \\ 4x^2-13x+5=-\alpha y-\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^2y^2+2\alpha\beta y-3x+\beta^2-1=0 & (1) \\ 4x^2-13x+\alpha y+5+\beta=0 & (2)\end{cases}$ (*)

Để giải hệ trên thì ta lấy (1) nhân với k cộng với (2): và mong muốn của chúng ta là có nghiệm $x=y$

Nên ta phải có : $\frac{\alpha^2}{4}=\frac{2\alpha\beta-3}{\alpha-13}=\frac{\beta^2-1}{5+\beta}$, ta chọn được ngay $\alpha=-2;\ \beta=3$

Ta có lời giải như sau :

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{3}$, Đặt $\sqrt{3x+1}=-(2y-3),\ (y\le\frac{3}{2})$

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}(2x-3)^2=2y+x+1 \\ (2y-3)^2=3x+1\end{cases} \Rightarrow (x-y)(2x+2y-5)=0$

Với $x=y\Rightarrow x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$

Với $2x+2y-5=0\Rightarrow x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}$

Kết luận: tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\frac{15-\sqrt{97}}{8};\frac{11+\sqrt{73}}{8}\right\}$

Ví dụ 2) Giải phương trình**:** $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1}-9x^2+26x+\frac{37}{3}=0(1)$

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{4}$

$(1)\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{4x+1}=(3x-4)^2-2x-\frac{1}{3}$. Đặt $3y-4=\sqrt{4x+1}, y\ge\frac{4}{3}$. Khi đó hệ phương trình thành:

$$\begin{cases}(3x-4)^2=2x+2y+1\\(3y-4)^2=4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\(x-y)(9x+9y-22)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\\left[\begin{array}{l}x=y\\9x+9y-22=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\(3x-4)^2=4x+1\end{cases}\\\begin{cases}9x+9y-22=0\\(3y-4)^2=4x+1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\9x^2-28x+15=0\end{cases}\\\begin{cases}y=-x+\dfrac{22}{9}\\9x^2-24x+\dfrac{91}{9}=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\x=\dfrac{14\pm\sqrt{61}}{9}\end{cases}\\\begin{cases}y=-x+\dfrac{22}{9}\\x=\dfrac{12\pm\sqrt{53}}{9}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\x=\dfrac{14\pm\sqrt{61}}{9}\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{12+\sqrt{53}}{9}\\y=\dfrac{10-\sqrt{53}}{9}\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{12-\sqrt{53}}{9}\\y=\dfrac{10+\sqrt{53}}{9}\end{cases}\end{array}\right.$$

Do $\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{4}\\y\ge\dfrac{4}{3}\end{cases}$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{14+\sqrt{61}}{9}\\x=\dfrac{12-\sqrt{53}}{9}\end{array}\right.$

Ví dụ 3) Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$

Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Phương trình viết lại: $\sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-x+2$ (1)

Đặt $2y-3=\sqrt[3]{3x-5}$. Kết hợp (1) ta có hệ: $\begin{cases}(2y-3)^3=3x-5(2)\\(2x-3)^3=x+2y-5(3)\end{cases}$

Lấy (3) trừ (2) theo vế ta được:

$$2(x-y)\left[(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2\right]=2(y-x)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0(4)\\(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1=0(5)\end{array}\right.$$

* Ta có (4) $\Leftrightarrow y=x$ thay vào (2) ta được:

$$(2x-3)^2=3x-5\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+54x-27=3x-5$$

$$\Leftrightarrow(x-2)(8x^2-20x+11)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$$

* Do $A^2+AB+B^2=\left(A+\frac{B}{2}\right)^2+\frac{3B^2}{4}\ge 0$ nên (5) không thể xảy ra.

Phương trình có 3 nghiệm $x=2; x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 4) Giải phương trình**:** $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{3x+4}+2x+3=(x+1)^3$

Đặt $y+1=\sqrt[3]{3x+4}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^3=2x+y+4\\(y+1)^3=3x+4\end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ, vế theo vế ta được:

$(x-y)\left[(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2\right]=y-x$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y$

Suy ra $x+1=\sqrt[3]{3x+4}\Leftrightarrow(x+1)^3=3x+4\Leftrightarrow x^3+3x^2=4\Leftrightarrow(x-1)(x+2)^2=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-2$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là x=1 và x=-2.

III. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

1. Dùng hằng đẳng thức :

- Từ những đánh giá bình phương : $A^2+B^2\ge 0$, ta xây dựng phương trình dạng $A^2+B^2=0$

Từ phương trình $\left(\sqrt{5x-1}-2x\right)^2+\left(\sqrt{9-5x}-2\right)^2+\sqrt{x-1}=0$ ta khai triển ra có phương trình :

$4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

2. Dùng bất đẳng thức

- Một số phương trình được tạo ra từ dấu bằng của bất đẳng thức: $\begin{cases}A\ge m\\B\le m\end{cases}$ nếu dấu bằng ở (1) và (2) cùng đạt được tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $A=B$

Ta có : $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\le 2$ Dấu bằng khi và chỉ khi $x=0$ và $\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\ge 2$, dấu bằng khi và chỉ khi x=0. Vậy ta có phương trình: $\sqrt{1-2008x}+\sqrt{1+2008x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{1+x}$

Đôi khi một số phương trình được tạo ra từ ý tưởng : $\begin{cases} A \geq f(x) \\ B \leq f(x) \end{cases}$ khi đó :

$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = f(x) \\ B = f(x) \end{cases}$

*) Nếu ta đoán trước được nghiệm thì việc dùng bất đẳng thức dễ dàng hơn, nhưng có nhiều bài nghiệm là vô tỉ việc đoán nghiệm không được, ta vẫn dùng bất đẳng thức để đánh giá được

Ví dụ 1) Giải phương trình: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$

Giải: Đk $x \geq 0$

Ta có : $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x}\right)^2 \leq \left[\left(2\sqrt{2}\right)^2 + x + 1\right]\left[\dfrac{1}{x+1} + \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right] = x + 9$

Dấu bằng $\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{7}$

Ví dụ 2) Giải phương trình : $13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} = 16$

Giải: Đk: $-1 \leq x \leq 1$

Biến đổi pt ta có : $x^2\left(13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2}\right)^2 = 256$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$\left(\sqrt{13}.\sqrt{13}.\sqrt{1-x^2} + 3.\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2}\right)^2 \leq (13+27)\left(13 - 13x^2 + 3 + 3x^2\right) = 40\left(16 - 10x^2\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $10x^2\left(16 - 10x^2\right) \leq \left(\dfrac{16}{2}\right)^2 = 64$

Dấu bằng $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3} \\ 10x^2 = 16 - 10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$

Ví dụ 3) giải phương trình: $x^{3`} - 3x^2 - 8x + 40 - 8\sqrt[4]{4x+4} = 0$

Pương trình đã cho có dạng: $x^{3`} - 3x^2 - 8x + 40 = 8\sqrt[4]{4x+4}$

Ta có : $8\sqrt[4]{4x+4} = 4\sqrt[4]{(x+1).4.4.4} \leq x + 1 + 4 + 4 + 4 = x + 13$ theo BĐT Côsi

Và $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - x - 13 = x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = (x-3)^2(x+3) \geq 0$ nên $VT \geq VP$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 3$. Thử lại x=3 TMĐK

Vậy x=3 là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4) Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(7x^2-x+4\right)$ (*)

Giải: ĐK: $x\geq 1\vee x\leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho hai bộ số $(1;1;-x)$ và $\left(\sqrt{3x^2-1};\sqrt{x^2-x};\sqrt{x^2+1}\right)$ ta có:

$VT(*)\leq\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(5x^2-x\right)}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$

Do $x\geq 1\vee x\leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $5x^2-x>0$

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$VP(*)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[5x^2-x+2\left(x^2+1\right)\right]\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{\left(5x^2-x\right)2\left(x^2+2\right)}=\sqrt{\left(5x^2-x\right)\left(x^2+2\right)}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$ và $x=\frac{4}{3}$

Từ đó ta có nghiệm của PT(*) là: $x=-1$

Ví dụ 5) Giải phương trình:

$$\sqrt{13x^2-6x+10}+\sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}}+\sqrt{17x^2-48x+36}=\frac{1}{2}\left(36x-8x^2-21\right)$$

Giải: Ta có:

$VT=\sqrt{(3x+1)^2+(2x-3)^2}+\sqrt{\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{x^2+(4x-6)^2}\geq|3x+1|+\left|2x-\frac{5}{2}\right|+|x|$

$\Rightarrow VT\geq\left|3x+1+2x-\frac{5}{2}+x\right|=\left|6x-\frac{3}{2}\right|\geq 6x-\frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{3}{2}$

Mặt khác: $VP=\frac{1}{2}\left[12x-3-2\left(4x^2-12x+9\right)\right]=\frac{1}{2}\left[12x-3-2(2x-3)^2\right]\leq\frac{1}{2}(12x-3)=6x-\frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{3}{2}$

Từ đó ta có nghiệm của phương trình (2) là: $x=\frac{3}{2}$

Ví dụ 6) Giải phương trình: $\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+4x=3\sqrt{2}-1$

Điều kiện: $x>-1$. Phương trình có dạng: $\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+4(x+1)=3\sqrt{2}+3$

Theo BĐT Cauchy ta có

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}+\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}+4(x+1)\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}.\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}.4(x+1)}=3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}=3\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}$$

$$=3\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi $4(x+1)=\dfrac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}\Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{2}}{4}$

3. Xây dựng bài toán từ tính chất cực trị hình học

3.1 Dùng tọa độ của véc tơ

❖ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Cho các véc tơ: $\vec{u}=\left(x_1;y_1\right)$, $\vec{v}=\left(x_2;y_2\right)$ khi đó ta có

✓ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\leq\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2+\left(y_1+y_2\right)^2}\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=k\geq 0$, chú ý tỉ số phải dương

✓ $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\alpha\leq\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\cos\alpha=1\Leftrightarrow u\uparrow\uparrow\vec{v}$

3.2 Sử dụng tính chất đặc biệt về tam giác

✓ Nếu tam giác ABC là tam giác đều , thì với mọi điểm M trên mặt phẳng tam giác, ta luôn có $MA+MB+MC\geq OA+OB+OC$ với O là tâm của đường tròn .Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $M\equiv O$.

✓ Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và điểm M tùy ý trong mặt mặt phẳng Thì MA+MB+MC nhỏ nhất khi điểm M nhìn các cạnh AB,BC,AC dưới cùng một góc 120^0

Bài tập

1) $\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1}+\sqrt{2x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1}=3$

2) $\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-10x+50}\right|=5$

IV. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

<u>Xây dựng phương trình vô tỉ dựa theo hàm đơn điệu như thế nào?</u>

➢ Dựa vào kết quả : " Nếu $y=f\left(t\right)$ là hàm đơn điệu thì $f\left(x\right)=f\left(t\right)\Leftrightarrow x=t$ " ta có thể xây dựng được những phương trình vô tỉ

Xuất phát từ hàm đơn điệu : $y=f\left(x\right)=2x^3+x^2+1$ mọi $x\geq 0$ ta xây dựng phương trình :

$f\left(x\right)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)\Leftrightarrow 2x^3+x^2+1=2\left(\sqrt{3x-1}\right)^3+\sqrt{(3x-1)^2}+1$, Rút gọn ta được phương trình

$$2x^3+x^2-3x+1=2\left(3x-1\right)\sqrt{3x-1}$$

Từ phương trình $f\left(x+1\right)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)$ thì bài toán sẽ khó hơn

$2x^3+7x^2+5x+4=2\left(3x-1\right)\sqrt{\left(3x-1\right)}$

* Để giải hai bài toán trên chúng ta có thể làm như sau :

Đặt $y=\sqrt{3x-1}$ khi đó ta có hệ : $\begin{cases}2x^3+7x^2+5x+4=2y^3\\3x-1=y^2\end{cases}$ cộng hai phương trình ta được:

$2\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)^2=2y^3+y^2$

Ví dụ 1) Giải phương trình : $\left(2x+1\right)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Giải:

PT $\Leftrightarrow \left(2x+1\right)\left(2+\sqrt{\left(2x+1\right)^2+3}\right)=\left(-3x\right)\left(2+\sqrt{\left(-3x\right)^2+3}\right)\Leftrightarrow f\left(2x+1\right)=f\left(-3x\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$ ta có $f'(t)=2+\sqrt{t^2+2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}$, là hàm đồng biến trên R,

Ta có $f\left(2x+1\right)=f\left(-3x\right)\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$ thử lại ta thấy thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 2) Giải phương trình: $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

Giải .

Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$, ta có hệ : $\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\7x^2+9x-4=y^3\end{cases}\Rightarrow y^3+y=\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=t^3+t$, ta có $f'(t)=3t^2+1$ là hàm đơn điệu tăng.

Từ phương trình $f\left(y\right)=f\left[\left(x+1\right)\right]\Leftrightarrow y=x+1\Leftrightarrow\left(x+1\right)=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Ví dụ 3) Giải phương trình : $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$

Giải:

Phương trình tương đương với $6x+1+\sqrt[3]{6x+1}=\left(2x\right)^3+2x\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{6x+1}\right)=f(2x)$

Xét $f(t)=t^3+t$ dễ thấy hàm số f(t) đồng biến

$\Rightarrow 2x=\sqrt[3]{6x+1}\Leftrightarrow 8x^3-6x-1=0\Leftrightarrow 2x(4x^2-3)=VT$

Nếu $\left|x\right|>1\Rightarrow VT>2$; . Suy ra mọi nghiệm phương trình đều thuộc $\left[-1;1\right]$ đặt x= cost $t\in\left[0;\pi\right]$

Phương trình trở thành $\cos 3t=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow t_1=\dfrac{\pi}{9};t_2=\dfrac{5\pi}{9};t_3=\dfrac{7\pi}{9}$

Vậy phương trình có 3 nghiệm

Ví dụ 4) Giải phương trình**:** $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$

Giải: Điều kiện $x\ge 8$

Phương trình đã cho có dạng

$$(x-1)+\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}=\left(\sqrt{x-8}+1\right)^3+\left(\sqrt{x-8}+1\right)^2-2\left(\sqrt{x-8}+1\right)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2-2t \Rightarrow f'(t)=3t^2+2t-2>0\forall t\in[1;+\infty)$ nên f(t) đồng biến

Phương trình có dạng: $f(\sqrt[3]{x-1})=f(\sqrt{x-8}+1)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}=\sqrt{x-8}+1\Leftrightarrow$

$\sqrt{u^3-7}=u-1\Leftrightarrow u=2\Rightarrow x=9$ với $(u=\sqrt[3]{x-1}\ge\sqrt[3]{7})$

Ví dụ 5) Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_2\left(x+2\right)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$

Giải: ĐK: $\begin{cases} x\in\left(-2;+\infty\right) \\ x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;+\infty\right)$

Khi đó pt viết lại là: $\log_2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}+x+2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left(2+\frac{1}{x}\right)^2$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2 t-2t+t^2,\forall t>0$. Ta có:

$$f'\left(t\right)=\frac{1}{t.\ln 2}+2t-2\ge 2\sqrt{\frac{1}{t.\ln 2}.2t}-2=2\sqrt{\frac{2}{\ln 2}}-2>0$$

Vậy hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, do đó:

$\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}$ (2)

Với điều kiện $x\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;+\infty\right)$, bình phương hai vế phương trình (2) ta được:

$$x+2=4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta thấy PT đã cho có hai nghiệm $x=-1$ và $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Ví dụ 6) Giải phương trình**:** $\left(x+5\right)\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}$

Điều kiện $x\ge-1$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\left(x+1\right)\sqrt{x+1}+4\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3\left(\sqrt{x+1}\right)^2+1}$

Đặt $u=\sqrt{x+1}\ge 0$ & $y=\sqrt[3]{3u^2+1}$, ta có hệ: $\begin{cases} u^2+4u+1=y(1) \\ 3u^2+1=y^3(2)\end{cases}$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được: $y^3+y=\left(u+1\right)^3+\left(u+1\right)(*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ dễ thấy f là hàm đồng biến trên R, do đó từ (*) suy ra $y=u+1$,

từ đó thay vào (1) ta được: $u^3+4u+1=u+1\Leftrightarrow u\left(u^2+3\right)=0\Leftrightarrow u=0$ suy ra x=-1.

