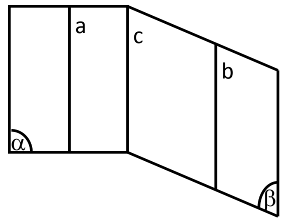
Chuyên đề 5: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. QUAN HỆ SONG SONG

I. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG



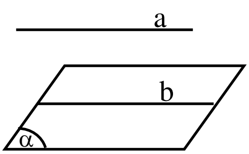
– *Định nghĩa:* a // b

$\Leftrightarrow$ a $\cap$ b = $\varnothing$ và a, b $\subset$ (α)

– *Định lí 1:*

$\begin{cases} a // b \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = c$ cùng song song với a và b hoặc trùng với a hoặc b

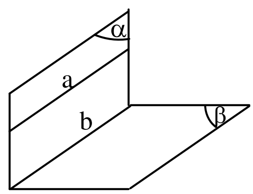
II. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG



– *Định nghĩa:* a // (α) $\Leftrightarrow$ a $\cap$ (α) = $\varnothing$

– *Định lí 2:* (Tiêu chuẩn song song)

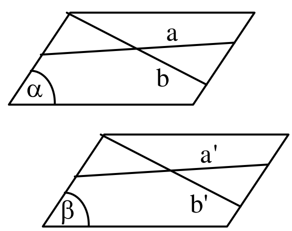
$$a // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} a // b, b \subset (\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases}$$



– *Định lí 3:*

$$\left.\begin{matrix} a // (\alpha) \\ a \subset (\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = b // a$$

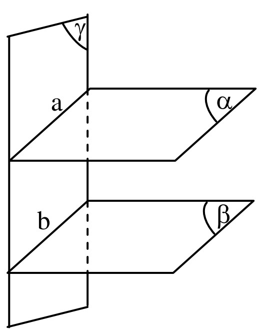
III. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG



– *Định nghĩa:* (α) // (β) $\Leftrightarrow$ (α) $\cap$ (β) = $\varnothing$

– *Định lí 4:* (tiêu chuẩn song song)

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \text{ cắt nhau} \subset (\alpha) \\ a // a', b // b', a'.b' \subset (\beta) \end{cases}$$



– *Định lí 5:*

$$\begin{cases} \alpha // (\beta) \\ \gamma \cap (\alpha) = a \\ \gamma \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$$

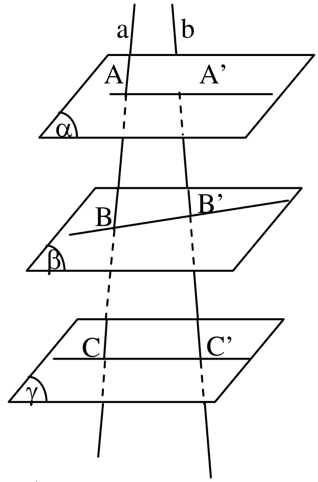
– *Định lí 6:* (Định lí Talet trong không gian)

Các mặt phẳng song song định trên hai cát tuyến những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$(\alpha) // (\beta) // \gamma \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

AA', BB', CC' // (α)

$\Leftrightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

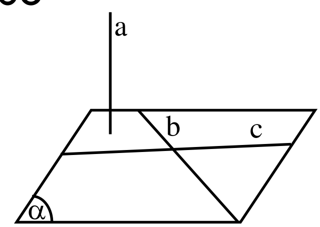


2. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

– *Định nghĩa:* $a \perp (\alpha)$

$\Leftrightarrow a \perp b, \forall b \subset (\alpha)$



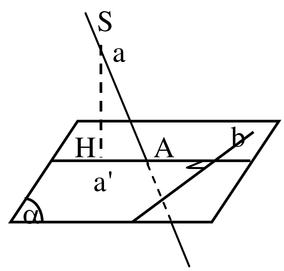
– *Định lí 1:* (Tiêu chuẩn vuông góc)

$$a \perp (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} a \perp b \\ a \perp c \\ b, c \text{ cắt nhau trong } \alpha \end{cases}$$

– *Định lí 2:* (Định lý 3 đường vuông góc)

a có hình chiếu a' trên mặt phẳng α chứa b.

$a \perp b \Leftrightarrow a' \perp b$

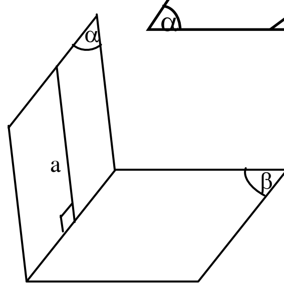


II. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

– *Định nghĩa:* $(\alpha) \perp (\beta)$

$\Leftrightarrow ((\alpha),(\beta)) = 1$ vuông

$\Leftrightarrow a \perp b, \forall b \subset (\alpha)$

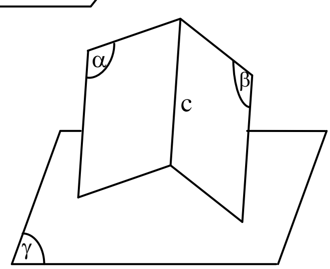


– *Định lí 3:* (Tiêu chuẩn vuông góc)

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases}$$

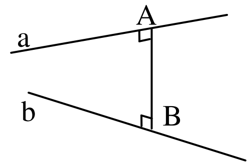
– Định lí 4:

$$\begin{cases} (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow c \perp (\gamma)$$



3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

I. ĐỊNH NGHĨA



AB là đoạn vuông góc chung của a và b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \in a,\ B \in b \\ AB \perp a,\ AB \perp b \end{cases}$$

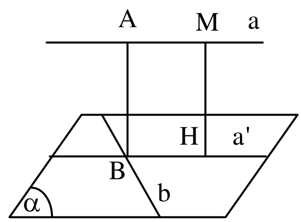
II. DỰNG ĐOẠN VUÔNG GÓC CHUNG

1. $a \perp b$

– Qua b dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại A

– Trong (α) dựng qua A, $AB \perp b$ tại B

AB là đoạn vuông góc chung.



2. $a \perp b$

Cách 1:

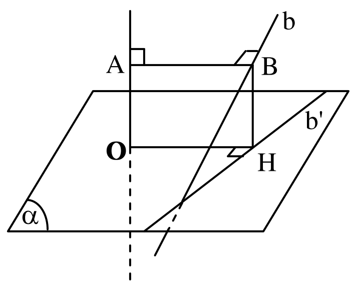
– Qua b dựng mặt phẳng (α) // a

– Lấy M trên a, dựng $MH \perp \alpha$

– Qua H dựng a' // a cắt b tại B

– Từ B dựng BA // MH cắt a tại A

AB là đoạn vuông góc chung.



Cách 2:

– Lấy O trên a

– Qua O dựng mặt phẳng $\alpha \perp a$ tại O

– Dựng hình chiếu b' của b trên α.

– Dựng $OH \perp b'$.

– Từ H dựng đường thẳng // a cắt b tại B.

– Qua B dựng đường thẳng // OH cắt a tại A.

AB là đoạn vuông góc chung.

III. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

$d(a, b) = AB$ độ dài đường vuông góc chung

(α) chứa b và (α) // a thì

$$d(a, b) = d(a, (\alpha))$$

✓ *Vấn đề 1:* HÌNH CHÓP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

HÌNH CHÓP

I. ĐỊNH NGHĨA

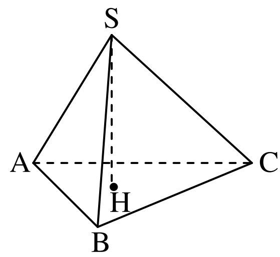
Hình chóp là hình đa diện có 1 mặt là đa giác, các mặt khác là tam giác có chung đỉnh.

Chiều cao h là khoảng cách từ đỉnh tới đáy.

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Đỉnh của hình chóp đều có hình chiếu là tâm của đáy.

Hình chóp tam giác còn gọi là tứ diện hình tứ diện.



Hình tứ diện là hình chóp tam giác có đáy là mặt nào cũng được, đỉnh là điểm nào cũng được.

Hình tứ diện đều là hình tứ diện có các cạnh bằng nhau.

II. DIỆN TÍCH

Diện tích xung quanh của hình chóp đều:

$$S_{xq} = \frac{1}{2}\text{nad}$$

n: số cạnh đáy;

a: độ dài cạnh đáy

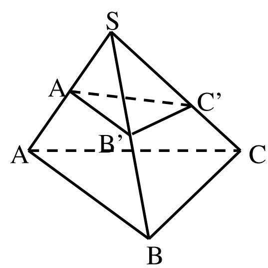
d: độ dài trung đoạn

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + B$ B là diện tích đáy

III. THỂ TÍCH

Thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$

Thể tích tứ diện: $V = \frac{1}{6}dab.\sin\alpha$



a, b: độ dài hai cạnh đối

d: độ dài đoạn vuông góc chung

α: góc của hai cạnh đối.

Tỉ số thể tích của hai hình chóp tam giác có chung đỉnh và 3 cạnh bên.

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$

HÌNH CHÓP CỤT

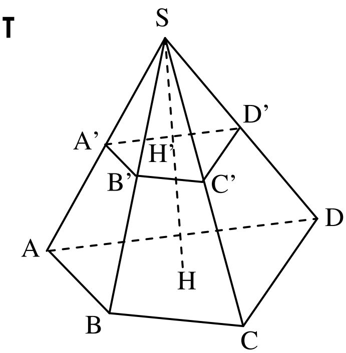
I. ĐỊNH NGHĨA

Hình chóp cụt là phần hình chóp nằm giữa đáy và thiết diện song song với đáy.

Hình chóp cụt từ hình chóp đều gọi là hình chóp cụt đều.

$$A'B'C'D' \backsim ABCD$$

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$$



II. DIỆN TÍCH

$$S_{tp} = s_{xq} + B + B'$$

Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều: $S_{xq} = \frac{1}{2}(na + na').d$

n: số cạnh đáy; a, a': cạnh đáy

d: độ dài trong đoạn, chiều cao của mặt bên

III. THỂ TÍCH

$V = V_1 - V_2$ V: thể tích hình chóp cụt

V_1: thể tích hình chóp V_2: thể tích hình chóp trên

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{SH}{SH'}\right)^3 \qquad V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'})$$

B, B' là diện tích đáy h là chiều cao

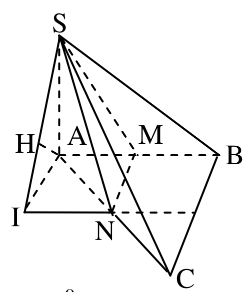
B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Giải

- *Tính thể tích khối chóp S.BCNM.*



- $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABC)$.
- $\begin{cases}BC//(SMN)\\(SMN)\cap(ABC)=MN\end{cases} \Rightarrow MN//BC$.
- $\begin{cases}AB\perp BC & (\text{giả thiết})\\SB\perp BC & (BC\perp(SAB))\end{cases} \Rightarrow \left((SBC),(ABC)\right) = SBA = 60^0$.
- Trong tam giác vuông SBA ta có SA = AB.tan $SBA = 2a\sqrt{3}$.
- Diện tích hình thang BCNM là S = $\frac{1}{2}(BC+MN)BM = \frac{1}{2}(2a+a)a = \frac{3a^2}{2}$.
- $V_{S.BCNM} == \frac{1}{3}S_{BCNM}.SA = \frac{1}{3}\frac{3a^2}{2}2a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

■ *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN.*

Dựng một mặt phẳng chứa SN và song song với AB bằng cách vẽ NI song song với AB sao cho AMNI là hình vuông. Suy ra AB // (SNI).

Ta có AB // (SNI) $\Rightarrow$ d(AB,SN) = d(A, (SNI)).

Vẽ AH vuông góc với SI tại H.

Dễ dàng thấy AH $\perp$ (SNI) $\Rightarrow$ d(AB,SN) = d(A, (SNI)) = AH.

Trong tam giác vuông SAI ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{12a^2}$.

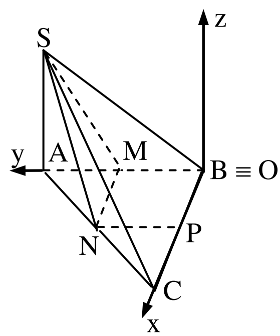
Suy ra: d(AB, SN) = $AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Cách 2:

Bài toán trên ta sử dụng *cách 2* bằng cách xây dựng mặt phẳng (SNI) chứa SN và song song với AB, và khi đó d(AB, SN) = d(A, (SNI)).

Cách 3:

Xét hệ trục Oxyz như hình vẽ.



- A$\in$ Oy nên $x_A = z_A = 0$, còn y_A = BA = 2a
  $\Rightarrow$ A(0; 2a; 0)
- B $\equiv$ O $\Rightarrow$ B(0; 0; 0)
- C$\in$ Ox nên $y_C = z_C = 0$, còn x_C = BC = 2a
  $\Rightarrow$ C(2a; 0; 0)
- S$\in$ (Oyz) nên $x_S = 0$, còn y_S = BA = 2a và
  z_S = SA = $2a\sqrt{3} \Rightarrow$ S(0; 2a; $2a\sqrt{3}$)
- M$\in$ Oy nên $x_M = z_M = 0$, còn y_M = BM = a$\Rightarrow$ M(0; a; 0)
- N$\in$ (Oxy) nên $z_N = 0$, còn x_N = BP = a và y_N = BM = a $\Rightarrow$ N(a; a; 0)

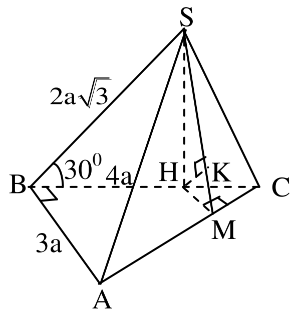
  Ta có: d(AB, SN) = $\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SN}\right]\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SN}\right]\right|} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết SB $= 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Giải

- Vẽ SH vuông góc với BC tại H.
  Vì (SBC) $\perp$ (ABC) nên SH $\perp$ (ABC).



- $SH = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$.
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = 6a^2$.
- $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = 2a^3\sqrt{3}$.
- Vẽ HM vuông góc với AC tại M
  $\Rightarrow BC \perp (SHM)$.
  Vẽ HK vuông góc với SM tại K
  $\Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK = d(H, (SAC))$.
- $BH = SB.\cos 30^0 = 3a \Rightarrow HC = a \Rightarrow BC = 4HC$
  $\Rightarrow d(B, (SAC)) = 4d(H, (SAC))$
- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$
- ΔBCA đồng dạng $\Delta MCH \Rightarrow \frac{HM}{HC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow HM = \frac{AB.HC}{AC} = \frac{3a}{5}$.
- ΔSAM vuông tại H có HK là đường cao nên:
  $$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{25}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$$
- Vậy $d(B,(SAC)) = 4HK = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$

Cách 2:

Ta có thể tính: $d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}}$.