Thử lại thấy x=-1 thỏa mãn phương trình. Vậy x=-1 là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 7) Giải phương trình: $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

Giải: ĐK: $x\ge\frac{1}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$ (*)

Ta thấy hàm số $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}>0$ và đồng biến còn hàm $y=\sqrt{2x-1}-3$ cũng là hàm đồng biến, tuy nhiên hàm này còn nhận giá trị âm nên ta chưa kết luận VT(*) là một hàm đồng biến. Nhưng ta thấy nếu

$\sqrt{2x-1}-3\le0\Rightarrow$ (*) vô nghiệm. Do đó ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $\sqrt{2x-1}-3\le0\Leftrightarrow x\le5\Rightarrow VT(*)<0<4\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

* Nếu $x>5,$ ta xét hàm số $f(x)=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$ có:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)+\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}}>0$$

(do $x>5,$). Nên f(x) là hàm đồng biến trên $(5;+\infty)$ và $f(7)=4\Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất $x=7$.

Phương pháp này cũng có thể sử dụng để giải bất phương trình.

Ví dụ 8) Giải bất phương trình: $3\sqrt{3-2x}+\frac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x\le6$

Giải: ĐK: $\frac{1}{2}<x\le\frac{3}{2}$

Ta có hàm $f(x)=3\sqrt{3-2x}+\frac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x$ là hàm liên tục trên $D=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ và

$f'(x)=\frac{-3}{\sqrt{3x-2}}-\frac{5}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}<0\Rightarrow$ f(x) là hàm đồng biến trên D, đồng thời f(1)=6

Do đó BPT $\Leftrightarrow f(x)\le f(1)\Leftrightarrow x\ge1$. Kết hợp với ĐK ta có nghiệm của BPT: $1\le x\le\frac{3}{2}$

Ví dụ 9) Giải BPT: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}<2\sqrt{3}+\sqrt{4-x}$

Giải: ĐK: $\begin{cases}2x^3+3x^2+6x+16\ge0\\4-x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow-2\le x\le4$.

Khi đó BPT: $\Leftrightarrow\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}<2\sqrt{3}\Leftrightarrow f(x)<2\sqrt{3}$ (*)

Trong đó: $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}$ là hàm liên tục trên $D[-2;4]$ và

$f'(x)=\frac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}>0$ nên f(x) là hàm đồng biến trên D

Mà ta lại có: $f(1)=2\sqrt{3}\Rightarrow(*)\Leftrightarrow f(x)<f(1)\Leftrightarrow x<1$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm BPT là: $-2\le x<1$

Ví dụ 10) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$

Giải: Với phương trình này chúng ta thực hiện cách giải như trên thì sẽ đi vào bế tắc.
Nhận xét đặc điểm các biểu thức dưới dấu căn ta thấy ở mỗi vế biểu thức dưới dấu căn hơn kém nhau 1.

Do đó nếu ta đặt: $u=\sqrt[3]{x+1}, v=\sqrt[3]{2x}$ thì phương trình đã cho thành:

$\sqrt[3]{u^3+1}+u=\sqrt[3]{v^3+1}+v \Leftrightarrow f(u)=f(v)$. Trong đó $f(t)=\sqrt[3]{t^3+1}+t$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}}+1>0$ nên f(t) là hàm đồng biến.

Do đó: $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow 2x^2=x+1\Leftrightarrow x=1; x=-\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=1; x=-\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 11) Giải phương trình sau: $2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}+3x^2-30x+71=0$

Giải: Điều kiện: $1\le x\le 5$. PT được viết lại: $2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}=-3x^2+30x-71$

Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}$ với $1\le x\le 5$. Ta có

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{5-x}-3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{x-1}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{29}{13}; f\left(\frac{29}{13}\right)=2\sqrt{13}; f(5)=4; f(1)=6$$

Suy ra $f(x)\ge 4$ với mọi $1\le x\le 5$.

Ta có $-3x^2+30x-71=-3(x-5)^2+4\le 4$

Khi $x=5\Leftrightarrow VT=VP$

Vậy x=5 là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 12) Giải phương trình sau: $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

Giải: Điều kiện: $-2\le x\le\dfrac{22}{3}$.

Phương trình có dạng:

$$4(\sqrt{x+2}-2)+(\sqrt{22-3x}-4)=x^2-4\Leftrightarrow (x-2)\left(x+2-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=x+2-\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0\end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x)=x+2-\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}$. Ta có

$$f'(x)=1+\frac{2}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)^2}+\frac{9}{2\sqrt{22-3x}\left(\sqrt{22-3x}+4\right)^2}>0\forall x\in\left(-2;\frac{22}{3}\right)$$

Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]$. Ta có $f(-1)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=-1$

KL: nghiệm của phương trình là: x=-1 hoặc x=2

Nhận xét: Khi gặp phương trình mà ta có thể biến đổi về dạng: $f\left(u\right)=f\left(v\right)$, thì ta có thể xét hàm số y=f(t), nếu hàm số này luôn liên tục và đơn điệu thì $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v$.

Ngoài ra trong một số bài toán ta cần sử dụng tính chất sau: Nếu $y=f^{n}(x)$ là hàm số liên tục trên (a;b) và $f^{(n)}(x)=0$ có tối đa k nghiệm thì phương trình: $f^{(n-1)}(x)=0$ có tối đa k+1 nghiệm (Ký hiệu $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $y=f(x)$)

Ví dụ 13) Giải phương trình sau: $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^2-x+1$

Giải: Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}-x^2+x-1; x\in\left[-2;3\right]$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}-2x+1; f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{\left(x+2\right)^3}}-\frac{1}{4\sqrt{\left(3-x\right)^3}}-2<0$ với mọi $x\in(-2;3)$

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm suy ra $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm

Ta có $f(-1)=f(2)=0$

Nên phương trình đã cho có 2 nghiệm là x=-1;x=2

V. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

1. Một số kiến thức cơ bản:

- ✓ **Nếu** $\left|x\right|\le 1$ thì có một số t với $t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{-\pi}{2}\right]$ sao cho : $\sin t=x$ và một số y với $y\in\left[0;\pi\right]$ sao cho $x=\cos y$
- ✓ **Nếu** $0\le x\le 1$ thì có một số t với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho : $\sin t=x$ và một số y với $y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $x=\cos y$
- ✓ Với mỗi số thực x có $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho : $x=\tan t$
- ✓ Nếu : x, y là hai số thực thỏa: $x^2+y^2=1$, thì có một số t với $0\le t\le 2\pi$, sao cho $x=\sin t, y=\cos t$

Từ đó chúng ta có phương pháp giải toán :

- ➢ Nếu : $\left|x\right|\le 1$ thì đặt $\sin t=x$ với $t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{-\pi}{2}\right]$ hoặc $x=\cos y$ với $y\in\left[0;\pi\right]$
- ➢ **Nếu** $0\le x\le 1$ thì đặt $\sin t=x$, với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x=\cos y$, với $y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- ➢ Nếu : x, y là hai số thực thỏa: $x^2+y^2=1$, thì đặt $x=\sin t, y=\cos t$ với $0\le t\le 2\pi$

- Nếu $|x| \geq a$, ta có thể đặt : $x = \frac{a}{\sin t}$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tương tự cho trường hợp khác
- x là số thực bất kỳ thi đặt : $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Tại sao lại phải đặt điều kiện cho t như vậy ?

Chúng ta biết rằng khi đặt điều kiện $x = f(t)$ thì phải đảm bảo với mỗi x có duy nhất một t, và điều kiện trên để đảm bào điều này . **(xem lại vòng tròn lượng giác)**

2. Xây dựng phương trình vô tỉ bằng phương pháp lượng giác như thế nào ?

Từ công phương trình lượng giác đơn giản: $\cos 3t = \sin t$, ta có thể tạo ra được phương trình vô tỉ

Chú ý : $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ ta có phương trình vô tỉ: $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$ (1)

Nếu thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta lại có phương trình : $4 - 3x^2 = x^2\sqrt{x^2 - 1}$ (2)

Nếu thay x trong phương trình (1) bởi : (x-1) ta sẽ có phương trình vố tỉ khó:

$4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x - x^2}$ (3)

Việc giải phương trình (2) và (3) không đơn giản chút nào ?

Tương tự như vậy từ công thức sin 3x, sin 4x,…….hãy xây dựng những phương trình vô tỉ theo kiểu lượng giác .

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1) Giải phương trình sau : $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1 - x^2}{3}}$

Giải:

Điều kiện : $|x| \leq 1$

Với $x \in [-1; 0]$: thì $\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \leq 0$ (ptvn)

$x \in [0;1]$ ta đặt : $x = \cos t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó phương trình trở thành:

$2\sqrt{6}\cos x\left(1 + \frac{1}{2}\sin t\right) = 2 + \sin t \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{6}}$ vậy phương trình có nghiệm : $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Ví dụ 2)

Giải các phương trình sau :

1) $\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{1 + 2x} = \sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}} + \sqrt{\frac{1 + 2x}{1 - 2x}}$ HD: $\tan x = \sqrt{\frac{1 + 2\cos x}{1 - 2\cos x}}$

2) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x\left(1 + 2\sqrt{1 - x^2}\right)$ Đs: $x = \frac{1}{2}$

3) $x^3 - 3x = \sqrt{x + 2}$ HD: chứng minh $|x| > 2$ vô nghiệm

Ví dụ 3)

Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{6x+1} = 2x$

Giải: Lập phương 2 vế ta được: $8x^3 - 6x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$

Xét : $|x| \le 1$, đặt $x = \cos t, t \in [0;\pi]$. Khi đó ta được $S = \left\{\cos\frac{\pi}{9};\cos\frac{5\pi}{9};\cos\frac{7\pi}{9}\right\}$ mà phương trình bậc 3 có tối đa 3 nghiệm vậy đó cũng chính là tập nghiệm của phương trình.

Ví dụ 4) Giải phương trình $x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

Giải: đk: $|x| > 1$, ta có thể đặt $x = \frac{1}{\sin t}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó ptt: $\frac{1}{\sin^2 x}(1+\cot t) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \sin 2t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Phương trình có nghiệm : $x = -\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$

Ví dụ 5)

Giải phương trình : $\sqrt{x^2+1} = \frac{x^2+1}{2x} + \frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

Giải: đk $x \ne 0, x \ne \pm 1$

Ta có thể đặt : $x = \tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó pttt. $2\sin t\cos 2t + \cos 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin t\left(1-\sin t - 2\sin^2 t\right) = 0$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 6) Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{4x^2-1}$

Giải: Từ điều kiện $|x| \le 1, x \ne \frac{1}{2}$, và $x \ne -\frac{1}{2}$, ta đặt $x = \cos t, t \in [0;\pi], x \ne \frac{\pi}{3}, x \ne \frac{2\pi}{3}$

Thay vào pt đã cho ta được:

$$\sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{\cos t}{4\cos^2 t - 1} \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2 t}\left(4\cos^2 t - 1\right) = \cos t$$

$$\Leftrightarrow \sin t\left(4 - 4\sin^2 t - 1\right) = \cos t \Leftrightarrow \sin t\left(3-\right)4\sin^2 t = \cos t$$

$$\Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t = \cos x \Leftrightarrow \sin 3t = \cos t \Leftrightarrow \sin 3t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ ta nhận được các nghiệm $t_1 = \frac{\pi}{8}, t_2 = \frac{5\pi}{8}, t_3 = \frac{\pi}{4}$ nghiệm của pt đã cho là: $\cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{5\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{4}$.

BÀI TẬP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

BIÊN SOẠN GV NGUYỄN TRUNG KIÊN 0988844088

1) $x^2 + 3x + 1 = \left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}$

2) $\sqrt{4 - 3\sqrt{10-3x}} = x - 2$

3) $2\sqrt{\left(2-x\right)\left(5-x\right)} = x + \sqrt{\left(2-x\right)\left(10-x\right)}$

4) $\sqrt[3]{x^2+4} = \sqrt{x-1} + 2x - 3$

5) $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt{3x^3-2} = 3x - 2$

6) $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$

7) $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$

8) $\sqrt{2x^2+16x+18} + \sqrt{x^2-1} = 2x + 4$

9) $\sqrt{x^2+15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2+8}$

10) $15x - 2x^2 - 5 = \sqrt{2x^2 - 15x + 11}$

11) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$

12) $\sqrt{(1+x)(2-x)} = 1 + 2x - 2x^2$

13) $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$

14) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$

15) $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$

16) $2\sqrt[n]{(1+x)^2} + 3\sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0$

17) $x = (2004 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{1-\sqrt{x}})^2$

18) $(x+3\sqrt{x}+2)(x+9\sqrt{x}+18)=168x$

18) $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=3$

19) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

20) $4x^2-13x+5+\sqrt{3x+1}=0$

21) $\frac{15}{2}\left(30x^2-4x\right)=2004\left(\sqrt{30060x+1}+1\right)$

22) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

23) $2x^4+8=4\sqrt{4+x^4}+4\sqrt{x^4-4}$

24) $x^{3`}-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

25) $\sqrt{8+x^3}+\sqrt{64-x^3}=x^4-8x^2+28$

26) $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

27) $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2-2x^2}$

28) $2x^2-2x\sqrt{30}-\sqrt{2007}.\sqrt{30+4x\sqrt{2007}}=\sqrt{30}.\sqrt{2007}$

29) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

30) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$

31) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=2x+1$

32) $\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+3}$

33) $x^2+3x+1=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}$

34) $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$

35) $2\sqrt{\left(2-x\right)\left(5-x\right)}=x+\sqrt{\left(2-x\right)\left(10-x\right)}$

36) $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

37) $\sqrt{x^2+x+2}=\frac{3x^2+3x+2}{3x+1}$

38) $12\sqrt{x}+2\sqrt{x-1}=3x+9$

39) $\sqrt[4]{x+1}+\sqrt{x}=1+\sqrt[4]{x^3+x^2}$

40) $4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$

41) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$

42) $4\left(2x+4\right)+16\sqrt{2\left(4-x^2\right)}+16\left(2-x\right)=9x^2+16$

43) $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

44) $2\sqrt[3]{(1+x)^2}+3\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=0$

45) $2008x^2-4x+3=2007\sqrt{4x-3}$

46) $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

47) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

48) $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

49) $2x+\frac{x-1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+3\sqrt{x-\frac{1}{x}}$

50) $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

51) $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$

52) $\frac{15}{2}\left(30x^2-4x\right)=2004\left(\sqrt{30060x+1}+1\right)$

53) $\sqrt{\frac{4x+9}{28}}=7x^2+7x$

54) $4x^2-4x-10=\sqrt{8x^2-6x-10}$

55) $18x^2-13x+2=\sqrt{3(81x^4-108x^3+56x^2-12x+1)}$

56) $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$

57) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{12-8x}{\sqrt{9x^2+16}}$

58) $3x^3-13x^2+30x-4=\sqrt{(6x+2)(3x-4)^3}$

59) $\sqrt{1-x}=\frac{2x+x^2}{1+x^2}$

60) $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$

61) $(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{-4x^2+16x-15}$

HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ BÀI PT VÔ TỶ KHÓ

BIÊN SOẠN: GV NGUYỄN TRUNG KIÊN 0988844088-01256813579

Câu 1) $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

Đặt $\sqrt{x^2+1}=t\Rightarrow x^2=t^2-1\quad (t>0)$

$\Leftrightarrow t^2 - 1 + 3x + 1 = \left(x+3\right)t \Leftrightarrow t^2 \left(x+3\right)t + 3x = 0$

$$\Delta = x^2 + 6x + 9 - 12x = \left(x-3\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{x+3+x-3}{2} = x \\ t = \dfrac{x+3+3-x}{2} = 2 \end{array}\right.$$

TH1: $t = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

TH2: $t = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = x$ vô nghiệm

Kết luận: $x = \pm 1$

Câu 2) $\sqrt{4 - 3\sqrt{10-3x}} = x - 2$

Đặt $\sqrt{10-3x} = y \Rightarrow x = \dfrac{10-y^2}{3}$ thay vào ta được:

$3\sqrt{4-3y} = 4 - y^2 \Leftrightarrow 36 - 27y = y^4 - 8y^2 + 16$

$\Leftrightarrow y^4 - 8y^2 + 27y - 20 = 0$

$$\left(y^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(3y - \frac{9}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(y^2 - 3y + 5\right)\left(y^2 + 3y - 4\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1\left(TM\right) \\ y = -4 loai \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \sqrt{10-3x} = 1 \Rightarrow x = 3$

Câu 4) $\sqrt[3]{x^2+4} = \sqrt{x-1} + 2x - 3$

$PT \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+4} - 2 = \sqrt{x-1} - 1 + (2x-4)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2} + \sqrt[3]{x^2+4} + 4} = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2} + \sqrt[3]{x^2+4} + 4} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} - 2 = 0 \end{array}\right.$$

Từ điều kiện $x \geq 1$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2} > x \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2} + \sqrt[3]{\left(x^2+4\right)} + 4} < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2} + \sqrt[3]{\left(x^2+4\right)} + 4} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - 2 < 0$$

KL: x=2 là nghiệm duy nhất

Câu 5) $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt{3x^3-2} = 3x - 2$

Điều kiện $x > \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

$PT \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}-1=3x-3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}+\dfrac{3x^3-3}{\sqrt{3x^3-2}+1}=3(x-1)$

$\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{(x-1)^2}\left(\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{3x^3-2}}-1\right)\right)=0$. Ta chứng minh $\left(\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{3x^3-2}}-1\right)$>0. Thật vậy BPT tương đương với $x^2+x>\sqrt{3x^3-2} \Leftrightarrow x^4+2x^3-2x^2+2>0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2+2x^3+1>0$

KL: x=1 là nghiệm duy nhất.