Ta có: +) $AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp SB \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 + AB^2} = a\sqrt{21}$.

+) $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = 2a$.

Mà $AC = 5a$ nên $SA^2 + SC^2 = AC^2$, suy ra tam giác SAC vuông tại S.

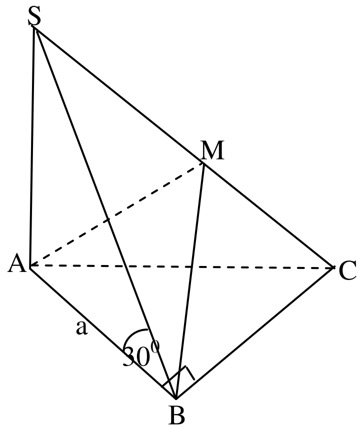
Do đó: $S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SA.SC = a^2\sqrt{21}$

Vậy $d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3.2a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{21}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 3: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB=a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30^0. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tính thể tích của khối chóp S.ABM theo a.

Giải



BC vuông góc với mặt phẳng SAB

Góc $SBA = 30^0$ nên SA $= \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$d(M,(SAB)) = \dfrac{1}{2} d(C,(SAB)) = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$

Vậy $V_{S.ABM} = V_{M.SAB} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{\sqrt{3}}a\right).\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Cách 2:

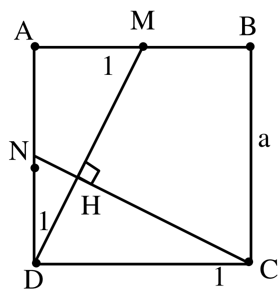
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$

$\dfrac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Giải



$S_{(NDCM)} = a^2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2}a = \dfrac{5a^2}{8}$ (đvdt)

$\Rightarrow V_{(S.NDCM)} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}\dfrac{5a^2}{8} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{24}$ (đvtt)

$NC = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Ta có 2 tam giác vuông AMD và NDC bằng nhau

Nên góc NCD = ADM . Vậy DM vuông NC

Vậy ta có: $DC^2 = HC.NC \Rightarrow HC = \dfrac{a^2}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Ta có tam giác SHC vuông tại H, và khoảng cách của DM và SC chính là chiều cao h vẽ từ H trong tam giác SHC

Nên $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow h = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

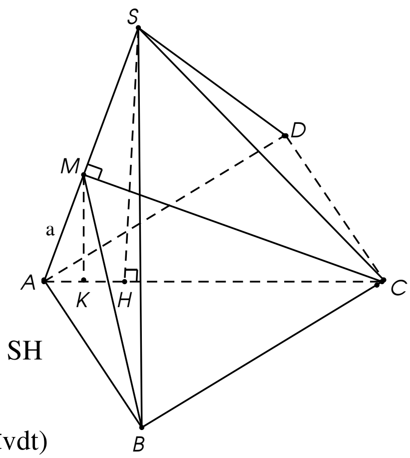
Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên *SA* = *a*; hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* trên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm *H* thuộc đoạn *AC*, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi *CM* là đường cao của tam giác *SAC*. Chứng minh *M* là trung điểm của *SA* và tính thể tích khối tứ diện *SMBC* theo *a*.

Giải

Ta có $SH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

$$SC = \sqrt{\frac{14a^2}{16} + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{32a^2}{16}} = a\sqrt{2} = AC$$



Vậy ΔSCA cân tại C nên đường cao hạ từ C xuống ΔSAC chính là trung điểm của SA.

Từ M ta hạ K vuông góc với AC, nên $MK = \frac{1}{2}SH$

Ta có $V(S.ABC) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\right).\frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24}$ (đvdt)

Nên *V(MABC) = V(MSBC) =* $\frac{1}{2}$ *V(SABC) =* $\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$ (đvdt)

Bài 6: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = SB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD.

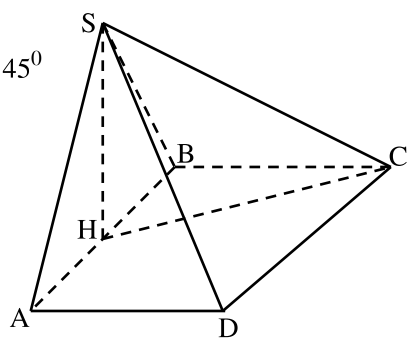
Giải

Gọi H là trung điểm AB.

Ta có tam giác vuông SHC, có góc $\widehat{SCH} = 45^0$ nên là tam giác vuông cân

Vậy $HC = SH = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$$V = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^3\sqrt{5}}{6} \text{ (đvtt)}$$



Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

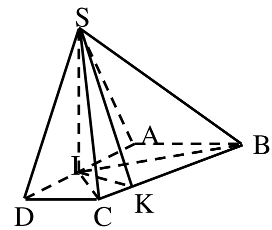
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a; CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải

(SIB) $\perp$ (ABCD) và (SIC) $\perp$ (ABCD)

Suy ra SI $\perp$ (ABCD)

Kẻ IK $\perp$ BC (K $\in$ BC) $\Rightarrow$ BC $\perp$ (SIK) $\Rightarrow$ $\widehat{SKI} = 60^o$



Diện tích hình thang ABCD: $S_{ABCD} = 3a^2$

Tổng diện tích các tam giác ABI và CDI bằng $\frac{3a^2}{2}$

Suy ra $S_{\Delta IBC} = \frac{3a^2}{2}$

$$BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IK = \frac{2S_{\Delta IBC}}{BC} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$$

$$\Rightarrow SI = IK.\tan \widehat{SKI} = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$$

Thể tích khối chóp: S.ABCD: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SI = \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}$ (đvtt)

Bài 8: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP. Tính theo a thể tích của khối tứ diện AMNP.

Giải

Gọi I là trung điểm AB

Ta có: MN // AB // CD và SP $\perp$ CD $\Rightarrow$ MN $\perp$ SP

ΔSIP cân tại S, $SI^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow SI = SP = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, ta có $SO^2 = SI^2 - OI^2 = \frac{7a^2}{4} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{6a^2}{4}$

$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, H là hình chiếu vuông góc của P xuống mặt phẳng SAB

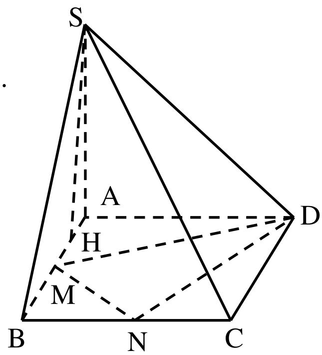
Ta có $S_{(SIP)} = \frac{1}{2}SO.IP = \frac{1}{2}PH.SI \Rightarrow PH = \frac{SO.IP}{SI} = \frac{a\sqrt{6}}{2}a\frac{2}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

$$V = \frac{1}{3}S_{(AMN)}.PH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}(\text{đvtt})$$

Bài 9: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Giải



- Gọi H là hình chiếu của S lên SA

  $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ do đó SH đường cao hình chóp.
- Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$ nên

ΔSAB vuông tại S, suy ra $SM = \frac{AB}{2} = a$

- ΔSAM đều cao bằng a $\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- $S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$
- Thể tích khối chóp S.BMDN là: $V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}(\text{đvtt})$
- *Tính cosin:* Kẻ ME // DN ($E \in AD$), suy ra $AE = \frac{a}{2}$

  Đặt φ là góc giữa hai đường SM và DN, ta có $\left(SM, ME\right) = \varphi$
- Theo định lý 3 đường vuông góc, ta có $SA \perp AE$.