Câu 6) $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}$

Dễ thấy điều kiện $x \ge 1$ do vế trái luôn dương.

Ta có $3\sqrt[3]{4x-4}$ =3. $\sqrt[3]{2.2(x-1)} \le 2+2+x-1=x+3$ (theo bất đẳng thức Cauchy)

Mặt khác ta lại có: $2x^2-11x+21-(x+3)=2\left(x-3\right)^2 \ge 0 \Rightarrow 2x^2-11x+21 \ge (x+3) \Rightarrow x=3$ là nghiệm duy nhất. Thử lại thỏa mãn.

Câu 7) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Cách 1: PT $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}}=\frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+4\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}}\right]=0$$

$\Rightarrow$ x=2 là nghiệm duy nhất.

Cách 2: Đặt $\sqrt{2x^2-1}=a; \sqrt{x^2-3x-2}=b; \sqrt{2x^2+2x+3=c}; \sqrt{x^2-x+2}=d$

Ta có: $\begin{cases} a+b=c+d \\ a^2+b^2=c^2+d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=c+d \\ a-b=c-d \end{cases} \Rightarrow a=c$

$2x^2-1=2x^2+2x+3 \Rightarrow x=-2$ thử lại thỏa mãn.

Câu 8) $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=2x+4-\sqrt{2x^2+16x+18}=\frac{2\left(x^2-1\right)}{2x+4\sqrt{2x^2+16x+18}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(1-\frac{2\sqrt{x^2-1}}{2x+4\sqrt{2x^2+16x+18}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1\left(TM\right) \\ 2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}=2\sqrt{x^2-1}\left(*\right) \end{array}\right.$$

Kết hợp (*) với phương trình ban đầu ta được:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+1 \\ \sqrt{2x^2+16x+18}+2x+4=2\sqrt{x^2-1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

KL: $x=\pm 1$

Câu 9) $\sqrt{x^2+15}-4=\sqrt{x^2+8}-3+3x-3$

Từ giả thiết suy ra x>2/3

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}+3(x-1) \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-3\right)=0$$

Vì $\sqrt{x^2+15}>x \Rightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}<1 \Rightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất.

Câu 17) $x=\left(2004+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

Đặt $y=\sqrt{1-\sqrt{x}};\sqrt{x}=1-y^2 \Rightarrow x=\left(1-y^2\right)^2$

Do $y \ge 0 \,\&\, y \le 1 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=0$ là nghiệm duy nhất

Câu 18) $\left(x+3\sqrt{x}+2\right)\left(x+9\sqrt{x}+18\right)=168x$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+6\right)=168x$$

$$\Leftrightarrow \left(x+7\sqrt{x}+6\right)\left(x+5\sqrt{x}+6\right)=168x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+7+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+5+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)=168$$

Đặt $\sqrt{x}+\dfrac{6}{\sqrt{x}}+5=t>0 \Rightarrow t\left(t+2\right)=168 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=12 \\ t=-14(loai) \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+5=12 \Rightarrow \sqrt{x}=y$$

$$\Leftrightarrow y^2-7y+6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=6 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=36 \end{array}\right.(TM)$$

Câu 20) $4x^2-13x+5+\sqrt{3x+1}=0 \quad \Leftrightarrow 4x^2-13x+5=-\sqrt{3x+1}$

Đặt $\sqrt{3x+1}=-\left(2y-3\right)$

có hệ $\begin{cases} \left(2x-3\right)^2=2y+x+1 \\ \left(2y-3\right)^2=3x+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(x-y\right)\left(2x+2y-5\right)=0$$

Với $x=y \Rightarrow x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$; với $2x+2y-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}$

Câu 21) $\frac{15}{2}\left(30x^2-4x\right)=2004\left(\sqrt{30060x+1}+1\right)$

$\Leftrightarrow\left(15^2x^2-30x\right)=2004\left(\sqrt{30060x+1}+1\right)\Leftrightarrow\left(15x-1\right)^2=2004\sqrt{30060x+1}+2005$

Đặt $\sqrt{30060x+1}=15y-1\Leftrightarrow\begin{cases}\left(15x-1\right)^2=2004\left(15y-1\right)+2005\\\left(15y-1\right)^2=30060x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(15x-1\right)^2=30060y-2004+2005\\\left(15y-1\right)^2=30060x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(15x-1\right)^2=30060y+1\\\left(15y-1\right)^2=30060x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left(15x+15y-2\right)\left(15x-15y\right)=30060\left(y-x\right)\Leftrightarrow15\left(y-x\right)\left[15x+15y-2+2004\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\x+y=-\frac{2002}{15}\end{array}\right.$ thay vào ta tìm được x.

Câu 23) $2x^4+8=4\sqrt{4+x^4}+4\sqrt{x^4-4}$

Ta có $\left(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{x^4-4}\right)^2\le2.2x^4=4x^4$(Bu nhi a copxky)

$\Rightarrow VP\le4.2x^2=8x^2;VT=2x^4+8-8x^2=2\left(x^2-2\right)^2\ge0$

$\Rightarrow VT\ge VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2-2=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Câu 24) $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$; Điều kiện $x\ge-1$

$8\sqrt[4]{4x+4}=\sqrt[4]{16.16.16.\left(4x+4\right)}\le\frac{4x+4+16+16+16}{4}=x+13$ (bất đẳng thức Cauchi 4 số)

Ta lại có $x^3-3x^2-8x+40-\left(x+13\right)=\left(x-3\right)^2\left(x+3\right)\ge0$

$\Rightarrow VT\ge VP$, dấu bằng xảy ra khi x=3. Vậy x=3 là nghiệm duy nhất.

Câu 25) $\sqrt{8+x^3}+\sqrt{64-x^3}=x^4-8x^2+28$. Điều kiện $-2\le x\le4$

$VT^2=\left(\sqrt{8+x^3}+\sqrt{64-x^3}\right)^2\le2\left(8+64\right)=144$

Theo Bunhiacopxki $VT\le12$; $VP=x^4-8x^2+28=\left(x-4\right)^2+12\ge12$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x=4. vậy x=4 là nghiệm.

Câu 28) $\sqrt{x^2+9x-1}+x\sqrt{11-3x}=2x+3$

ĐK: $\frac{\sqrt{85}-9}{2}\le x\le\frac{11}{3}$

$\sqrt{x^2+9x-1}-\left(x+3\right)+x\left(\sqrt{11-3x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow(3x-10)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+9x-1}+x+3}-\frac{x}{\sqrt{11-3x}-1}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{10}{3}\\x^2+3x+x\sqrt{x^2+9x-1}=\sqrt{11-3x}-1\left(2\right)\end{array}\right.$

VP(2) nghịch biến, VT đồng biến nên phương trình có nghiệm duy nhất.

KL: $x=\frac{10}{3};\frac{2}{3}$

Câu 29) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x}\right)^3-\left(\sqrt{1+x}\right)^3=2+\sqrt{1-x^2}$

Đặt $\sqrt{1-x}=a;\sqrt{1+x}=b$

$$\begin{cases}\sqrt{1+ab}\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^2+b^2+ab\\ a^2+b^2=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a^2+ab+b^2\right)\left[\left(\sqrt{1+ab}\right)\left(a-b\right)-1\right]=0\\ a^2+b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2+ab=0\\ a^2+b^2=2\end{cases}(1)\\ \begin{cases}\sqrt{1+ab}\left(a-b\right)-1=0\\ a^2+b^2=2\end{cases}(2)\end{array}\right.$$

(1) vô nghiệm

(2) $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2\\ ab=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}\\ b=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 45) $2008x^2-4x+3=2007\sqrt{4x-3}$. Đặt

$2008x^2-t^2=2007.t\Leftrightarrow 2008x^2-2008t^2+2007t^2-2007t$

$\Rightarrow t=\sqrt{4x+3}\Rightarrow x=t^2+3$

$2008\frac{\left(t^2+3\right)^2}{16}-t^2=2007t\Leftrightarrow 2008\left(t^4+6t^2+9\right)-16t^2=32112t$

$2008t^4+12032t^2-32112t+18072=0$

Câu 46) $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{6x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 6x=\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)(*)\end{array}\right.$$

Vì $8\sqrt{2x^2+1}\geq 8;\sqrt{2x^2+1}\geq 2\Rightarrow Vp\geq\left(9+3x\right).2=18+6x>6x$ Nên (*) vô nghiệm

KL:x=0

Ngoài ra ta cũng có thể giải (*) theo phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Câu 53) $\sqrt{\frac{4x+9}{28}}=7x^2+7x$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1}{7}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}}$ Đặt $u=x+\frac{1}{2};v=\sqrt{\frac{1}{7}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{7}u+\frac{1}{4}}$

Ta có hệ sau: $\begin{cases} u^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{7}v \\ v^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{7}u \end{cases}$

Câu 55) $18x^2-13x+2=\sqrt{3\left(81x^4-108x^3+56x^2-12x+1\right)}$

$\Leftrightarrow 2\left(3x-1\right)^2-x=\sqrt{3\left(3x-1\right)^4+6x^2}$

Đặt $\left(3x-1\right)^2=u\Rightarrow PT:2u-x=\sqrt{3u^2+6x^2}\Leftrightarrow 5x^2+4ux-u^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-u \\ x=\frac{u}{5} \end{array}\right.$

Câu 57) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+6}}$

$\Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}=\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ 2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}(*) \end{array}\right.$

$(*)\Leftrightarrow 48-8x+16\sqrt{8-2x^2}=9x^2+16\Leftrightarrow 4(8-2x^2)+16\sqrt{8-2x^2}-x^2-8x=0$

$t=2\sqrt{8-2x^2};t\ge 0\Rightarrow PT:t^2+8t-8x^2-8x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=-x-8 \end{array}\right.$

Giải hai trường hợp ta có các nghiệm của phương trình là: $x=\frac{2}{3};x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Câu 58) $3x^3-13x^2+30x-4=\sqrt{\left(6x+2\right)\left(3x-4\right)^3}$

Điều kiện: $x\ge \frac{4}{3}\vee x\le -\frac{1}{3}$. Ta có $3x^3-13x^2+30x-4=2(6x+2)+\left(x^2-3x+2\right)(3x-4)$

Nếu $x\le -\frac{1}{3};VT<0<VP\Rightarrow PTVN$

Nếu $x\ge \frac{4}{3};x=\frac{4}{3}$ không là nghiệm nên ta chia 2 vế cho 3x-4 ta được

$2\frac{6x+2}{3x-4}-(3x-4)\sqrt{\frac{6x+2}{3x-4}}+x^2-3x+2=0;t=\sqrt{\frac{6x+2}{3x-4}}\Rightarrow 2t^2-(3x-4)t+x^2-3x+2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = x-1 \\ t = \dfrac{x-2}{2} \end{array}\right.$$ Từ đó giải hai TH ta được nghiệm $x = 3$ và nghiệm gần đúng của phương trình bậc3 là $x \approx 5,362870693$

Câu 59) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$; ĐK: $0 < x \le 1$

Nhẩm nghiệm: $x = \dfrac{1}{2}$. Ta phân tích tạo ra $(2x-1)$

$$\Leftrightarrow (1+x^2)\sqrt{1-x} = (2x+x^2)\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{1-x}-2x\sqrt{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} + \frac{1-x-4x^3}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} + \frac{(1-2x)(2x^2+x+1)}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}} = 0$$

$x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất.

Câu 60) ĐK: $0 \le x \le 2$

Đặt $t = (x-1)^2; t \in [0;1]$

$$\sqrt{1+\sqrt{1-t}} + \sqrt{1-\sqrt{1-t}} = 2t^2(2t-1) \Rightarrow t \ge \frac{1}{2}$$

Bp hai vế rút gọn ta được:

$$1+\sqrt{t} = 2t^4(2t-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} = 2(2t-1)$$

Vì $t \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{t^4} + \dfrac{1}{t^3\sqrt{t}} \ge 2 \ge 2(2t-1) \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 2$

MỘT SỐ BÀI TẬP CHỌN LỌC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

GV : NGUYỄN TRUNG KIÊN 0988844088

1) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \dfrac{x+3}{5}$

2) $2\sqrt{3x+3} = x^2 + 9x + 20$

3) $\sqrt{2x^2+16x+18} + \sqrt{x^2-1} = 2x+4$

4) $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

5) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$

6) $\sqrt{2x^2+23} = 4x - 2 + \sqrt{2x^2+7}$

7) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$

8) $x^2 + \sqrt[3]{x^4-x^2} = 2x+1$

9) $\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 3x$

10) $3x^2+7x+8-(4x+2)\sqrt{x+8}=0$

11) $\dfrac{x+2+x\sqrt{2x+1}}{x+\sqrt{2x+1}}=\sqrt{x+2}$

12)
$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$

13) $10x^2+3x+1=\sqrt{x^2+3}(1+6x)$

14) $3x^2+2x+3=(3x+1)\sqrt{x^2+3}$

15) $15x^2+2(x+1)\sqrt{x+2}+5x-2=0$

16)
$2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

17) $x^3+3x^2+4=4x\sqrt{x+3}$

18) $\sqrt{2x^2+2x}+(x-1)\sqrt{x}=x+1$

19) $2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

20) $2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}$

21) $x^3+6x^2-2x+3=(5x-1)\sqrt{x^3+3}$

22) $2x^2-7x-3+3\sqrt{x^3+1}=0$ x=0;2

23) $2x^2-x+7-3\sqrt{x^3+2x+3}=0$

24) $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$

25)
$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$

26) $3x^2-2x-2=\dfrac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3+3x^2+4x+2}$

27)
$\sqrt{5x^2+14x+9}-5\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x-20}=0$

28) $9x^2+12x-2=\sqrt{3x+8}$

29) $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$

30) $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

31) $2x^3+7x^2+5x+4=2(3x-1)\sqrt{3x-1}$

32) $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$

33) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

34) $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$

35) $\left(x+\dfrac{5-x}{\sqrt{x}+1}\right)^2=\dfrac{-192\left(\sqrt{x}+1\right)}{5\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$

36) $25x+9\sqrt{9x^2-4}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{18x}{x^2+1}$

37) $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2x(1-x^2)}$

38)
$x^2\sqrt{x}+\left(x-5\right)^2\sqrt{5-x}=11(\sqrt{x}+\sqrt{5-x})$

39) $\dfrac{x(1+x^2)}{1-x^2}-3\sqrt{1-x^2}=0$

40) $-2x^3+10x^2-17y+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}$

41) $4\sqrt{1-x}-6=x-3\sqrt{1-x^2}+5\sqrt{1+x}$

42) $4+2\sqrt{1-x}=-3x+5\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}$

43) $(x+4)^2-6\sqrt{x^3+3x}=13$

44) $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$

45) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$

46) $x^2+x-1=\left(x+2\right)\sqrt{x^2-2x+2}$

47) $4x^2-11x+10=\left(x-1\right)\sqrt{2x^2-6x+2}$

48)
$\left(x^2-6x+11\right)\sqrt{x^2-x+1}=2\left(x^2-4x+7\right)\sqrt{x-2}$

49) $2x+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{1-x^2}$

50) $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$

51) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$

52) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x}\right)^3-\left(\sqrt{1+x}\right)^3$
$=2+\sqrt{1-x^2}$