  Suy ra: $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

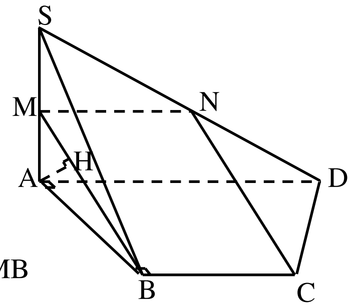
  Tam giác SME cân tại E nên $SME = \varphi$ và gọi I là trung điểm SM

  $\Rightarrow MI = \frac{SM}{2} = \frac{a}{2}$. Khi đó: $\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Bài 10: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $BAD = ABC = 90^0$, AB = BC = a, AD = 2a, SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh rằng BCNM là hình chữ nhật và tính thể tích của khối chóp S.BCNM theo a.

Giải



Ta có: $\begin{cases} MN // AD \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow MN // BC$

$$MN = \frac{1}{2}AD = a = BC$$

Suy ra: BCNM là hình bình hành

Mặt khác: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp (SAB) \\ MB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp MB$

$\Rightarrow$ BCNM là hình bình hành có 1 góc vuông nên BCNM là hình chữ nhật

Gọi H là đường cao ΔAMB.

Suy ra $\begin{cases} AH \perp MB \\ AH \perp BC \ (BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCNM)$

Do M là trung điểm SA nên: $d\left(A,(BCNM)\right) = d\left(S,(BCNM)\right) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$V_{S.BCMN} = \frac{1}{3}S_{BCMN}.AH = \frac{1}{3}\left(a.a\sqrt{2}\right).\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{3} \text{ (đvtt)}$$

Bài 11: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP

Giải

Chứng minh $AM \perp BP$ và tính thể tích khối tứ diện CMNP

Gọi H là trung điểm của AD. Do ΔSAD đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp BP$ (1)

Xét hình vuông ABCD ta có $\Delta CDH = \Delta BCP$

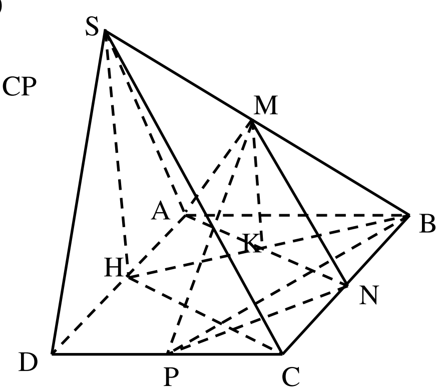
$\Rightarrow CH \perp BP$ (2). Từ (1) và (2)

suy ra $BP \perp (SHC)$. Vì MN // SC

và AN // CH nên (AMN) // (SHC).

Suy ra $BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$.

Kẻ $MK \perp (ABCD)$, $K \in (ABCD)$.



Ta có: $V_{CMNP} = \frac{1}{3}MK.S_{CNP}$

Vì $MK = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $S_{CNP} = \frac{1}{2}CN.CP = \frac{a^2}{8}$ nên $V_{CMNP} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (đvtt)

Bài 12: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Cho hình chóp tứ giác S. ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC theo a.

Giải

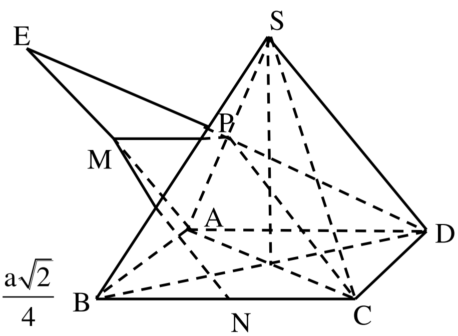
Gọi P là trung điểm của SA. Ta có MNCP là hình bình hành nên MN song song với mặt phẳng (SAC).

Mặt khác, BD ⊥ (SAC) nên BD ⊥ MN

MN // (SAC)

nên d(MN; AC) = d(N; (SAC))

Vậy $d(MN; AC) = \frac{1}{2}d(B;(SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$



Bài 13: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Giải

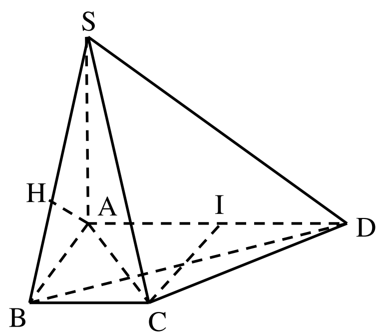
Gọi I là trung điểm của AD. Ta có:

IA = ID = IC = a ⇒ CD ⊥ AC.

Mặt khác, CD ⊥ SA. Suy ra CD ⊥ SC nên tam giác SCD vuông tại C.

Trong tam giác vuông SAB ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$$



Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mặt phẳng (SCD) thì

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1.$$

Ta có: $d_1 = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}} = \frac{SA.S_{BCD}}{S_{SCD}}$. Mà $S_{BCD} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a^2$

và $S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}.\sqrt{IC^2 + ID^2} = a^2\sqrt{2}$.

Suy ra $d_1 = \frac{a}{2}$

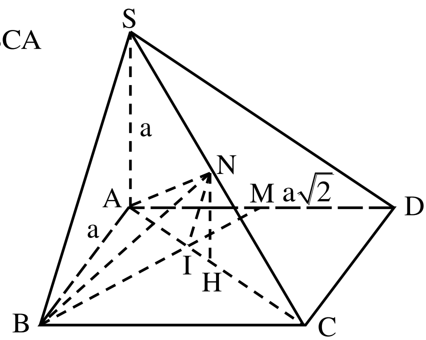
Vậy khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) là: $d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}$

Bài 14: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là hai trung điểm của AD và SC. I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Giải

Xét ΔABM và ΔBCA vuông có $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC}$



$\Rightarrow \Delta$ ABM đồng dạng Δ BCA $\Rightarrow ABM = BCA$

$\Rightarrow AMB + BAC = BCA + BAC = 90^o$

$\Rightarrow AIB = 90^o \Rightarrow MB \perp AC$ (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MB \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$.

Gọi H là trung điểm của AC

$\Rightarrow$ NH là đường trung bình của Δ SAC

$\Rightarrow NH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$ và NH // SA nên $NH \perp (ABI)$

Do đó $V_{ANIB} = \frac{1}{3}NH.S_{\Delta AIB}$.

$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $BI^2 = AB^2 - AI^2$

$\Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABI} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_{ANIB} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ (đvtt)

Bài 15: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Giải

Thể tích của khối chóp A.BCMN.

Gọi K là trung điểm của BC

H là hình chiếu vuông góc của A trên SK.

Do BC ⊥ AK, BC⊥ SA nên BC ⊥ AH.