53) $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

54) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+6}}$

55) $\left(4x-1\right)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

56) $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

57) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}$

58) $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

59) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

60) $4x^2-2\sqrt{2}x+4=\sqrt{x^4+1}$

61) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

62) $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5$

ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP CHỌN LỌC

1) ĐS: $x=2$
2) ĐS:VN
3) ĐS:x=1;-1
4) ĐS: $x=\frac{2}{3};2$
5) ĐS: $x=3$
6) ĐS: $x=1$
7) ĐS: $x=\frac{1}{2}$
8)
ĐS: $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
9)
10) ĐS; x=1
11) ĐS:x=1;x=2
12)
ĐS: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2};x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
16) ĐS: $x=\frac{-1}{2}$
17) ĐS:x=1
18) ĐS:x=1
19) ĐS: $x=\pm\sqrt{3}$
20) ĐS:x=1; $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2};x=4+3\sqrt{2}$
21) ĐS: $x=1;x=\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$
22) x=0;2
24) ĐS: $x=3\pm\sqrt{13}$

25)ĐS: $x=\frac{23\pm\sqrt{341}}{2}$
26) ĐS: $x=2;-\frac{2}{3}$
27) ĐS: $x=8;x=\frac{5+\sqrt{61}}{2}$
28) ĐS: $x=\frac{1}{3};x=\frac{-5-\sqrt{21}}{6}$
29) ĐS: $x=1;-2$
30) ĐS: $x=5;\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
31) ĐS:x=1
32) ĐS:x=0;-24/25
33) ĐS:x=1
34) ĐS: x=2
35) ĐS: x=9
36) ĐS: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
37) ĐS: $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$
38) ĐS: x=1;4
39) ĐS $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$
41) ĐS: $x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$
42) ĐS: $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

44) ĐS: $x = 3$ & $x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$

45) ĐS: x=3

46) ĐS: $\left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \end{array}\right.$

47) ĐS: VN

48) ĐS: $x = 5 \pm \sqrt{6}$

51) ĐS: x=1

52) ĐS: $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

53) ĐS: x=0

54) ĐS: $x = \frac{2}{3}; x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

49) ĐS: $x = 0; x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

50) ĐS: x=2

55)

56)

57) ĐS: $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG KỲ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

BIÊN SOẠN: GV NGUYỄN TRUNG KIÊN 0988844088

Phần một: Các dạng hệ cơ bản

I . **Hệ phương trình đối xứng**.

1.Phương trình đối xứng loại 1.

a)Định nghĩa

Một hệ phương trình ẩn x, y được gọi là hệ phương trình đối xứng loại 1 nếu mỗi phương trình ta đổi vai trò của x, y cho nhau thì phương trình đó không đổi

b) Tính chất

Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm thì hệ (y_0, x_0) cũng là nghiệm

c) Cách giải $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$

Ta biến đổi đưa hệ đã cho (1) về hệ 2 ẩn S, P (2) (x;y) là nghiệm của (1) khi và chỉ khi (S,P) là 1 nghiệmc của (2) thoải mãn điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$ với mỗi (S;P) tìm được ta có (x;y) là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

Giả sử phương trình có 2 nghiệm là X_1, X_2.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $X_1 \neq X_2$ nên hệ (1) có 2 nghiệm phân biệt $(X_1; X_2)$; $(X_2; X_1)$

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $X_1 = X_2$ nên hệ có nghiệm duy nhất $(X_1; X_2)$.

+ Hệ có ít nhất một nghiệm thoả mãn $x \geq 0$ khi và chỉ khi hệ (2) có ít nhất 1 nghiệm (S;P) thoả mãn.

$$\begin{cases}\Delta = S^2 - 4P \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0\end{cases}$$

VD 1: Giải hệ phương trình

$\begin{cases}x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x + y + xy = 5\end{cases}$ Hệ có nghiệm là (1;2), (2;1)

VD2: Định m để hệ sau có nghiệm

$\begin{cases}x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m\end{cases}$ ĐS: $0 \leq m \leq 8$

Ví dụ 1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x + y + 2xy = 2 \\ x^3 + y^3 = 8\end{cases}$

Giải: Đặt $S = x + y, P = xy$. Khi đó hệ thành:

$$\begin{cases}S + 2P = 2 \\ S\left(S^2 - 3P\right) = 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}P = \dfrac{2 - S}{2} \\ S\left(S^2 - \dfrac{6 - 3S}{2}\right) = 8\end{cases}$$

$\Rightarrow 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0 \Leftrightarrow (S - 2)\left(2S^2 + 7S + 8\right) = 0 \Leftrightarrow S = 2 \Rightarrow P = 0$

$\Rightarrow x, y$ là nghiệm của pt $X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X = 0, X = 2$

vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases}x = 0 \\ y = 2\end{cases} \vee \begin{cases}x = 2 \\ y = 0\end{cases}$

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^3 + y^3 = 19 \\ (x + y)(8 + xy) = 2\end{cases}$

Giải: Đặt $S = x + y, P = xy$. Khi đó hệ thành:

$$\begin{cases}S\left(S^2 - 3P\right) = 19 \\ S(8 + P) = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}SP = -8S \\ S^3 - 3(2 - 8S) = 19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}SP = -8S \\ S^3 + 24S - 25 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S = 1 \\ P = -6\end{cases}$$

$\Rightarrow x, y$ là nghiệm của pt: $X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 3; X_2 = -2$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm $(x; y) = (-2; 3), (3; -2)$

Chú ý: Nếu trong hệ phương trình chứa căn thức thì ta có thể đặt ẩn phụ để làm đơn giản hình thức bài toán. Khi đặt ẩn phụ cần xác định miền giá trị của ẩn phụ.

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2(x + y) = 3\left(\sqrt[3]{x^2 y} + \sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6\end{cases}$

giải: Đặt $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y}$. Khi đó hệ thành: $\begin{cases}2\left(a^3 + b^3\right) = 3\left(a^2 b + b^2 a\right) \\ a + b = 6\end{cases}$

Đặt $S = a + b, P = ab$, ta được: $\begin{cases} 2\left(S^3 - 3SP\right) = 3SP \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(36 - 3P\right) = 3P \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của

pt $X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 2; X_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow x = 8 \\ b = 4 \Rightarrow y = 64 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \Rightarrow x = 64 \\ b = 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (8; 64), (64; 8)$

Ví dụ 4) Giải hệ pt: $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$

Giải: ĐK: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x, y \geq -1 \end{cases}$. Đặt $S = x + y, P = xy$ ta có:

$$\begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2 + 2\sqrt{S + P + 1} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 3; P = \left(S - 3\right)^2 \\ 2\sqrt{S + \left(S - 3\right)^2 + 1} = 14 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14; P = \left(S - 3\right)^2 \\ 4\left(S^2 + 8S + 10\right) = 196 - 28S + S^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14; P = \left(S - 3\right) \\ S^2 + 30S - 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 9 \Rightarrow x = y = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 5) Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = 2m + 1 \end{cases}$ có nghiệm

Giải: Đặt $S = x + y, P = xy$ ta có: $\begin{cases} S = m \\ S^2 - 2P = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = m \\ P = \frac{1}{2}\left(m^2 - 2m - 1\right) \end{cases}$

Hệ có nghiệm

$\Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2\left(m^2 - 2m - 1\right) = -m^2 + 4m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} \leq m \leq 2 + \sqrt{2}$

Ví dụ 6) Tìm m để hệ pt sau có nghiệm thực: $\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$

(ĐH khối D-2007)

Giải: Đặt $a = x + \frac{1}{x}; b = y + \frac{1}{y} \Rightarrow |a| \geq 2; |b| \geq 2$. Hệ đã cho thành:

$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^3 + b^3 - 3\left(a + b\right) = 15m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 8 - m \end{cases} \Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình:

$X^2 - 5X + 8 - m = 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 8 = m$ (1)

Hệ đã cho có nghiệm thực $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thỏa $|X| \geq 2$

Xét tam thức $f\left(X\right) = X^2 - 5X + 8$ với $|X| \geq 2$ ta có bảng biến thiên:

Dựa vào BBT suy ra (1) có 2 nghiệm thỏa $|X| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 22 \\ \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \end{array}\right.$

Ví dụ 7) Tìm m để hệ pt $\begin{cases} x+y+xy=m \\ x^2+y^2=m \end{cases}$ (*) có nghiệm

Giải: Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=m \\ (x+y)^2-2xy=m \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$, điều kiện $S^2 \geq 4P$,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=m \\ (S)^2-2P=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=m \\ S^2+2S-3m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S_1=-1+\sqrt{1+3m} \\ P_1=m+1-\sqrt{1+3m} \end{cases} (1) \\ \begin{cases} S_2=-1-\sqrt{1+3m} \\ P_2=m+1+\sqrt{1+3m} \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

Hệ pt có nghiệm $\Leftrightarrow$ xảy ra 1 trong 2 trường hợp sau:

TH1: $S_1^2 \geq 4P_1 \Leftrightarrow \left(-1+\sqrt{1+3m}\right)^2 \geq 4\left(m+1-\sqrt{1+3m}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+3m} \geq m+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+2 \leq 0 \\ 1+3m \geq 0 \end{cases} (vn) \\ \begin{cases} m+2 \geq 0 \\ 4(1+3m) \geq (m+2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8$$

TH2: $S_2^2 \geq 4P_2 \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{1+3m}\right)^2 \geq 4\left(m+1+\sqrt{1+3m}\right) \Leftrightarrow 3\sqrt{1+3m} \leq -m-2$, dễ thấy BPT vô nghiệm vì $-m-2<0$

Vậy để hệ pt có nghiệm khi $0 \leq m \leq 8$.

Ví dụ 8) Cho $x+y=1$. Tìm GTNN của $A=x^3+y^3$

Giải: Xét hệ pt: $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ S\left(S^2-3P\right)=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=\frac{1-A}{3} \end{cases}$ (x, y tồn tại)

$\Leftrightarrow$ hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S^2-4P \geq 0 \Leftrightarrow 1-4\frac{1-A}{3} \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \frac{1}{4}$

Vậy GTNN của $A=\frac{1}{4}$, đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Chú ý: Nếu trong bài toán tìm cực trị của biểu thức $A=f(x;y)$, trong đó x, y thỏa mãn $g(x;y)=0$. Nếu $f(x;y)$ và $g(x;y)$ là các biểu thức đối xứng thì ta có thể chuyển bài toán về bài toán tìm điều kiện của A để hệ $\begin{cases} f(x;y)=A \\ g(x;y)=0 \end{cases}$ có nghiệm. Từ đây ta xác định được miền giá trị của A và suy ra được cực trị của A.

Ví dụ 9) Cho các số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thỏa mãn: $(x+y)xy = x^2+y^2-xy$.

Tìm GTLN của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$ (ĐH khối A-2006)

Giải: Xét hệ pt: $\begin{cases} (x+y)xy = x^2+y^2-xy \\ \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=a^2+b^2-ab \\ a^3+b^3=A \end{cases}$ (trong đó ta đã đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}, a;b \neq 0$). Đặt $S=a+b; P=ab$, ta có: $\begin{cases} S=S^2-3P \\ S(S^2-3P)=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2=A \\ 3P=S^2-S \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow S>0$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 \geq 4P \Leftrightarrow 3S^2 \geq 4(S^2-S) \Leftrightarrow S \leq 4 \Leftrightarrow A=S^2 \leq 16$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} S=4 \\ P=\frac{S^2-S}{3}=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

Vậy GTLN của A=16, đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 10) Cho x,y thỏa $x-3\sqrt{y+2}=3\sqrt{x+1}-y$. Tìm GTLN và GTNN của $A=x+y$ (HSG quốc gia – 2004)

Giải: Xét hệ pt $\begin{cases} x-3\sqrt{y+2}=3\sqrt{x+1}-y \\ x+y=A \end{cases}$. Đặt $a=\sqrt{x+1}, b=\sqrt{y+2} \Rightarrow a,b \geq 0$

Hệ thành: $\begin{cases} a^2+b^2-3(a+b)-3=0 \\ a^2+b^2=A+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{A}{3}=S \\ ab=\frac{A^2-9A-27}{18}=P \end{cases}$

suy ra hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S^2 \geq 4P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A^2-9A-27 \geq 0 \\ 2A^2-27A-81 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \leq \frac{9-3\sqrt{21}}{2} \cup A \geq \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \\ \frac{27-9\sqrt{17}}{4} \leq A \leq \frac{27+9\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \leq A \leq \frac{27+9\sqrt{17}}{4}$$

Vậy $\min A = \frac{9+3\sqrt{21}}{2}; \max A = \frac{27+9\sqrt{17}}{4}$

2) Hệ phương trình đối xứng loại 2.

-Một hệ phương trình 2 ẩn x, y được gọi là đối xứng loại 2 nếu trong hệ phương trình ta đổi vai trò x, y cho nhau thì phương trình trở thành phương trình kia.

VD: $\begin{cases} x^3 + x^2 y = 10y \\ y^3 + y^2 x = 10x \end{cases}$

b) Tính chất.

- Nếu $(x_0; y_0)$ là 1 nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm

c) Cách giải

- Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta được một phương trình có dạng $(x-y)[f(x;y)]=0$

$\left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ f(x;y)=0 \end{array}\right.$

Ví dụ 1): Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x^3 = x^2 + 2y^2 \\ 3y^3 = y^2 + 2x^2 \end{cases}$

HD: Trừ hai phương trình của hệ ta thu được

$3(x^3 - y^3) = -(x^2 - y^2) \Leftrightarrow (x-y)[3(x^2+y^2+xy)+x+y]=0$

Hệ đã cho tương đương với

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ 3y^3 = y^2 + 2x^2 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} 3(x^2+y^2+xy)+x+y=0 \\ 3y^3 = y^2 + 2x^2 \end{cases} (II) \end{array}\right.$ Giải (I) ta được x=y=0 hoặc x=y=1

Xét (II) Từ giả thiết ta suy ra x, y không âm . Nếu x, y dương thì hệ vô nghiệm suy ta hệ có nghiệm duy nhất

x=y=0

Kết luận: Hệ có 2 nghiệm x=y=0 và x=y=1

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$

Tương ứng với hai giá trị này ta cũng có: $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm là: $(x;y)=(0;0),(1;1),\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Điều kiện $x, y \geq 0$. Dễ thấy nếu x=0 thì y=0 và ngược lại nên hệ có nghiệm (x;y)=(0;0)

Ta xét x,y>0. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+\sqrt{t}}{2}, t>0$ ta thấy $f'(t)=t+\dfrac{1}{4\sqrt{t}}>0, \forall t>0$ nên đây là hàm đồng biến

Hệ đã cho được viết lại là $\begin{cases} x=f(y) \\ y=f(x) \end{cases}$. Suy ra x=y, thay vào hệ đã cho, ta có:

$$x^2+\sqrt{x}=2x \Leftrightarrow x\sqrt{x}+1=2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Ví dụ 3) Giải hệ pt: $\begin{cases} (x-1)(y^2+6)=y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6)=x(y^2+1) \end{cases}$

Giải: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} xy^2+6x-y^2-6=yx^2+y \\ yx^2+6y-x^2-6=xy^2+x \end{cases}$. Trừ vế theo vế hai pt của hệ ta được:

$$2xy(y-x)+7(x-y)+(x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y-2xy+7=0 \end{array}\right.$$

* $x=y$ thay vào hệ ta được: $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=2 \\ x=y=3 \end{array}\right.$

* $x+y-2xy+7=0 \Leftrightarrow (1-2x)(1-2y)=15$ (1)

Mặt khác khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

$x^2+y^2-5x-5x+12=0 \Leftrightarrow (2x-5)^2+(2y-5)^2=2$ (2)

Đặt $a=2x-5; b=2y-5$. Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a+4)(b+4)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=2 \\ ab+4(a+b)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases} \end{array}\right.$$

* $\begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(3;2),(2;3)$

* $\begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=(2;2),(3;3),(2;3),(3;2)$

Ví dụ 4) Tìm m để hệ pt sau có nghiệm $\begin{cases} 2x+\sqrt{y-1}=m \\ 2y+\sqrt{x-1}=m \end{cases}$

Giải: ĐK: $x,y\ge 1$. Đặt $a=\sqrt{x-1}; b=\sqrt{y-1} \Rightarrow a,b\ge 0$, ta có:

$$\begin{cases}2a^2+b=m-2\\2b^2+a=m-2\end{cases}\Rightarrow 2(a-b)(a+b)+b-a=0\Leftrightarrow (a-b)(2a+2b-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\a=\dfrac{1-2b}{2}\end{array}\right.$$

* $a=b\Rightarrow 2a^2+a=m-2\Rightarrow$ PT có nghiệm $a\ge 0\Leftrightarrow m-2\ge 0\Leftrightarrow m\ge 2$

* $a=\dfrac{1-2b}{2}\Rightarrow\begin{cases}0\le b\le \dfrac{1}{2}\\4b^2-2b=2m-5\end{cases}\Rightarrow$ hệ có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}\le 2m-5\le 0\Leftrightarrow \dfrac{19}{8}\le m\le \dfrac{5}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm khi $m\ge 2$.

Ví dụ 5) Tìm m để các hệ pt sau có nghiệm duy nhất:

1) $\begin{cases}x=y^2-y+m\\y=x^2-x+m\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x^2=y^3-2y^2+my\\3y^2=x^3-2x^2+mx\end{cases}$

Giải:

1) **Điều kiện cần:** Giả sử hệ pt có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0=y_0$

Thay vào hệ ta được: $x_0^2-2x_0+m=0$ pt này có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta'=1-m=0\Leftrightarrow m=1$

Điều kiện đủ: Với $m=1$ hệ trở thành:

$$\begin{cases}x=y^2-y+1\\y=x^2-x+1\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2-2x-2y+2=0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=0\Leftrightarrow x=y=1$$

Thử lại thấy thỏa mãn hệ. Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

2) **Điều kiện cần:** Giả sử hệ pt có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0=y_0$

Thay vào hệ ta được: $x_0^3-5x_0^2+mx_0=0(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0^2-5x_0+m=0(*)\end{array}\right.$

(1) có nghiệm duy nhất thì (*) phải vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta=25-4m<0\\ \begin{cases}\Delta=25-4m=0\\5=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m>\frac{25}{4}$$

Điều kiện đủ: Với $m>\dfrac{25}{4}$ ta có: $\begin{cases}3x^2=y(y^2-2y+m)=y\left[(y-1)^2+m-1\right]\\3y^2=x(x^2-2x+m)=x\left[(x-1)^2+m-1\right]\end{cases}\Rightarrow x,y\ge 0$

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta được:

$$x(x^2-5x+m)+y(y^2-5y+m)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+m-\frac{25}{4}\right]+y\left[\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+m-\frac{25}{4}\right]=0\Leftrightarrow x=y=0$$

Vậy $m > \frac{25}{4}$ là những giá trị cần tìm.

Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất với mọi $a \neq 0$.

Ví dụ 5) Chứng minh rằng hệ sau có nghiệm duy nhất với mọi $a \neq 0$: $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{a^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{a^2}{x} \end{cases}$

Giải: ĐK: $x, y \neq 0$. Từ hai pt của hệ suy ra $x, y > 0$. Hệ tương đương:

$$\begin{cases} 2x^2y = y^2 + a^2 \\ 2y^2x = x^2 + a^2 \end{cases} \Rightarrow 2xy(x-y) = y^2 - x^2 \Leftrightarrow (x-y)(2xy + x + y) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y$ (do $x, y > 0 \Rightarrow 2xy + x + y > 0$).

Thay vào hệ ta được: $a^2 = 2x^3 - x^2 = f(x)$ (*)

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 2x(3x-1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Mà $f(0) = 0; f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$ và $a^2 > 0$ nên pt(*) có duy nhất một nghiệm.

3) Hệ phương trình vế trái đẳng cấp bậc II

a) Các dạng cơ bản.

. $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}$

b) Cách giải.

+ Xét trường hợp y=0 xem có phải là nghiệm hay không

+ Đặt x=ty thay vào hệ rồi chia 2 phương trình của hệ cho nhau ta được phương trình bậc 2 theo t. Giải phương trình tìm t sau đó thế vao một trong hai phương trình của hệ để tìm x,y

Phương pháp này cũng đúng khi vế trái là phương trình đẳng cấp bậc n.

Ví dụ 1: Giải hệ $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 1 \end{cases}$

+ Dễ thấy y=0 không phải là nghiệm

+ Đặt x=ty thế vào hệ ta có $\begin{cases} t^2y^2 - 3ty^2 + y^2 = -1 \\ t^2y^2 + 2ty^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$ chia 2 phương trình của hệ cho nhau ta có

$\dfrac{t^2 - 3t + 1}{t^2 + 2t - 2} = -1 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -\dfrac{1}{2}y \end{array}\right.$ từ đó thế hai trường hợp vào một trong hai phương trình của hệ để giải.

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - x(y-1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 3y - x \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$

TH1: $y = 0 \Rightarrow x = 0$

TH2: $y \neq 0$, đặt $t = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x = ty$ thay vào hệ: $\begin{cases} y^2\left(2t^2 - t + 1\right) = y(3-t)(1) \\ y^2\left(t^2 + t - 3\right) = y(t-2)(2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta được: $3t^3 - 7t^2 - 3t + 7 = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-1;1;\dfrac{7}{3}\right\}$

Hệ có 4 nghiệm $(0;0),(1;1),(-1;1),\left(\dfrac{7}{43};\dfrac{3}{43}\right)$

Một số dạng chuyển thể của hệ đẳng cấp:

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$

Giải: Từ hệ pt $\Rightarrow \left(x^3 + y^3 - xy^2\right)(4x + y) = 4x^4 + y^4$

Đặt $x = ty$ (do $y \neq 0$). Ta có:

$y^4\left(t^3 + 1 - t\right)(4t + 1) = y^4\left(4t^4 + 1\right) \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 1, t = 3$

* $t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^3 = 1 \\ y^4 = y \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$

* $t = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \\ 5x^4 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 = y$

* $t = 3 \Rightarrow x = 3y \Rightarrow \begin{cases} 25y^3 = 1 \\ 325y^4 = 13y \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ là: $(0;1),(1;1),\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}\right)$

Ví dụ 4) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3\left(y^2 + 1\right) \end{cases}$

Ta biến đổi hệ $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$, ta thấy mỗi vế của hai phương trình là những biểu thức đồng bậc nên ta nghĩ tới phép đặt $y = tx(x \neq 0)$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y = tx$. Khi đó hệ thành:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = t^3x^3 + 2tx \\ x^2 - 3 = 3\left(t^2x^2 + 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1 - t^3\right) = 2t + 8 \\ x^2\left(1 - 3t^2\right) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t + 4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(1 - t^3\right) = (t + 4)\left(1 - 3t^2\right) \Leftrightarrow 12t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

* $t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x^2\left(1 - 3t^2\right) = 6 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

* $t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \mp \frac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}$

Ví dụ 5) Tìm a để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2a - 1}{2a + 5} \end{cases}$ (I)

Giải: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 \leq -3 \\ 21x^2 + 12xy + 6y^2 \leq 3 - \frac{18}{2a + 5} \end{cases} \Rightarrow 16x^2 + 16xy + 4y^2 \leq \frac{18}{2a + 5}$

$\Leftrightarrow (4x + 2y)^2 \leq -\frac{18}{2a + 5} \Rightarrow 2a + 5 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{5}{2}$

Ta xét hệ: $\begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 = -3 \\ 21x^2 + 12xy + 6y^2 = 3 \end{cases}$ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 = -3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 = 1 \end{cases}$

Đặt $y = tx$ (do $x \neq 0$), ta có:

$\frac{-5t^2 + 4t - 2}{7t^2 + 4t + 2} = -3 \Leftrightarrow 16t^2 + 16t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2y$

Thay vào hệ ta được: $7x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{7} \Rightarrow y = \mp\frac{2}{7}$

Ta chứng minh với $a < -\frac{5}{2}$ thì hệ (I) có nghiệm.

Thật vậy gọi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (*) khi đó ta có: $\begin{cases} -5x_0^2 + 4x_0y_0 - 2y_0^2 = -3 \\ 21_0^2 + 12x_0y_0 + 6y_0^2 = 3 < 3 - \frac{18}{2a + 5} \end{cases}$

$\Rightarrow (x_0; y_0)$ là những cặp nghiệm của hệ (I).

Vậy $a < -\frac{5}{2}$ là những giá trị cần tìm.

PHẦN HAI: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC THƯỜNG DÙNG TRONG GIẢI HỆ

I) PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Phương pháp này chủ yếu là dùng các kỹ năng biến đổi phương trình cuả hệ để dưa về phương trình đơn giản có thể rút x theo y hoặc ngược lại để thế vào phương trình khác của hệ

Ta xét ví dụ sau:

Loại 1) Trong hệ có một phương trình bậc nhất theo ẩn x hoặc ẩn y. Khi đó ta rút x theo y hoặc y theo x để thế vào phương trình còn lại

Ví dụ 1) Giải ghệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1)=3x^2-4x+1 (1) \\ xy+y+1=x^2 (2) \end{cases}$

HD: Ta thấy x=0 không phải là nghiệm của phương trình (2) từ phương trình (2) ta có $y+1=\frac{x^2-1}{x}$ thay vào phương trình (1) ta có

$$x^2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x}+x\right)=3x^2-4x+1 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^3+2x^2-x-1\right)=(x-1)(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(2x^3+2x^2-4x\right)=0$$

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy(2x+y)=5xy \\ x+y+xy(3x-y)=4xy \end{cases}$

Giải: Ta có x=y=0 là nghiệm.

Các cặp số (x,y) với x=0, y$\neq$0 hoặc x$\neq$0, y=0 không là nghiệm.

Xét xy$\neq$0. chia 2 vế phương trình cho xy$\neq$0 ta được $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2x+y=5 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3x-y=4 \end{cases}$

Suy ra $5-2x-y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4+y-3x \Leftrightarrow x=2y-1$

Thay x=2y-1 vào phương trình thứ hai ta thu được:

$$2y-1+y+y(2y-1)(5y-3)=4(2y-1)y \Leftrightarrow 3y-1+y\left(10y^2-11y+3\right)=8y^2-4y$$

$$\Leftrightarrow 10y^3-19y^2+10y-1=0 \Leftrightarrow (y-1)\left(10y^2-9y+1\right)$$

$$\Leftrightarrow y=1; y=\frac{9+\sqrt{41}}{20}; y=\frac{9-\sqrt{41}}{20}$$

$(y=1; x=1)$

Đáp số: $\left(y=\dfrac{9+\sqrt{41}}{20}; x=\dfrac{\sqrt{41}-1}{10}\right)$

$\left(y=\dfrac{9+\sqrt{41}}{20}; x=\dfrac{-\sqrt{41}-1}{10}\right)$

Loại 2) Một phương trình của hệ có thể đưa về dạng tích của 2 phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó ta đưa về giải 2 hệ phương trình tương đương

Ví dụ 1) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 (1) \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y (2) \end{cases}$

Điều kiện là $y \geq 0; x \geq 1$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow$ (x+y)(x-2y-1)=0 từ đó ta có $\left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=2y+1 \end{array}\right.$ thay lần lượt hai trường hợp vào phương trình (2) để giải

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2} (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện $x \geq y \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+y}-1)\left(\sqrt{x-y}-1\right)=0$$

Hệ đã cho tương đương với: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases} \end{array}\right.$

giải $\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

giải $\begin{cases} x-y=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Đáp số: x=1,y=0 và x=0, y=1.

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x} (1) \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện $x>0, y \geq 3$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{y-3}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}=\dfrac{y-3}{x}$

❖ Với y=3 ta có $2\sqrt{x+3}=0 \Leftrightarrow x=-3$ (loại)

❖ Với $y \neq 3$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x+3} = x \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x} = x+3 \end{cases}$

Suy ra $x+3-\sqrt{x} = \sqrt{x+y} = x + \sqrt{x+3}$

Suy ra $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1$ thay vào (2) ta được: $\sqrt{y+1} = 3 \Leftrightarrow y = 8$

Đáp số: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$

Chú ý: Trong một số bài toán nhiều khi các em cần cộng hoặc trừ 2 phương trình của hệ sau đó mới xuất hiện phương trình dạng tích

Ví dụ 4) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = 41 \\ xy\left(x^2+y^2\right) = 10 \end{cases}$

Giải: Sử dụng hằng đẳng thức: $(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy\left(x^2+y^2\right) + 6x^2y^2$

HD: Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = 41 \\ 4xy\left(x^2+y^2\right) = 40 \end{cases}$

cộng vế với vế 2 phương trình ta thu được:

$x^4 + y^4 + 4xy\left(x^2+y^2\right) + 6x^2y^2 = 81 \Leftrightarrow (x+y)^4 = 81 \Leftrightarrow x+y = \pm 3$

hệ đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ xy\left(x^2+y^2\right) = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-3 \\ xy\left(x^2+y^2\right) = 10 \end{cases} \end{array}\right.$

a) Xét $\begin{cases} x+y=3 \\ xy\left(x^2+y^2\right) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy\left[(x-y)^2 - 2xy\right] = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy(9-2xy) = 10 \end{cases}$

b) Xét $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy\left(x^2+y^2\right) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy(9-2xy) = 10 \end{cases}$

Ví dụ 5) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$

Giải: ĐK: $x+y>0$

Phương trình thứ nhất của hệ chứa 3 biểu thức $x^2+y^2; xy; x+y$ mà 3 biểu thức này quan hệ với nhau bởi đẳng thức: $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$ nên ta sẽ biến đổi (1) như sau:

$$(1)\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{x+y}-1=0\Leftrightarrow\frac{(x+y)^2(x+y)-(x^2+y^2)}{x+y}+x+y-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x+y-1)\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+1\right)=0\Leftrightarrow x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$$

(Do $\frac{x^2+y^2}{x+y}>0$) thay vào (2) ta

được: $x^2-(1-x)=1\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\x=-2\Rightarrow y=3\end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm $(x;y)=(1;0),(-2;3)$.

Loại 3) Một phương trình của hệ là phương trình bậc 2 theo một ẩn chẳng hạn x là ẩn. Khi đó ta coi y như là tham số giải x theo y.

Ví dụ 1) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}y^2=(5x+4)(4-x) & (1)\\-5x^2+y^2-4xy+16x-8y+16=0 & (2)\end{cases}$

HD: Coi phương trình (2) là phương trình theo ẩn y ta có (2)
$\Leftrightarrow$ $y^2-4(x+2)y-5x^2+16x+16=0$

Giải y theo x ta có $\left[\begin{array}{l}y=5x+4\\y=4-x\end{array}\right.$ thay lần lượt hai trường hợp vào phương trình ta sẽ giải được các nghiệm của hệ

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}2x^2+2xy+y=5\\y^2+xy+5x=7\end{cases}$

Trừ hai phương trình của hê cho nhau ta có $2x^2-y^2+xy+y-5x+2=0\Leftrightarrow$

$$2x^2+(y-5)x-y^2+y+2=0;\Delta=(y-5)^2-8(-y^2+y+2)=(3y-3)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{y+1}{2}\\x=2-y\end{array}\right.$$

Thay lần lượt 2 trường hợp vào hệ ta giải được x, y

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+2xy+2y^2+3x=0(1)\\xy+y^2+3y+1=0(2)\end{cases}$

Giải: Lấy (1)+ 2.(2) ta được: $(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0\Leftrightarrow(x+2y+1)(x+2y+2)=0$

TH1: $x+2y+1=0\Rightarrow x=-2y-1$ thay vào (2) ta được:

$$y^2-2y-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=-3-2\sqrt{2}\\y=1-\sqrt{2}\Rightarrow x=-3+2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

TH2: $x+2y+2=0\Rightarrow x=-2y-2$ thay vào (2) ta được:

$$y^2-y-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-3+\sqrt{5}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-3-\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Do đó hpt đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là:

$$\left(-3-2\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right),\left(-3+2\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right),\left(-3+\sqrt{5};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(-3-\sqrt{5};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Ví dụ 4) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(2x^2-3x+4\right)\left(2y^2-3y+4\right)=18\\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases}$

Lời giải:

Xét đẳng thức $x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0(*)$

Ta xem (*) là phương trình bậc hai theo biến x, viết lại là $x^2+x(y-7)+y^2-6y+14=0$.