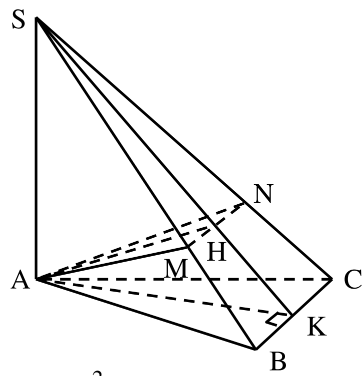
Do AH ⊥ SK, AH ⊥ BC nên AH ⊥ (SBC).

Xét tam giác vuông SAK:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$$

Xét tam giác vuông SAB:

$$SA^2 = SM.SB \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4}{5}$$



Xét tam giác vuông SAC: $SA^2 = SN.SC \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4}{5}$

Suy ra: $\frac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \frac{16}{25} \Rightarrow S_{BCMN} = \frac{9}{25} S_{SBC} = \frac{9\sqrt{19}a^2}{100}$.

Vậy thể tích của khối chóp A.BCMN là $V = \frac{1}{3}.AH.S_{BCMN} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$ (đvtt)

Bài 16:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^0 < φ < 90^0$). Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

Giải

Ta có góc của cạnh bên và mặt đáy bằng φ.

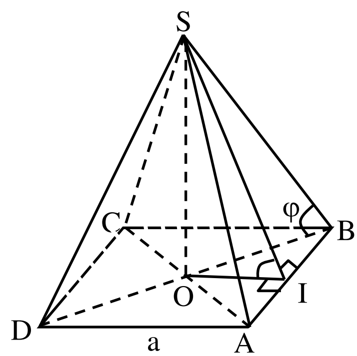
Suy ra $SBO = φ$

ΔSOB có $\tan φ = \frac{SO}{BO} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan φ$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vẽ} \quad OI \perp AB \\ \text{Ta có} \quad SO \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SIO)$$

⇒ Góc của (SAB) và (ABCD) là SIO.

$$\tan SIO = \frac{SO}{IO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan φ}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}\tan φ$$

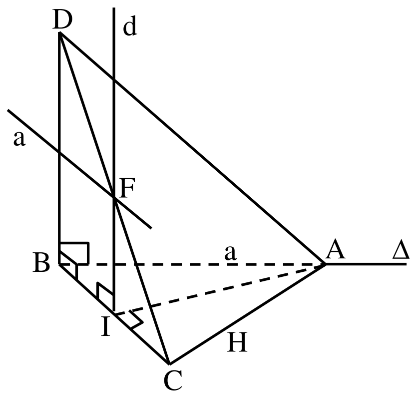


$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan φ.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan φ \text{ (đvtt)}$$

Bài 17:

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với AB = a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

Giải



Gọi I là trung điểm của BC. (d) qua I, (d) ⊥ (ABC) là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC vuông cân tại A.

(d) ∩ (DC) = F là trung điểm DC

(do BF là trung tuyến trong Δ vuông)

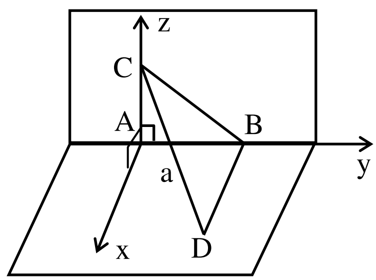
⇔ F là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện:

$R = FD = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $\quad (BC = a\sqrt{2}\,;\, BD = a)$

Ta có : $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ BD \subset (Q) \\ BD \perp (Q) \end{cases}$

Mà AI ⊂ (P) ⇒ BD ⊥ AI, BC ⊥ AI (do ΔABCD vuông cân)

$\Rightarrow AI \perp (BDC) \Rightarrow d(A,(BDC)) = AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Cách 2: Chọn hệ trục Axyz sao cho A(0; 0; 0)

B(0; a; 0) D(a; a; 0) C(0; 0; a) I(x; y; z)

ycbt ⇔ IA = IB = IC = ID = R

$\Leftrightarrow\ x = y = z = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow R = IA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mặt phẳng (BCD) có VTPT $\vec{n} = \left(0;\, a^2;\, a^2\right) = a^2\left(0;\, 1;\, 1\right)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (BCD):

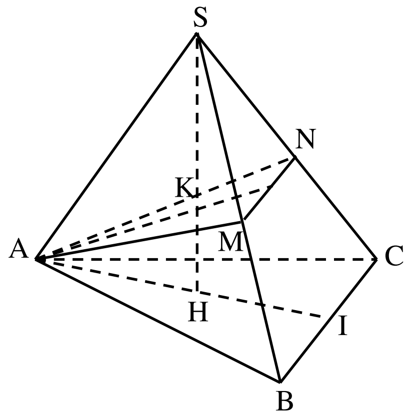
$$y + z - a = 0 \Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Bài 18:

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng SBC).

Giải



Gọi SH là đường cao hình chóp SABC.

Ta có H là trọng tâm ΔABC, kẻ $AK \perp MN$

$(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp (SBC)$

Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

S, K, I thẳng hàng và AH = 2HI

MN là đường trung bình trong ΔSBC

$\Rightarrow$ K là trung điểm của SI

$\Rightarrow \Delta SAI$ cân tại A $\Rightarrow SA = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $SH^2 = SA^2 - HA^2 = SI^2 - HI^2$

$$\Rightarrow SI^2 = SA^2 - \frac{4}{9}SA^2 + \frac{1}{9}SA^2 = \frac{2}{3}SA^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Xét ΔAKI ta có $\Rightarrow AK^2 = AI^2 - KI^2$.

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{10}}{4} \text{ vậy } S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AK.MN = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \text{ (đvdt)}.$$

Bài 19:

Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mp (ABC) AC = AD = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

Giải

Cách 1: $AD \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

$S_{\Delta ABC} = 6(cm^2) \quad S_{\Delta BCD} = 2\sqrt{34}(cm^2)$

Gọi a(A, (BCD) = AK

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}.AD = \frac{1}{3}S_{BCD}.AK \Rightarrow AK = \frac{S_{ABC}.AD}{S_{BCD}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}(cm)$$

Cách 2: Kẻ $DH \perp BC \Rightarrow AH \perp BC$ (định lý 3 đường vuông góc)

Kẻ $AK \perp DH$ (1)

Ta có $BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AK$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AK \perp (DBC) \Rightarrow$ d (A, (BCD)) = AK

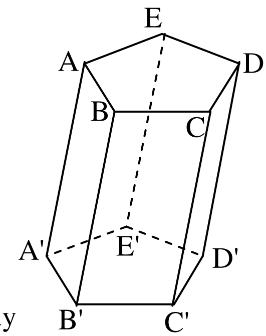
$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{17}{72} \Rightarrow AK^2 = \frac{72}{17} \Rightarrow AK = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ (cm)}$$

✓ *Vấn đề 2:* HÌNH LĂNG TRỤ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. ĐỊNH NGHĨA

Hình lăng trụ là hình đa diện có 2 mặt song song gọi là đáy, và các cạnh không thuộc 2 đáy song song với nhau.



II. TÍNH CHẤT

Trong hình lăng trụ:

– Các cạnh bên song song và bằng nhau.

– Các mặt bên, mặt chéo là hình bình hành.

– Hai đáy có cạnh song song và bằng nhau.

III. LĂNG TRỤ ĐỨNG, ĐỀU. LĂNG TRỤ XIÊN

Lăng trụ đứng là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy

Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Lăng trụ đều có các mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau.