Phương trình này có nghiệm khi:

$$\Delta_y=(y-7)^2-4\left(y^2-6y+14\right)\ge 0\Leftrightarrow -3y^2+10y-7\ge 0\Leftrightarrow 1\le y\le\frac{7}{3}$$

Hoàn toàn tương tự, xem (*) là Phương trình bậc hai theo biến y, viết lại là:

$y^2-y(x-6)+\left(x^2-7x+14\right)=0$ phương trình này có nghiệm khi:

$$\Delta_x=(x-6)^2-4\left(x^2-7x+14\right)\ge 0\Leftrightarrow -3x^2+16x-20\ge 0\Leftrightarrow 2\le x\le\frac{10}{3}$$

Ta xét hàm số $f(t)=2t^2-3t+4, t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)=4t-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{4}<1$

Suy ra trên $[1;+\infty)$, hàm số này đồng biến. Ta được:

$$f(x)\ge f(2)=6;\ f(y)\ge f(1)=3\Rightarrow f(x).f(y)\ge 3.6=18$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ thì ta thấy đẳng thức phải xảy ra, tức là x=2,y=1.
Thay hai giá trị này vào (*) ta thấy không thỏa mãn
Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

II) PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Điểm mấu chốt của phương pháp này là phải phát hiện ẩn phụ u=f(x,y) và v=g(x,y) ngay trong từng phương trình của hệ hoặc sau các phép biến đổi

Thông thường các phép biến đổi thường xoay quanh việc cộng, trừ 2 phương trình của hệ hoặc chia các vế phương trình cho một số hạng khác không có sẵn trong các phương trình của hệ để tìm ra những phần chung mà sau đó ta đặt thành ẩn phụ

Ví dụ 1) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}x^2+1+y(y+x)=4y & (1)\\ \left(x^2+1\right)(y+x-2)=y & (2)\end{cases}$

HD: Ta thấy y=0 không phải là nghiệm của hệ. Chia hai vế phương trình (1) và (2) cho y ta có hệ tương đương sau

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4\\(\dfrac{x^2+1}{y})(x+y-2)=1\end{cases}$$ Đặt u=$\dfrac{x^2+1}{y}$; v=x+y-2 ta có hệ sau $\begin{cases}u+v=2\\uv=1\end{cases}$ Giải hệ tìm u,v sau đó tìm x, y.

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7\\2x+\dfrac{1}{x+y}=3\end{cases}$ Điều kiện x+y $\neq 0$

Khi đó ta có hệ sau $\begin{cases}3(x+y)^2+(x-y)^2+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7\\x+y+\dfrac{1}{x+y}+x-y=3\end{cases}$ Đặt $u=x+y+\dfrac{1}{x+y};v=x-y$

Với $|u|\geq 2$

Thay vào ta có $\begin{cases}3u^2+v^2=13\\u+v=3\end{cases}$ Giải hệ tìm u;v sau đó thay vào tìm x; y

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+y^2x+3x^2+y^2+3x-2y+1=0\\2y^3+xy^2+y^2-3x-3=0\end{cases}$

Giải: Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}(x+1)^3+(x+1)y^2=2y\\(x+1)y^2+2y^3=3(x+1)\end{cases}$

đặt u=x+1

Ta có hệ mới $\begin{cases}u^3+uy^2=2y\\uy^2+2y^3=3u\end{cases}$

Dễ thấy u=y=0 là một nghiệm

Xét y$\neq 0$ đặt u=ty thế vào hệ sau đó chia hai vế phương trình cho nhau ta được phương trình một ẩn t.

(Đây là một biến thể của hệ phương trình đồng bậc)

Ví dụ 4) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)(1+xy)=18xy\\x^2+y^2(1+x^2y^2)=208x^2y^2\end{cases}$

Giải: Ta có x=y=0 lànghiệm. Xét $xy\neq 0$. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=18\\(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=208\end{cases}$$. Đặt $u=x+\dfrac{1}{x},v=y+\dfrac{1}{y}$ ta được $\begin{cases}u+v=18\\u^2+v^2=208\end{cases}$

Ví dụ 5) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5\\ xy+\dfrac{1}{xy}=4\end{cases}$

Giải:

Điều kiện $xy \neq 0$. Đặt $u = x+\dfrac{1}{y}, v = y+\dfrac{1}{x}$ ta được hệ $\begin{cases}u+v=5\\ uv=6\end{cases}$

Ví dụ 6) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)(x+y)=15\\ \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(x^2+y^2\right)=85\end{cases}$

Giải: Đặt $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}, v=x+y$.Ta có:

$\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=u^2-2$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=v^2-2xy$

$u=\dfrac{x^2+y^2}{xy} \Leftrightarrow u.xy=x^2+y^2$

Suy ra $u.xy=v^2-2xy \Rightarrow xy=\dfrac{v^2}{u+2}$

Suy ra $x^2+y^2=v^2-\dfrac{2v^2}{u+2}=\dfrac{uv^2}{u+2}=\dfrac{15v}{u+2}$ (vì uv=15)

Ta được hệ $\begin{cases}uv=15\\ \left(u^2-2\right)\left(\dfrac{15v}{u+2}\right)=85\end{cases}$

Ví dụ 7) Giải hệ: $\begin{cases}x^2y+2y+x=4xy\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}=3\end{cases}$

Giải: Điều kiện $xy \neq 0$.

hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4\\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4\end{cases}$.

Đặt $u=x+\dfrac{1}{x}, v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ ta được: $\begin{cases}u+v=4\\ uv=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2\\ v=2\end{cases}$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x=1, y=1\right)$

III) PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Loại 1) Một phương trình của hệ có dạng f(x)=f(y). Một phương trình cho ta biết tập giá trị của x hoặc y. Từ đó suy ra hàm f(x) đơn điệu suy ra x=y

Ví dụ 1) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^3-5x=y^3-5y & (1) \\ x^8+y^4=1 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta suy ra $|x|,|y|\le 1$ Xét phương trình $f(x)=x^3-5x$ với $x\in[-1;1]$; $f'(x)=3x^2-5<0\forall x\in[-1;1]$ nên f(x) là hàm nghịch biến suy ra x=y thay vào phương trình (2) ta dễ dàng giải được nghiệm

Loại 2) Hệ đối xứng mà sau khi biến đổi thường đưa về dạng f(x)=f(y) hoặc f(x)=0 trong đó f là hàm đơn điệu

Ví dụ 1) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$

HD: Đặt x-1=u; y-1=v ta có hệ $\begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^v \\ v+\sqrt{v^2+1}=3^u \end{cases}$

Trừ theo vế hai phương trình trên ta được

$u+\sqrt{u^2+1}+3^u=v+\sqrt{v^2+1}+3^v$ Xét hàm số

$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}+3^x$; $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+3^x\ln 3>0\forall x\Rightarrow u=v$. Thay vào (1) ta có

$u+\sqrt{u^2+1}=3^u \Leftrightarrow \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=u\ln 3$; $f(u)=\ln(u+\sqrt{u^2+1})-u\ln 3$ ta có

$f'(u)=\dfrac{1+\dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}}{u+\sqrt{u^2+1}}-\ln 3=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}-\ln 3<0\forall u \Rightarrow f(u)$ là hàm số nghịch biến. Ta có khi u=0 thì f(0)=0 nên u=v=0 là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ x=y=1 là nghiệm duy nhất của hệ ban đầu

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3-3x^2+2=y^3-3y-2 \\ \log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)=\left(x-2011\right)^2 \end{cases}$

Giải: Đặt y=u-1 thay vào phương trình (1) của hệ ta có $x^3-3x^2=u^3-3u^2$. Ta thấy bài toán xác định khi

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<y<1\\0<x<2\end{cases}\\ \begin{cases}x>2\\y>1\end{cases}\end{array}\right.$$ Trong cả hai trường hợp ta thấy hàm số $f(x)=x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x(x-2)$ luôn đơn điệu nên

Ta có $x=u \Leftrightarrow x=y+1$ thay vào phương trình (2) của hệ ta có x=2011 là nghiệm.

Chú ý: Trong bài tập này ta cũng có thể biến đổi trực tiếp phương trình đầu của hệ về dạng

$x^3-3x^2=\left(y+1\right)^3-3(y+1)^2$

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$

HD: Đặt $\sqrt{5-2y}=t \Rightarrow y=\dfrac{5-t^2}{2}$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có

$4x^3+x=t(3-\dfrac{5-t^2}{2}) \Leftrightarrow 8x^3+2x=t^3+t$ Xét $f(x)=x^3+x \Rightarrow f'(x)=3x^2+1$ suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến từ đó suy ra $t=2x \Leftrightarrow \sqrt{5-2y}=2x \Leftrightarrow y=\dfrac{5-4x^2}{2}$ thế vào phương trình (2) của hệ ta có

$g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0$ với $x\in\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$.

Dễ thấy x=0 hoặc x=3/4 đều không phải là nghiệm

$g'(x)=8x-8x\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x(4x^2-3)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}<0$ với $x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$ Ta có

$g(\dfrac{1}{2})=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}; y=2$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Ví dụ 4); Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}\,(1)\\4^x+4=4x+4\sqrt{2y-2x+4}\,(2)\end{cases}$

Giải: ĐK: $y-x+2\geq 0$. Đặt $t=x^2-2y$

$PT(1) \Leftrightarrow 4+3^{t+2}=\left(4+9^t\right).7^{2-t} \Leftrightarrow \dfrac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}}=\dfrac{4+3^{2t}}{7^{2t}} \Leftrightarrow f(t+2)=f(2t)$. Trong đó

$f(x)=\dfrac{4+3^x}{7^x}=4\left(\dfrac{1}{7}\right)^x+\left(\dfrac{3}{7}\right)^x, x\in R$ là hàm số giảm (vì $0<\dfrac{1}{7};\dfrac{3}{7}<1$)

Do đó $f(t+2)=f(2t) \Leftrightarrow t+2=2t \Leftrightarrow t=2$, tức là $x^2-2y=2$. Suy ra

$(1) \Leftrightarrow 2y=x^2-2$

Thay vào pt(2) ta có:

$4^x+4=4x+4\sqrt{x^2-2-2x+4} \Leftrightarrow 4^{x-1}=x-1+\sqrt{(x-1)^2+1} \Leftrightarrow 4^s=s+\sqrt{s^2+1}$, trong đó $s=x-1 \Leftrightarrow 4^{-s}=-s+\sqrt{s^2+1}$, vì $4^s.4^{-s}=\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\left(-s+\sqrt{s^2+1}\right)=1$ (3)

Từ (3) ta có: $4^s-4^{-s}=2s$. Xét hàm $g(s)=4^s-4^{-s}-2s, s\in R$. Ta có

$g'(s)=\ln 4\left(4^s+4^{-s}\right)-2>0; \forall s\in R$ (do $4^s+4^{-s}\ge 2$) suy ra g(s) là hàm đồng biến. Chú ý g(0)=0 là nghiệm duy nhất của pt g(s)=0. Do đó s=0 là nghiệm duy nhất của pt(3), tức là $x-1=0$. Suy ra nghiệm duy nhất của hệ pt đã cho là $(x;y)=\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 5) Giả sử hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+x=1(1) \\ y^2+xy+x+y=1(2) \end{cases}$ có đúng 1 nghiệm $(x_0;y_0)$ với $x_0>0$ và $y_0>0$.

CMR: $\frac{1}{x_0}+\frac{1}{y_0}=8\cos^3\frac{\pi}{7}$.

Giải: Trước hết ta phải làm rõ hệ phương trình có duy nhất 1 nghiệm $x>0, y>0$

Thật vậy $x>0, y>0$ là nghiệm của hệ phương trình, hệ tương đương:

$$\begin{cases} y=\frac{1-x-x^2}{x} \\ (y+1)(x+y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x}-x-1(1') \\ \left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)=1(2') \end{cases}$$

$(2') \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1+x=1 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+1=0$

Đặt $f(x)=x^3-2x^2-x+1$. Ta có $f'(x)=3x^2-4x-1$

Từ (1) có $x<1$ và với $0<x<1$ thì $f'(x)=3x^2-4x-1=3\left(x^2-x\right)-x-1<0$

Do đó f(x) là hàm nghịch biến trên khoảng $0\le x\le 1$

Mặt khác $f(0)=1, f(1)=-1$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ trong khoảng $0<x<1$ có duy nhất một nghiệm.

Chú ý: $0<x<1, f(x)=0$ nên $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1+x=1 \Rightarrow \frac{1}{x}-1-x+x^2=x$

$\Rightarrow y=\frac{1}{x}-x-1=x-x^2>0 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x(1-x)}=\frac{2-x}{x(1-x)}=\frac{1}{x^3}$ (3)

(Do $f(x)=0 \Rightarrow 1-x=x^2(2-x) \Rightarrow x(1-x)=x^3(2-x)$

Xét trường hợp $\frac{1}{x}=2\cos\varphi, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Ta có:

$$\frac{f(x)}{x^3}=1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1-4\cos\varphi-4\cos^2\varphi+8\cos^3\varphi$$
$$=2\left(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi\right)-2\left(2\cos^2\varphi-1\right)+2\cos\varphi-1$$
$$=2\cos3\varphi-2\cos2\varphi+2\cos\varphi-1$$
$$=\frac{1}{\sin\varphi}\left(2\cos3\varphi.\sin\varphi-2\cos2\varphi.\sin\varphi+2\cos\varphi.\sin\varphi-\sin\varphi\right)$$
$$=\frac{1}{\sin\varphi}\left(\sin4\varphi-\sin2\varphi-\sin3\varphi+\sin\varphi+\sin2\varphi-\sin\varphi\right)=\frac{\sin4\varphi-\sin3\varphi}{\sin\varphi}=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\varphi=3\varphi+2k\pi\left(k\in N^*\right)\\4\varphi=\pi-3\varphi+2k\pi\left(k\in N\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi=2k\pi\left(k\in N^*\right)\\\varphi=\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}\left(k\in N\right)\end{array}\right.$$

Vì $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ nên $\varphi\in\left\{\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7}\right\}$. Mặt khác $0<x<1$ nên

$\cos\varphi=\frac{1}{2x}>\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi<\frac{\pi}{3}$. Bởi vậy $\varphi=\frac{\pi}{7}$

Vậy nghiệm duy nhất của PT $f(x)=0$ với $0<x<1$ là $x_0=\dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}$

Do đó theo (3) ta có: $\frac{1}{x_0}+\frac{1}{y_0}=\frac{1}{x_0^3}=8\cos^3\frac{\pi}{7}$.

Ví dụ 6) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\x\sqrt{6x+2x^2+1}=4xy+6x+1\end{cases}$

Giải:

Cách 1: Xét $f(t)=t+\sqrt{t^2+1},\ f'(t)=1+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{|t|-t}{\sqrt{t^2+1}}\geq0$ do đó f(t) đồng biến trên R.

PT $(1)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}\Rightarrow f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$

$$(2)\Leftrightarrow x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25}{4}x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right.$$

Với $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+6x+1=9x^2\\x\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2-6x-1=0\\x\geq0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=-1$

Với

$$\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+6x+1=4x^2 \\ x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-6x-1=0 \\ x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{11}}{2} \Rightarrow y=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$$

Cách 2: Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ thành: $x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+y^2}$ (1)

Rõ ràng (1) khiến ta nghĩ đến hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$, hàm này đồng biến trên R.

Nên (1) tương đương $x=-y$ thế vào pt thứ 2 của hệ ta được:

$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1$ (2). Có 1 cách giải hay để giải (2) bằng ẩn phụ, nhưng để đơn giản hơn ta lũy thừa hai vế ta tìm được nghiệm $x=1; x=\frac{3-\sqrt{11}}{2}$

KL: $(1;-1),\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2};-\frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)$ là nghiệm của hệ

Ví dụ 7) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \log_3(2x+1)-\log_3(x-y)=\sqrt{4x^2+4x+2}-\sqrt{(x-y)^2+1}-3x^2+y^2-4x-2xy-1 \\ \log_3(2x)+4x^2-\sqrt{4x^2+1}=1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Giải: Viết pt thứ nhất của hệ thành:

$\sqrt{(2x+1)^2+1}-(2x+1)^2-\log_3(2x+1)=\sqrt{(x-y)^2+1}-(x-y)^2-\log_3(x-y)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{(t)^2+1}-(t)^2-\log_3(t)$ với t>0

Có $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{(t)^2+1}}-\left(t+\frac{1}{t}\right)\le\frac{1}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\le 0$ nên f đồng biến.

Thế thì (*) $\Leftrightarrow 2x+1=x-y$ (1).

Với pt thứ 2, xét hàm $f(x)=\log_3(2x)+4x^2-\sqrt{4x^2+1}$ với $x>0$

Có $f'(x)=4x\left(2-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)+\frac{1}{x}$ nên f đồng biến

Thế thì $f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\sqrt{2}$ nên $x=\frac{1}{2}$ thỏa mãn pt thứ 2.

Kết hợp với (1) cho ta $y=-\frac{3}{2}$. Vậy $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ là nghiệm của hệ

Ví dụ 8) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x \end{cases}$

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -\frac{1}{2}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - 1 + \sqrt{2t+1}$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 + \frac{1}{\sqrt{2t+1}} > 0 \forall t \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và f(t) liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ nên f(t) là hàm tăng thực sự trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Giả sử $-\frac{1}{2} \leq x \leq y$ từ hệ phương trình đã cho và do f(t) tăng suy ra x=y.

Thay vào hệ phương trình đã cho ta được $x^3 + 2x - 1 + \sqrt{2x+1} = 0 (1)$

Xét hàm số $g(x) = x^3 + 2x - 1 + \sqrt{2x+1}$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ta có $g'(x) = 3x^2 + 2 + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0 \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và g(x) liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ nên g(x) là hàm tăng thực sự trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, mà g(0)=0 nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất x=0. Suy ra x=y=0.

Thử lại hệ đúng. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (x;y)=(0;0).

Ví dụ 9) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4^{x^2-16} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x^2+1} = 4^{y^2-8y} + 3\sqrt{y-4} + \sqrt{y^2-8y+17} \\ y\left(x^2-1\right) - 4x^2 + 3x - 8 + \ln\left(x^2-3x+3\right) = 0 \end{cases} (I)$$

Giải:

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 4$. Đặt $z = y - 4, z \geq 0$. Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} 4^{x^2-16} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x^2+1} = 4^{z^2-16} + 3\sqrt{z} + \sqrt{z^2+1} & (1) \\ zx^2 + 3x - z - 12 + \ln\left(x^2-3x+3\right) = 0 & (2) \end{cases} \text{(II)}$$

Hàm $f(t) = 4^{t^2-16} + 3\sqrt{t} + \sqrt{t^2+1}$ có $f'(t) = 2t.4^{t^2-16}\ln 4 + \frac{3}{2\sqrt{t}} + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t > 0$

Và hàm f(t) liên tục trên $[0; +\infty)$ nên f(t) đồng biến trên $[0; +\infty)$. Suy ra (1) có dạng f(x)=f(z) $\Leftrightarrow x = z \geq 0$.

Thế z=x vào phương trình (2) ta có: $x^3 + 2x - 12 + \ln\left(x^2-3x+3\right) = 0 (3)$

Đặt $g(x) = x^3 + 2x - 12 + \ln\left(x^2-3x+3\right), x \geq 0$

Ta có $g'(x) = 3x^2 + 2 + \frac{2x-3}{x^2-3x+3} = 3x^2 + \frac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3} > 0$, mọi $x \geq 0$

g(x) đồng biến trên $[0; +\infty)$ và g(2)=0 nên x=2 là nghiệm duy nhất của (3)

Hệ (II) có nghiệm duy nhất x=2 và t=2 nên hệ (I) có nghiệm duy nhất(x;y) là (2;6).

IV) PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Với phương pháp này học sinh cần quan sát nắm chắc các biểu thức không âm trong hệ, qua đó vận dụng các bất đẳng thức để đánh giá

Ví dụ 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$

HD:Cộng 2 vế của hai phương trình với nhau ta có

$\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2$ Ta có x=y=0 là một nghiệm của hệ

Có $\sqrt[3]{x^2-2x+9}=\sqrt[3]{(x-1)^2+8}\geq 2\Rightarrow VT\leq 2xy; x^2+y^2\geq 2xy\Rightarrow VP\geq 2xy$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x=y=1

Kết luận: Hệ có 2 ngiệm x=y=0 và x=y=1

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} y=-x^3+3x+4 \\ x=2y^3-6y-2 \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} (y-2)=-(x+1)^2(x-2) & (1) \\ (x-2)=2(y+1)^2(y-2) & (2) \end{cases}$

Nếu y > 2 từ (1) suy ra x<2. Nhưng điều này là vô lý vì (2) vô nghiệm

Lập luận tương tự cho trường hợp y<2

Kết luận x=y=2 là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7 \end{cases}$

HD: Dễ thấy x=y=0 hoặc x=y=-1 là nghiệm

Xét x>0 ta có

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7>1+x^7$

$\Rightarrow y>x$

$\Rightarrow 1+y+y^2+y^3+y^4+y^5+y^6+y^7>1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+y^7>1+y^7\Rightarrow x>y$

Vậy hệ vô nghiệm. Tương tự khi y>0 hệ cũng vô nghiệm

Xét x<-1 $\Rightarrow 1+x^7<0\Rightarrow 1+y<0\Rightarrow y<-1$

Ta có $1+(x+x^2)+(x^3+x^4)+(x^5+x^6)+x^7>1+x^7\Rightarrow y>x$. Tương tự khi y<-1 ta có x>y . Vậy hệ vô nghiệm

Xét trường hợp -1<x<0 chứng minh tương tự ta có hệ vô nghiệm.

Kết luận: x=y=0 hoặc x=y=-1

Ví dụ 4) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2+3=0(1) \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y-24=0(2) \end{cases}$

Giải: ĐK: $\begin{cases} 0 \le x \le 32 \\ y \le 4 \end{cases}$

Lấy (1)+(2) vế theo vế ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-6y+21$ (*)

Có: $y^2+6y+21=(y-3)^2+12\ge 12$. Lại có:

$$\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\le\sqrt{(1+1)(x+32-x)}=8\Leftrightarrow\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le\sqrt{(1+1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\right)}=4$$

Vậy $\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le 12$. Do (*) nên có hệ pt: $\begin{cases} \sqrt{x}=\sqrt{32-x} \\ \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{32-x} \\ y-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=16 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy hệ pt có 1 nghiệm duy nhất $(16;3)$

Ví dụ 5) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2y^2=x^2y+2xy \\ 2\sqrt{x^2-2y-1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2 \end{cases}$

Biến đổi phương trình đầu thành: $\left(x^2-2y\right)(x-y)=0$ kết hợp điều kiện $x^2-2y-1\ge 0$ ta suy ra $x=y$ thay vào phương trình thứ hai ta được

$$2\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2\Rightarrow\begin{cases} \sqrt{x^2-2x-1}\ge 0 \\ \sqrt[3]{x^3-14}\le x-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2x-1\ge 0 \\ x^2-2x-1\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$$

suy ra $x=1\pm\sqrt{2}$

Vậy hệ có nghiệm: $(x;y)=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$

Ví dụ 6) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1} \end{cases}$

Giải: ĐK: $x\ge\dfrac{1}{14}$. Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases} y^2+16x^2-8x+1=\sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 80x^2+2x=2y\sqrt{4-x} \end{cases}$

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta được:

$$y^2-2y\sqrt{14x-1}+14x-1+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{14x-1}\right)^2+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}(1)$$

Ta có: $VT(1)\ge 96x^2-20x+2=\dfrac{1}{2}\left[3(8x-1)^2+8x+1\right]\ge\dfrac{1}{2}(8x+1)$

$$=\frac{1}{6}\left[16x+8x+1+2\right]\ge\frac{1}{2}\sqrt[3]{16x(8x+1)^2}=\sqrt[3]{4x(8x+1)}=VP(1)$$

Suy ra $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{8} \\ y = \sqrt{14x-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Thử lại hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{1}{8} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 7) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2x = \dfrac{121}{9} - 27^{\frac{x}{2}} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$

Giải: Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$

Đây là phương trình bậc hai theo biến y nên cần có điều kiện

$\Delta = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) = -3x^2 + 4x \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{4}{3}$

Do đó $x^2 + 2x + 27^{\frac{x}{2}} \le \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + 2.\dfrac{4}{3} + 27^{\frac{2}{3}} = \dfrac{16}{9} + \dfrac{24}{9} + 9 = \dfrac{121}{9}$

Từ bất đẳng thức trên và phương trình thứ nhất của hệ, ta suy ra $x = \dfrac{4}{3}$

Do đó

$y^2 + \left(\dfrac{4}{3} - 4\right)y + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 - 3.\left(\dfrac{4}{3}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - \dfrac{8}{3}y + \dfrac{16}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(y - \dfrac{4}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x = y = \dfrac{4}{3}$

Ví dụ 8) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y^2 - 8x + 9} - \sqrt[3]{xy + 12 - 6x} \le 1 & (1) \\ \sqrt{2(x-y)^2 + 10x - 6y + 12} - \sqrt{y} = \sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$

Giải: ta có:

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2(x-y)^2 + 10x - 6y + 12} = \sqrt{y} + \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0; x \ge -2 \\ (x-y)^2 + 5x - 3y + 6 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{y} + \sqrt{x+2}\right)^2 \; (3) \end{cases}$

Ta có: $VT(3) = x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 3y + 6 = (x-2)^2 - 2y(x+2) + y^2 + y + x + 2$

$= (y - x - 2)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{x+2}\right)^2 \ge \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{y} + \sqrt{x+2}\right)^2 = VP(3)$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow y = x + 2 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow y = x + 2$. Thay vào (1) ta được:

$\sqrt{x^2 - 4x + 13} - \sqrt[3]{x^2 - 4x + 12} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{t+3} - \sqrt[3]{t+2} \ge 2 \quad (4)$

Trong đó: $t = x^2 - 4x + 10 = (x-2)^2 + 6 \ge 6 \Rightarrow \sqrt[3]{t+2} \ge 2$

Ta có: $t + 3 = 1 + \left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3 = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3 \ge 1 + 2\sqrt[3]{t+2} + \left(\sqrt[3]{t+2}\right)^2$

$\Rightarrow t + 3 \ge \left(1 + \sqrt[3]{t+2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{t+3} - \sqrt[3]{t+2} \ge 1$ (5)

Đẳng thức có khi $t = 6$

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \sqrt{t+3} - \sqrt[3]{t+2} = 1 \Leftrightarrow t = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Ví dụ 9) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \ge 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} \end{cases}$

Giải: Ta có: $y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \ge y^6 + 4xy^3 + 2y^3 + 2x^2$

Mặt khác: $4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \ge 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2}$. nên

$\Rightarrow 8xy^3 + 2y^3 + 1 \ge y^6 + 4xy^3 + 2y^3 + 4x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 1 \ge \sqrt{1 + (2x-y)^2} + \left(y^3 - 2x^2\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - y = 0 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (0;0), \left(\frac{1}{2};1\right), \left(-\frac{1}{2};-1\right)$

Thử lại ta thấy hệ có cặp nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(-\frac{1}{2};-1\right)$

Ví dụ 10) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{1 + \sqrt{1-x^2}} = x\left(1 + 2\sqrt{1-y^2}\right) & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $-1 < x \le 1, -1 < y \le 1 \; \& \; xy \ge 0$

Từ (1) suy ra $0 < x \le 1$. Do đó $0 \le y \le 1$

Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}\right)$ (3)

Ta chứng minh được $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \le \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$ (4)

Thật vậy:

(4) $\Leftrightarrow 2 + x + y + 2\sqrt{xy} + \sqrt{xy}(x+y) \le 2 + 2(x+y) + 2xy$

$\Leftrightarrow\ \left(x-\sqrt{xy}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức luôn đúng với mọi $x, y \in [0;1]$)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=y.

Thay x=y vào (2) ta được: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$ (5)

Đặt x=sint, $t \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ phương trình (5) trở thành: $\sqrt{1+\cos t} = \sin t(1+2\cos t)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}.\left[1+2\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\right] \Leftrightarrow 3\sin\frac{t}{2}-4\sin^3\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{4\pi}{3} \\ t=\dfrac{\pi}{2}+k\dfrac{4\pi}{3} \end{array}\right.(k\in Z)$$

Với $t \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{6} \\ t=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ & $(1;1)$

V) GIẢI HỆ BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH CÙNG BẬC

Cơ sở của pp này là khi 2 phương trình của hệ có thể đưa về dạng phương trình cùng bậc so với x,y thì ta đặt x=ty sau đó đưa về phương trình một ẩn số và giải như bình thường

Ví dụ1) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 2x+3y = x^2+3xy+y^2 \\ x^2+2y^2 = x+2y \end{cases}$

HD: Rõ ràng ban đầu hệ không thuộc dạng đặc biệt nào cả nhưng quan sát kỹ Hs sẽ thấy điểm mấu chốt của bài toán nằm ở vấn đề sau

Ta thấy x=y=0 là một nghiệm của hệ

Xét trường hợp $x, y \neq 0$ hệ đã cho tương đương với

$(2x+3y)(x^2+2y^2)=(x+2y)(x^2+3xy+y^2) \Leftrightarrow x^3+4y^3-3xy^2-2x^2y=0$

Đặt x=ty thế vào phương trình ta có

$$t^3-2t^2-3t+4=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2`-t-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \\ t=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Từ đó ta giải hệ theo 3 trường hợp của t. Sau khi giải xong chú ý việc thử nghiệm để chọn nghiệm chính xác

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x^2y^2 + x^2 + 2x = 2 \\ 2x^2y - x^2y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$

HD: Ta thấy hệ tương đương với $\begin{cases} 2(xy)^2 + (x+1)^2 = 3 \\ 2xy(x+1) - xy^2 = 1 \end{cases}$ Đặt xy=u;x+1=v Ta được hệ đồng bậc

$$\begin{cases} 2u^2 + v^2 = 3 \\ 2uv - u^2 = 1 \end{cases}$$

Trong một số bài tập việc đưa về hệ đồng bậc nhiều khi đòi hỏi những kỹ thật tương đối khó nhưng sau đó ta thường thu được cách giải hệ khá hay. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2y + x = 2 \\ 2x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$

HD:Đặt x=u+a,y=y+b thay vào phương trình đầu của hệ ta có $(u+a)^2 + (v+b)^2 + (u+a)(v+b) + 2(v+b) + u + a = 0$ Để hệ phương trình đồng bậc thì điều kiện cần là trong phương trình không có số hạng bậc nhất.

Suy ra $\begin{cases} 2a + b + 1 = 0 \\ 2b + a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$

Đặt y=u-1 ta có hệ sau: $\begin{cases} x^2 + u^2 + xu = 3 \\ 2x^2 - u^2 = 1 \end{cases}$

Ví dụ 4) Giải hệ phương trìnht: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 7x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$

Giải:

Cách 1: Cộng theo hai vế phương trình của hệ ta được: $(2x + y - 3)(x + y - 2) = 0$. Từ đó dẫn đến 2 trường hợp.

TH1: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

KL: $(1;1), (2;-1)$ là nghiệm của hệ.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} x = a + 1 \\ y = b + 1 \end{cases}$ hệ thành: $\begin{cases} a^2 + b^2 + 3a + 3b + ab = 0 (1) \\ a^2 - 3a - 3b + 2ab = 0 (2) \end{cases}$

Cộng (1) và (2) ta được: $2a^2 + b^2 + 3ab = 0 \Leftrightarrow (2a + b)(a + b) = 0$ suy ra x và y.