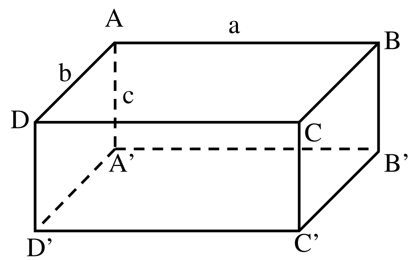
Lăng trụ xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy.

IV. HÌNH HỘP

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

– Hình hộp có các mặt đối diện là hình bình hành song song và bằng nhau.

– Các đường chéo hình hộp cắt nhau tại trung điểm.



Hình hộp đứng có cạnh bên vuông góc với đáy.

Hình hộp xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy.

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Hình hộp chữ nhật có các mặt là hình chữ nhật

Độ dài các cạnh xuất phát từ 1 đỉnh gọi là kích thước của hình hộp chữ nhật a, b, c.

Các đường chéo hình hộp chữ nhật bằng nhau và có độ dài: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Hình lập phương là hình hộp có 6 mặt là hình vuông.

Các cạnh của hình lập phương bằng nhau số đo a.

Các đường chéo hình lập phương có độ dài: $d = a\sqrt{3}$

V. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN

$S_{xq} = pl$ — p là chu vi thiết diện thẳng; l là độ dài cạnh bên

– Lăng trụ đứng: $S_{xq} = ph$ — p là chu vi đáy; h là chiều cao

– Hình hộp chữ nhật: $S_{tp} = 2(ab + bc + ca)$

a, b, c là kích thước của hình hộp chữ nhật.

VI. THỂ TÍCH

– Thể tích của hình hộp chữ nhật: $V = abc$ — a, b, c là kích thước

– Thể tích hình lập phương: $V = a^3$ — a là cạnh

– Thể tích lăng trụ: $V = B.h$ — B là diện tích đáy; h là chiều cao

$V = Sl$ — S là diện tích thiết diện thẳng; l là cạnh bên

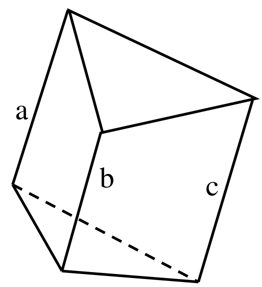
– Thể tích của lăng trụ tam giác cụt:

Lăng trụ tam giác cụt là hình đa diện có hai đáy là tam giác có cạnh bên song song không bằng nhau.

$$V = \frac{a+b+c}{3}S$$

S là diện tích thiết diện thẳng.

a, b, c là độ dài các cạnh bên.



B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật AB = a, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60^0 . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow A_1O \perp (ABCD)$

Gọi I là trung điểm AD.

Ta có: $OI \perp AD$ (Vì ABCD là hình chữ nhật)

$A_1I \perp AD$ [Vì $AD \perp (A_1IO)$]

Suy ra: Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1)

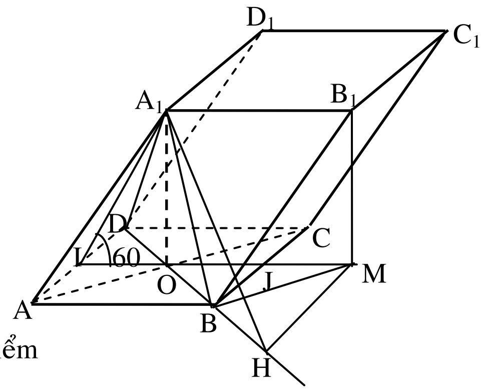
và (ABCD) là $A_1IO \Rightarrow A_1IO = 60^0$.

Ta có: $OI = \frac{a}{2}$, $A_1O = OI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = AB.AD = a^2\sqrt{3}$

Suy ra:

$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}.A_1O = \frac{3a^3}{2}$.



Gọi M là hình chiếu vuông góc của điểm B_1 trên mặt phẳng (ABCD).

Suy ra: $B_1M \parallel A_1O$ và $M \in IO$.

Vẽ MH vuông góc BD tại H, suy ra: $MH \perp (A_1BD)$.

Vì $B_1M \parallel (A_1BD)$ nên $d(B_1, (A_1BD)) = d(M, (A_1BD)) = MH$.

Gọi J là giao điểm của OM và BC, suy ra: $OJ \perp BC$ và J là trung điểm BC.

Ta có: $S_{\Delta OBM} = \frac{1}{2}OM.BJ = \frac{1}{2}A_1B_1.\frac{BC}{2} = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta lại có: $S_{\Delta OBM} = \frac{1}{2}OB.MH \Rightarrow d(B_1, (A_1BD)) = MH = \frac{2S_{\Delta OBM}}{OB} = \frac{2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2:

Ta có: $B_1C \parallel A_1D \Rightarrow B_1C \parallel (A_1BD)$

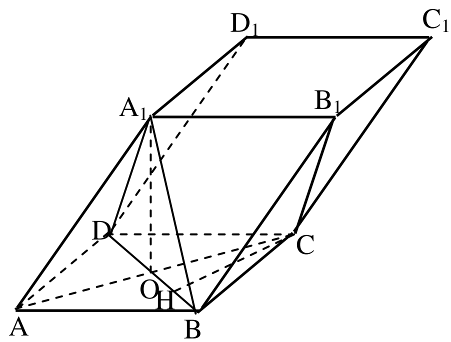
$\Rightarrow d(B_1, (A_1BD)) = d(C, (A_1BD))$

Vẽ CH vuông góc với BD tại H

$\Rightarrow CH \perp (A_1BD)$

$\Rightarrow d(B_1, (A_1BD)) = d(C, (A_1BD)) = CH$.

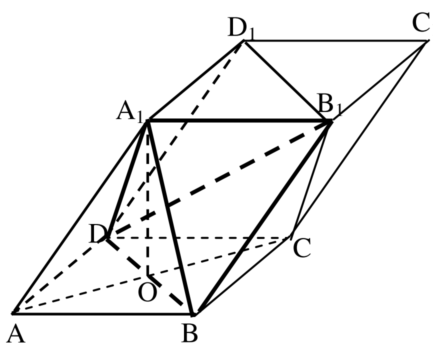
Trong tam giác vuông DCB ta có hệ thức CH.BD = CD.CB, từ đó tính được CH



Cách 3:

Ta có: $d(B_1, (A_1BD)) = \frac{3V_{B_1A_1BD}}{S_{\Delta A_1BD}}$.

- $V_{ABD.A_1B_1D_1} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{3a^3}{4}$.
- $V_{ABD.A_1B_1D_1} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{3a^3}{4}$.
- $V_{A_1.ABD} = \frac{1}{3}S_{ABD}.A_1O = \frac{a^3}{4} = V_{D.A_1B_1D_1}$.