Từ đó ta rút ra một kinh nghiệm giải hệ: Nếu ta biết hệ có 1 nghiệm $(x,y)=(a,b)$ **bằng phép đổi biến** $\begin{cases} x=u+a \\ y=v+b \end{cases}$ **ta sẽ thu được hệ mới đơn giản hơn.**

Ví dụ 5) Giải hệ phương trình: Giải hệ pt: $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$

Mỗi vế của hai pt là những biểu thức đồng bậc nên ta nghĩ tới đặt $y=tx$

Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y=tx$. Khi đó hệ thành:

$$\begin{cases} x^3(1+3t)^2=-49 \\ x^2\left(1-8t+t^2\right)=x(8t-17) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\dfrac{-49}{1+3t^2}=\dfrac{-49}{49+3\left(t^2-16\right)}=\dfrac{-49}{49+3a} \\ x=\dfrac{8t-17}{t^2-8t+1}=\dfrac{8t-17}{\left(t^2-16\right)-(8t-17)}=\dfrac{b}{a-b} \end{cases}$$

(Với $a=t^2-16; b=8t-17$)

$$\Rightarrow \frac{-49}{49+3a}=\frac{b^3}{(a-b)^3} \Leftrightarrow 49\left(b^3+(a-b)^3\right)+3a=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[b^2-b(a-b)+(a-b)^2+3\right]=0 \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow t^2=16$$

Thế $t^2=16$ vào hệ $\Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=\pm 4$.

Ví dụ 6) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y\left(x^2-y^2\right)=3x \\ x\left(x^2-y^2\right)=10y \end{cases}$

Ta thấy nếu x=0 thì y=0 và ngược lại nên hệ phương trình đã cho có nghiệm (x;y)=(0;0)

Xét trường hợp $xy \neq 0$

Chia từng vế phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta được:

$$\frac{2y\left(x^2-y^2\right)}{x\left(x^2+y^2\right)}=\frac{3x}{10y} \Leftrightarrow 20y^2\left(x^2-y^2\right)=3x^2\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow 3x^4-17x^2y^2+20y^4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4y^2\right)\left(3x^2-5y^2\right)=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{5}{3}y^2$$

- Nếu $x^2=4y^2$, hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 2y.3y^2=3x \\ x.5y^2=10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3=x \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3=x \\ 2y^4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

- Nếu $x^2=\dfrac{5}{3}y^2$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2y.\dfrac{2}{3}y^2=3x \\ x.\dfrac{8}{3}y^2=10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^3=9x \\ 4xy=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^3=9x \\ 16y^4=135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{15}{2\sqrt[4]{135}} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt[4]{135}}{2} \end{cases}$$

Vậy hê có 5 nghiệm là

$$(x;y)=(0;0),(2;1),(-2;-1),\left(\frac{15}{2\sqrt[4]{135}};\frac{\sqrt[4]{135}}{2}\right),\left(-\frac{15}{2\sqrt[4]{135}};-\frac{\sqrt[4]{135}}{2}\right)$$

VI) GIẢI HỆ BẰNG CÁCH SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ PHỨC.

Ví dụ 1) Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực: $\begin{cases} x^3-3xy^2=-1 \\ y^3-3x^2y=-\sqrt{3} \end{cases}$

Giải: Đây là hệ đẳng cấp bậc ba. Tuy nhiên, nếu giải bằng phương pháp thông thường ta sẽ đi đến giải phương trình bậc ba: $\sqrt{3}t^3+3t^2-3\sqrt{3}t-1=0$. Phương trình này không có nghiệm đặc biệt

Xét số phức $z=x+iy$. Vì $z^3=x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3\right)$, nên từ hệ đã cho ta có:

$z^3=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, ta tìm được 3 giá trị của z là:

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right),\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right),\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$$

Từ đó suy ra hệ đã cho có 3 nghiệm là: $\{x=$

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{2}\cos\frac{2\pi}{9} \\ y=\sqrt[3]{2}\sin\frac{2\pi}{9} \end{cases};\begin{cases} x=\sqrt[3]{2}\cos\frac{8\pi}{9} \\ y=\sqrt[3]{2}\sin\frac{8\pi}{9} \end{cases};\begin{cases} x=\sqrt[3]{2}\cos\frac{14\pi}{9} \\ y=\sqrt[3]{2}\sin\frac{14\pi}{9} \end{cases}$$

Ví dụ 2) Giải hệ phương trình trong tập số phức: $\begin{cases} x^4-6x^2y^2+y^4=\sqrt{3} \\ x^3y-y^3x=\frac{1}{4} \end{cases}$

Giải: Xét số phức $z=x+iy$. Vì $z^4=x^4-6x^2y^2+y^4+4i\left(3x^3y-y^3x\right)$, nên từ hệ đã cho suy ra:

$$z^4=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\qquad (*)$$

Các số phức thỏa mãn (*):

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right),\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24}+i\sin\frac{13\pi}{24}\right),\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24}+i\sin\frac{25\pi}{24}\right),\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24}+i\sin\frac{37\pi}{24}\right)$$

vậy các nghiệm cần tìm của hệ là:

$$\begin{cases} x=\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{24} \\ y=\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{24} \end{cases};\begin{cases} x=\sqrt[4]{2}\cos\frac{13\pi}{24} \\ y=\sqrt[4]{2}\sin\frac{13\pi}{24} \end{cases};\begin{cases} x=\sqrt[4]{2}\cos\frac{25\pi}{24} \\ y=\sqrt[4]{2}\sin\frac{25\pi}{24} \end{cases};\begin{cases} x=\sqrt[4]{2}\cos\frac{37\pi}{24} \\ y=\sqrt[4]{2}\sin\frac{37\pi}{24} \end{cases}$$

Ví dụ 3) Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + \dfrac{16x - 11y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y - \dfrac{11x + 16y}{x^2 + y^2} = -1 \end{cases}$

Giải: ĐK: $x^2 + y^2 \neq 0$. Đặt $z = x + iy.$ Ta có: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}$

Vì hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau, nên hệ đã cho tương đương với:

$$x + \frac{16x - 11y}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{11x + 16y}{x^2 + y^2}\right) = 7 - i \Leftrightarrow x + yi + 16\frac{x - iy}{x^2 + y^2} - 11i\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = 7 - i$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{16 - 11i}{z} = 7 - i \Leftrightarrow z^2 - (7 - i)z + 16 - 11i = 0$$

Phương trình $z^2 - (7 - i)z + 16 - 11i = 0$ có 2 nghiệm $z = 2 - 3i, z = 5 + 2i$ nên hệ đã cho có các nghiệm: $(x; y) = (2; -3)$ hoặc $(x; y) = (5; 2)$

Chú ý: Muốn giải được các hệ phương trình bằng phương pháp sử dụng số phức, cần nhớ một công thức cơ bản của số phức, đặc biệt là với mỗi số phức $z = x + iy$ thì ta có $x^2 + y^2$ là phương trình môđun và $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$

Ví dụ 4) Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} \sqrt{10x}\left(1 + \dfrac{3}{5x + y}\right) = 3 \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{3}{5x + y}\right) = -1 \end{cases}$

Giải: Từ hệ suy ra $x > 0, y > 0$.

Bài hệ này không có ngay dạng như trên, tuy nhiên với mục đích chuyển mẫu về dạng bình phương môđun của số phức, chỉ cần đặt $u = \sqrt{5x}, v = \sqrt{y}$ với $u, v > 0$.

Hệ đã cho có dạng: $\begin{cases} u\left(1 + \dfrac{3}{u^2 + v^2}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ v\left(1 - \dfrac{3}{u^2 + v^2}\right) = -1 \end{cases}$

Đặt $z = u + iv$. Ta có: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{u - vi}{u^2 + v^2}$. Hệ đã cho tương đương với:

$$u\left(1 + \frac{3}{u^2 + v^2}\right) + iv\left(1 - \frac{3}{u^2 + v^2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - i \Leftrightarrow u + iv + 3\frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} - i$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{3}{z} + \frac{3\sqrt{2} - 2i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - \left(3\sqrt{2} - 2i\right)z + 6 = 0(*)$$

Giải pt(*), ta có: $\Delta' = -34 - 12\sqrt{2}i = \left(\sqrt{2} - 6i\right)^2$, suy ra các nghiệm là

$z = \sqrt{2} - 2i, z = \dfrac{\sqrt{2} + 2i}{2}$

Vì $u, v > 0$ nên $z = \dfrac{\sqrt{2} + 2i}{2}$, do đó $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, v = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{10}, y = 1$

Vậy nghiệm cần tìm là $(x; y) = \left(\dfrac{1}{10}; 1\right)$

Ví dụ 5) Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{12}{3x + y}\right) = 2 \\ \sqrt{y}\left(1 + \dfrac{12}{3x + y}\right) = 6 \end{cases}$

Giải: Từ hệ suy ra $x > 0, y > 0$. Đặt $u = \sqrt{3x}, v = \sqrt{y}\,(u, v > 0)$.

Hệ đã cho có dạng: $\begin{cases} u\left(1 - \dfrac{12}{u^2 + v^2}\right) = 2\sqrt{3} \\ v\left(1 + \dfrac{12}{u^2 + v^2}\right) = 6 \end{cases}$.

Đặt $z = u + iv$. Ta có: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{u - vi}{u^2 + v^2}$. Hệ đã cho tương đương với:

Từ đó hệ đã cho ta có $u\left(1 - \dfrac{12}{u^2 + v^2}\right) + iv\left(1 + \dfrac{12}{u^2 + v^2}\right) = 2\sqrt{3} + 6$

$\Leftrightarrow u + iv - 12\dfrac{u - iv}{u^2 + v^2} = 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z - \dfrac{12}{z} = 2\sqrt{3} + 6i$

$\Leftrightarrow z^2 - 2\left(\sqrt{3} + 3i\right)z - 12 = 0(*)$

Giải pt(*), ta có $\Delta' = 6 + 6\sqrt{3}i = 3\left(\sqrt{3} + i\right)^2$

suy ra các nghiệm $z = \sqrt{3} + 3 + \left(\sqrt{3} + 3\right)i, z = \sqrt{3} - 3 + \left(3 - \sqrt{3}\right)i$

Vì $u, v > 0$ nên ta có $u = \sqrt{3} + 3, v = \sqrt{3} + 3$, suy ra nghiệm của hệ là: $(x; y) = \left(4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3}\right)$.

MỘT SỐ BÀI TẬP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Biên soạn: NGUYỄN TRUNG KIÊN 0988844088

1) $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 4 \\ x(x - y + 1) + y(y - 1) = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x+y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y = 7 \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} = 4 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \dfrac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{17}{4} \\ x(x+y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x^2 + 5xy + 2y^2 + x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4xy + 12x + 12y + 10 = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 2y = 2 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} \sqrt{2}(x - y) = \sqrt{xy} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$ 16) $\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 48 \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2xy + 3x + 4y = -6 \\ x^2 + 4y^2 + 4x + 12y = 3 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x - y + \dfrac{2y}{x} = -2 \\ 2xy - 2y^2 + x = 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^2 + 2xy = 7x + 5y - 9 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x^2y + 2x + 3y = 6 \\ 3xy + x + y = 5 \end{cases}$

21) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ y^2 - xy + 5x + 4y = 9 \end{cases}$ 22) $\begin{cases} 2x^2y^2 + x^2 + 2x = 2 \\ 2x^2y - x^2y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1 + 2x + y \\ 2y^2 + 2x + y + 1 = 6xy \end{cases}$ 24) $\begin{cases} x^2y^2 + y^4 + 1 = 3y^2 \\ xy^2 + x = 2y \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2y - x + 6y^2 + y\sqrt{x - 2y} = 0 \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 2y}} - x - 3y = 2 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} 2x^2 + x - \dfrac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$

29) $\begin{cases} x^2y+y=2 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+x^2y^2=3 \end{cases}$

30) $\begin{cases} x^3+y^2x+3x^2+y^2+3x-2y+1=0 \\ 2y^3+xy^2+y^2-3x-3=0 \end{cases}$

31) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x}(1) \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3(2) \end{cases}$

32) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2}\,(1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1(2) \end{cases}$

33) $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

34) $\begin{cases} x^2y+2y+x=4xy \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}=3 \end{cases}$

35) $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$

36) $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$

37) $\begin{cases} x+y+xy\left(2x+y\right)=5xy \\ x+y+xy\left(3x-y\right)=4xy \end{cases}$

38) $\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=41 \\ xy\left(x^2+y^2\right)=10 \end{cases}$

39) $\begin{cases} x^2y+y^3=x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

40) $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5(x^2+1) \end{cases}$

41) $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2(x^2+1)+7y \end{cases}$

42) $\begin{cases} x^2+y^2+x^2y^2=1+2xy \\ x+x^2y+xy=y+xy^2+1 \end{cases}$

43) $\begin{cases} \left(4x^2+x\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases}$

44) $\begin{cases} x^3-3x^2=y^3-3y-2 \\ \log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)=\left(x-3\right)^3 \end{cases}$

45) $\begin{cases} e^{x-y}=\dfrac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2+3}+1=6\sqrt{2y^2-2y+1}+8y \end{cases}$ $x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

46) $\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0 \end{cases}$

47) $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^y=-xy-\dfrac{3}{2} \\ (x^2y+2x)^2-2x^2y+1-4x=0 \end{cases}$

48) $\begin{cases} 2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3(2\sqrt{y}-\sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x+y}=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

49) $\begin{cases} x^2+y^2+xy+2y+x=2 \\ 2x^2=2+y^2+2y \end{cases}$

50) $\begin{cases} x^2+2y^2+2x+8y+6=0 \\ x^2+xy+y+4x+1=0 \end{cases}$

51) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^3+2y^3=y+2x \end{cases}$

52) $\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ 2(x^3+y^3)+6x^2=5+3(x^2+y^2) \end{cases}$

53) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7} \end{cases}$

54) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4+y^4+6x^2y^2+20xy=81 \end{cases}$

55) $\begin{cases} \sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt[3]{xy+12-6x}\le 1 \\ \sqrt{2(x-y)^2+10x-6y+12}-\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \end{cases}$

56) $\begin{cases} y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1} \end{cases}$

57) $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 4xy^3+y^3+\dfrac{1}{2}\ge 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$

58) $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$

59) $\begin{cases} (x-2)(2y-1)=x^3+20y-28 \\ 2\left(\sqrt{x+2y}+y\right)=x^2+x \end{cases}$

60) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x} \end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R})$

61) $\begin{cases} 6\dfrac{x}{y}-2=\sqrt{3x-y}+3y \\ 2\sqrt{3x+\sqrt{3x-y}}=6x+3y-4 \end{cases}$

62) $\begin{cases} 2x+y+2\sqrt{4x+y}=1 \\ \sqrt{46-16y(x+y)-6y}+4\sqrt{4x+y}=8-4y \end{cases}$

63) $\begin{cases} \sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-y}=2 \\ x^2-y^4+9y=x\left(9+y-y^3\right) \end{cases}$

64) $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x=2 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}=-2 \end{cases}$

65) $\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \\ \sqrt{y-1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0 \end{cases}$

66) $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \end{cases}$

67) $\begin{cases} 2x-y+\sqrt{x-1}\ge\sqrt{2(x-1)+2(2x-y)^2} \\ y^2+4x\sqrt{x-1}-17=0 \end{cases}$

68) $\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) \\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}=\sqrt{x-y} \end{cases}$

69) $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{3x-2xy+1}=4xy+3x+1 \end{cases}$

70) $\begin{cases} x^2y+y^3=x^4+x^6 \\ 2x+\sqrt{1+y}=\dfrac{\sqrt{(1+y)^3}}{1-x^2} \end{cases}$

72)
$$\begin{cases} 2-\sqrt{x^2y^4+2xy^2+y^4-1}=2(3-\sqrt{2}-x)y^2 \\ \sqrt{x-y^2}+x=3 \end{cases}$$

73)
$$\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

74) $$\begin{cases} 6x^2y+2y^3+35=0 \\ 5x^2+5y^2+2xy+5x+13y=0 \end{cases}$$

75) $$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}=y+1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$$

76) $$\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$$

71) $$\begin{cases} x^2\sqrt{y+1}-2xy-2x=1 \\ x^3-3x-3xy=6 \end{cases}$$

77)
$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1=4\left(x+y\right)^2+\sqrt{3x+3y} \\ 12x\left(2x^2+3y+7xy\right)=-1-12y^2\left(3+5x\right) \end{cases}$$

78)
$$\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3\left(2-y\right)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \end{cases}$$

79) $$\begin{cases} \left(2x^2-1\right)\left(2y^2-1\right)=\dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases}$$

80) $$\begin{cases} y+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-12y+1}=\dfrac{1}{12}\left(x^2+17\right) \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2} \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo:

Toán học và tuổi trẻ.
Diễn đàn math.vn
Phương pháp giải hệ phương trình: Thầy Nguyễn Minh Nhiên
Tài liệu trên internet