- $V_{B_1A_1BD} = V_{ABD.A_1B_1D_1} - V_{A_1.ABD} - V_{D.A_1B_1D_1} = \dfrac{a^3}{4}$.
- $S_{\Delta A_1BD} = \dfrac{1}{2}BD.A_1O = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- $d(B_1, (A_1BD)) = \dfrac{3V_{B_1A_1BD}}{S_{\Delta A_1BD}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

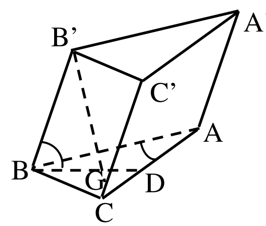
Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $BAC = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

Giải

Gọi D là trung điểm AC và G là trọng tâm tam giác ABC ta có

$B'G \perp (ABC) \Rightarrow B'BG = 60^o \Rightarrow B'G = B'B.\ \sin B'BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

và $BG = \dfrac{a}{2} \Rightarrow BD = \dfrac{3a}{4}$



Tam giác ABC có: $BC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2},\ AC = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow CD = \dfrac{AB}{4}$

$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \dfrac{3AB^2}{4} + \dfrac{AB^2}{16} = \dfrac{9a^2}{16}$

$\Rightarrow AB = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13},\ AC = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26};\ S_{\Delta ABC} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{104}$ (đvdt)

Thể tích khối tứ diện A'ABC: $V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \dfrac{1}{3}B'G.S_{\Delta ABC} = \dfrac{9a^3}{208}$ (đvtt)

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

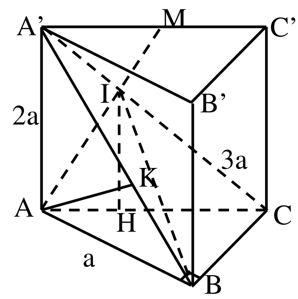
Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Giải

Hạ $IH \perp AC$ ($H \in AC$) $\Rightarrow IH \perp (ABC)$; IH là đường cao của tứ diện IABC

$\Rightarrow IH \,//\, AA' \Rightarrow \dfrac{IH}{AA'} = \dfrac{CI}{CA'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IH = \dfrac{2}{3}AA' = \dfrac{4a}{3}$

$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5},\ BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$



Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC = a^2$

Thể tích khối tứ diện IABC: $V = \frac{1}{3}IH.S_{\Delta ABC} = \frac{4a^3}{9}$

Hạ AK ⊥ A'B (K (A'B). Vì BC ((ABB'A')

nên AK (BC

(AK ((IBC). Nên khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK.

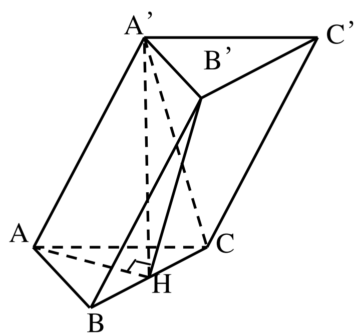
$S_{A'BC} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}2a = a^2\sqrt{5}$ $\quad IC = \frac{2}{3}A'C \Rightarrow S_{IBC} = \frac{2}{3}S_{A'BC} = \frac{2}{3}a^2\sqrt{5}$

$$AK = \frac{3V_{IABC}}{S_{IBC}} = 3\frac{4a^3}{9}\frac{3}{2a^2\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Giải



Gọi H là trung điểm BC Suy ra A'H ⊥ (ABC)

và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

Do đó: $A'H^2 + AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Vậy: $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{3}$ (đvtt)

- Trong tam giác vuông A'B'H ta có:

  $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên ΔB'BH cân tại B'

- Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì $\varphi = B'BH$

  Vậy $\cos\varphi = \frac{BI}{BB'} = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$ (với I là trung điểm BH).

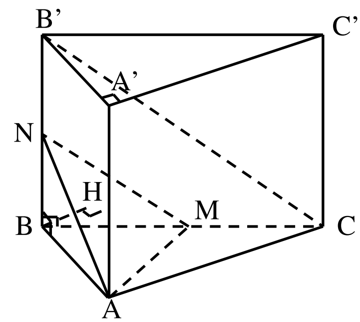
Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Giải

Thể tích lăng trụ: $V = S_đ.h = \frac{a.a}{2}.a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ (đvtt)

- Gọi N trung điểm BB'
- Do B'C // MN ⇒ d(B'C, AM) = d(B', (AMN))
- Do N là trung điểm BB'
  ⇒ d(B', (ABN)) = d(B, (AMN))
- Gọi H là hình chiếu của B lên mp(AMN)
- Ta có: $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$
  $= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2}$



$\Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{7}}$. Vậy $d\left(B'C; AM\right) = \frac{a}{\sqrt{7}}$.

Bài 6:

Cho hình lập phương ABCD, A'B'C'D'. Tính số đo góc nhị diện [B, A'C, D].

Giải

Gọi O = AC ∩ BD và cạnh hình lập phương bằng a.

⇒ $A'B = A'D = a\sqrt{2} = BD$

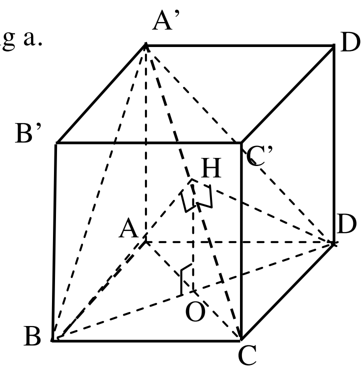
Ta có ΔA'CB = ΔA'CD (cạnh – cạnh – cạnh)

Nên vẽ BH ⊥ A'C

⇒ DH ⊥ A'C và BH = DH

⇒ [B, A'C, D] = BHD = 2BHO

ΔBHD cân tại H ⇒ HO ⊥ BD



Ta có $\sin BHO = \frac{BO}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BHO = 60^0 \Rightarrow$ [B, A'C, D] = 120^0.

Bài 7:

Cho hình lăng trụ đứng ABCD. A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc BAD $= 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'.   Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.   Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

Giải

Tam giác BDC đều cạnh a, AA' = b.

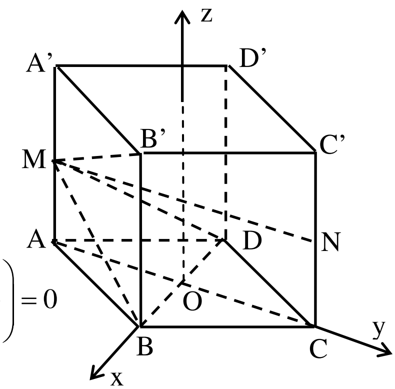
Chọn hệ trục như hình vẽ.

Ta có: $B(\frac{a}{2}; 0; 0)$; $D(-\frac{a}{2}; 0; 0)$; $C(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0)$; $B'(\frac{a}{2}; 0; h)$; $D'(-\frac{a}{2}, 0; h)$;

$C'(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h)$; $A'(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; h)$; $M(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2})$; $N(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2})$

* B', M, D, N đồng phẳng.

$\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2}\right)$; $\overrightarrow{DN} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2}\right)$



$\overrightarrow{DB'} = (a; 0; h)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{DB'}, \overrightarrow{DN}\right] = \left(\frac{-ha\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{a^2.\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DN}\right]\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{-ha\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow$ đpcm.

* Ta có $\overrightarrow{B'M} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}, -\frac{h}{2}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{B'M}\right|^2 = a^2 + \frac{h^2}{4}$

Tương tự $MD^2 = DN^2 = B'N^2 = a^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow MD^2 = DN^2 = B'N^2 = B'M^2$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + \frac{h^2}{4}$

(1) $\Rightarrow$ B'MDN là hình thoi nên B'MDN là hình vuông khi:

$$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow h^2 = 2a^2 \Leftrightarrow h = a\sqrt{2}$$

Bài 8:

Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a/ Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

b/ Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1.
Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

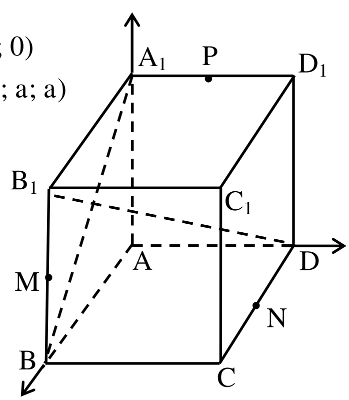
Giải

Chọn hệ trục Axyz như hình vẽ.

Ta có A(0; 0; 0) ; B(a; 0; 0) ; C(a; a; 0) ; D(0; a; 0)

$A_1(0; 0; a)$; $B_1(a; 0; a)$; $C_1(a; a; a)$; $D_1(0; a; a)$

$M(a; 0; \frac{a}{2})$ $N(\frac{a}{2}; a; 0)$ $P(0; \frac{a}{2}; a)$



a/ $\overrightarrow{A_1B} = (a; 0; -a)$ $\overrightarrow{B_1D} = (-a; a; -a)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua B_1D và (P) // A_1B

$\Rightarrow$ (P) có VTPT $\vec{n} = (1, 2, 1)$

$\Rightarrow$ Pt (P): $x + 2y + z - 2a = 0$

$\Rightarrow d(A_1B, B_1D) = d(B, (P)) = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

b/ $\overrightarrow{MP} = \left(-a; \dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}\right)$ $\overrightarrow{C_1N} = \left(-\dfrac{a}{2}; 0; -a\right)$

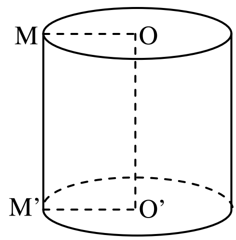
Ta có $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C_1N} = 0 \Rightarrow MP \perp C_1N$. Vậy góc giữa MP và C_1N là 90^0.

✓ *Vấn đề 3:* HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

HÌNH TRỤ

I. ĐỊNH NGHĨA



Hình trụ là hình sinh ra bởi hình chữ nhật O'OMM' quay xung quanh cạnh OO'

Cạnh OM sinh ra hình tròn đáy.

Cạnh MM' sinh ra mặt nón tròn xoay.

MM' gọi là đường sinh OO' là trục của hình trụ.

h = OO' là chiều cao

R = OM bán kính đáy

II. DIỆN TÍCH HÌNH TRỤ

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh$ R: bán kính đáy h: chiều cao

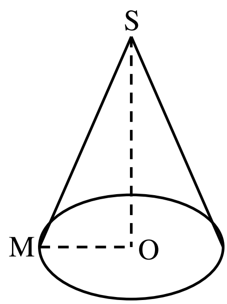
$S_{tp} = 2R\pi h + 2\pi R^2$

III. THỂ TÍCH HÌNH TRỤ

$V = \pi R^2 h$ R: bán kính đáy h: chiều cao

HÌNH NÓN

I. ĐỊNH NGHĨA



Hình nón là hình sinh ra bởi tam giác vuông OMS quay xung quanh cạnh góc vuông OS.

Cạnh OM sinh ra hình tròn đáy.

Cạnh SM sinh ra mặt nón tròn xoay.

SM gọi là đường sinh SO là trục hoành, đường cao.

R = OM bán kính đáy; h = SO chiều cao

II. DIỆN TÍCH

Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$

R: bán kính đáy l: độ dài đường sinh

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

III. THỂ TÍCH

Thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ R: bán kính đáy   h: là chiều cao

HÌNH NÓN CỤT

I. ĐỊNH NGHĨA

Hình nón cụt là phần hình nón giữa đáy và một thiết diện vuông góc với trục.

Hình nón cụt sinh bởi một hình thang vuông OMM'O'quay quanh OO'.

h = OO' chiều cao   MM' = l là đường sinh

II. DIỆN TÍCH

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R + R')l$

R, R' là bán kính đáy l là đường sinh

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi(R + R')l + \pi R^2 + \pi R'^2$

III. THỂ TÍCH

Thể tích hình nón cụt: $V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + R'^2 + RR')h$

R, R' là bán kính đáy   h chiều cao

HÌNH CẦU

I. ĐỊNH NGHĨA

Hình cầu tâm O, bán kính R là tập hợp những điểm M trong không gian thoả mãn điều kiện $OM \le R$

Mặt cầu tâm O bán kính R là tập hợp những điểm M trong không gian thoả mãn điều kiện OM = R

Thiết diện qua tâm là hình tròn lớn tâm O bán kính R.

Thiết diện của hình cầu với một mặt phẳng là hình tròn có tâm H là hình chiếu của O trên mặt phẳng và bán kính: $r_1 = \sqrt{R^2 - d^2}$

R là bán kính hình cầu;   d là khoảng cách từ tâm tới mặt phẳng.

d = OH

Tiếp diện của mặt cầu là mặt phẳng có 1 điểm chung với mặt cầu.

Điều kiện để mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu là: $d(0, \alpha) = R$

Tiếp tuyến của mặt cầu là đường thẳng có một điểm chung với mặt cầu.

Điều kiện để đường thẳng Δ là tiếp tuyến là $d(0; \Delta) = R$.

II. DIỆN TÍCH MẶT CẦU: $S = 4\pi R^2$

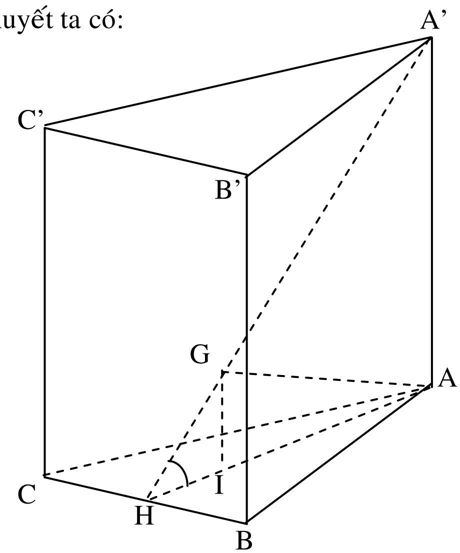
III. THỂ TÍCH MẶT CẦU: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Giải



Gọi H là trung điểm của BC, theo giả thuyết ta có:

Góc $\widehat{A'HA} = 60^0$.

Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'H = 2AH = a\sqrt{3}$

và $AA' = \frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$

Vậy thể tích khối lăng trụ

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Kẻ đường trung trực của GA tại trung điểm M của GA trong mặt phẳng A'AH cắt GI tại J thì GJ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC.

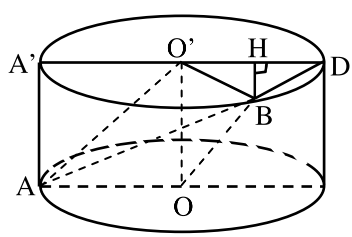
Ta có: GM.GA = GJ.GI

$\Rightarrow R = GJ = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{GI^2 + IA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A, Trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ điện OO'AB.

Giải



Kẻ đường sinh AA'.

Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B trên đường thẳng A'D.

Do $BH \perp A'D$ và $BH \perp AA'$ nên $BH \perp (AOO'A')$.

Suy ra: $V_{OO'AB} = \frac{1}{3}.BH.S_{AOO'}$

Ta có: $A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a$

$\Rightarrow \Delta BO'D$ đều $\Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đvtt)

Vì AOO' là tam giác vuông cân cạnh bên bằng a nên: $S_{AOO'} = \dfrac{1}{2}a^2$

Vậy thể tích khối tứ diện OO'AB là: $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$