SỐ PHỨC: BỐN DẠNG TOÁN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC

Bài viết nho nhỏ này nhằm đem lại cho các em học sinh cách nhìn tường minh hơn về các dạng toán Số phức trong đề thi tuyển sinh. Toán về Số phức là loại toán dễ lấy điểm nếu chúng ta nắm được những kiến thức cơ bản về số phức và rèn luyện kỹ năng giải toán của mình thông qua các dạng toán.

Dạng 1: Tổng hợp về kỹ năng cộng, trừ, nhân, chia số phức.

Dạng toán này chủ yếu kiểm tra khả năng tính toán của thí sinh, kết hợp với một số kiến thức khác về Môđun của Số phức, Số phức liên hợp, phần thực và phần ảo của Số phức ...

VD1: Tìm phần ảo của số phức z, biết : $\bar{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$.

(ĐH-A-cơ bản-2010)

Giải:

Ta có $\bar{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)=\left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)=5+\sqrt{2}i$.

Suy ra $z=5-\sqrt{2}i$. Phần ảo của số phức z là : $-\sqrt{2}$.

VD2: Cho số phức z thỏa mãn : $\bar{z}=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z}+iz$.

(ĐH-A-nâng cao-2010)

Giải:

Ta có $\bar{z}=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}=\dfrac{1-3.\sqrt{3}i+3.\left(\sqrt{3}i\right)^2-\left(\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}=\dfrac{1-3.\sqrt{3}i-9+3\sqrt{3}i}{1-i}=\dfrac{-8}{1-i}$

$$=\frac{-8(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-8(1+i)}{2}=-4-4i.$$

Suy ra $z=-4-4i$. Nên ta có $\bar{z}+iz=-4-4i+i\left(-4+4i\right)=-8-8i$.

Vậy $\left|\bar{z}+iz\right|=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$.

VD3: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$.

(ĐH-B-nâng cao-2011)

Giải:

Ta có $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3=\dfrac{1+3.\sqrt{3}i+3.\left(\sqrt{3}i\right)^2+\left(\sqrt{3}i\right)^3}{2i\left(1+i\right)}=\dfrac{1+3.\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i}{-2+2i}=\dfrac{-8}{-2+2i}$

$$=\frac{-8}{-2+2i}=\frac{-8\left(-2-2i\right)}{8}=2+2i.$$

Vậy số phức z có phần thực là 2 và phần ảo là 2.

VD4: Cho số phức z thỏa mãn $\left(2+i\right)z+\dfrac{2\left(1+2i\right)}{1+i}=7+8i$. Tìm môđun của số phức $\mathrm{w}=z+1+i$.

(ĐH-D-cơ bản-2012)

Giải:

Ta có $\left(2+i\right)z+\dfrac{2\left(1+2i\right)}{1+i}=7+8i\Leftrightarrow\left(2+i\right)z+\dfrac{2\left(1+2i\right)\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\left(1-i\right)}=7+8i$

$$\Leftrightarrow\left(2+i\right)z+\frac{2\left(3+i\right)}{2}=7+8i\Leftrightarrow\left(2+i\right)z=4+7i\Leftrightarrow z=\frac{4+7i}{2+i}\Leftrightarrow z=\frac{\left(4+7i\right)\left(2-i\right)}{5}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{15+10i}{5}\Leftrightarrow z=3+2i.$$

Nên ta có $\mathrm{w}=z+1+i=3+2i+1+i=4+3i$.

Vậy $\left|\mathrm{w}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Dạng 2: Tìm số phức thỏa mãn một hoặc một vài điều kiện nào đó.

Những bài toán dạng này thường cho trong điều kiện có chứa z, $\bar{z}$, $|z|$ *...Để giải quyết các bài toán dạng này, thông thường chúng ta đặt* $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ *rồi dựa theo điều kiện của bài toán ta xác định x, y. Từ đó ta tìm được z và các yêu cầu khác của bài toán.*

*** Lưu ý:** Việc giải bài toán dạng này thường quy về việc giải phương trình, hệ phương trình. Mà chúng ta thành lập phương trình, hệ phương trình bằng cách áp dụng tính chất sau: $x + yi = x' + y'i \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ (hai số phức bằng nhau).

VD1: Tìm tất cả các số phức z, biết : $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$.

(ĐH-A-cơ bản-2011)

Giải:

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$ $\Leftrightarrow (x + yi)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + (x - yi)$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2 + x - yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + x \\ 2xy = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + x = 0 \\ y(2x+1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} \\ y = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$.

Vậy $z = 0$ hoặc $z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$ hoặc $z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i$.

VD2: Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{5\left(\bar{z} + i\right)}{z + 1} = 2 - i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

(ĐH-A-nâng cao-2012)

Giải:

Gọi $z = x + yi, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$. Ta có $\dfrac{5\left(\overline{z} + i\right)}{z+1} = 2 - i \Leftrightarrow \dfrac{5\left(x - yi + i\right)}{x + yi + 1} = 2 - i$

$\Leftrightarrow 5\left(x - yi + i\right) = \left(x + yi + 1\right)\left(2 - i\right) \Leftrightarrow 5x + 5\left(1 - y\right)i = 2\left(x+1\right) + y + \left[-\left(x+1\right) + 2y\right]i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2\left(x+1\right) + y \\ 5\left(1-y\right) = -\left(x+1\right) + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 7y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$

Do đó $z = 1 + i$. Suy ra $\mathrm{w} = 1 + z + z^2 = 1 + 1 + i + \left(1+i\right)^2 = 2 + 3i$.

Vậy $\left|\mathrm{w}\right| = \left|2 + 3i\right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

<u>VD3:</u> Tìm số phức z thỏa mãn: $\left|z\right| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

(ĐH-D-cơ bản-2010)

Giải:

Gọi $z = x + yi, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$. Ta có $\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Từ yêu cầu của bài toán ta có: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}.$

Vậy các số phức cần tìm là: 1+ i ; 1 – i ; -1 – i ; -1 + i .

<u>VD4:</u> Tìm số phức z thỏa mãn: $\left|z - \left(2 + i\right)\right| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25$.

(ĐH-B-cơ bản-2009)

Giải:

Gọi $z = x + yi, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$. Ta có $\left|z - \left(2+i\right)\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|x + yi - \left(2 + i\right)\right| = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|x - 2 + \left(y-1\right)i\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-2\right)^2 + \left(y-1\right)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 10$ (1)

Lại có $z.\bar{z}=25\Leftrightarrow(x+yi)(x-yi)=25\Leftrightarrow x^2+y^2=25$ (2). Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=10\\x^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-4x-2y=5\\x^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=20\\x^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10-2x\\x^2+y^2=25\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=10-2x\\x^2+(10-2x)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10-2x\\5x^2-40x+75=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10-2x\\\left[\begin{array}{l}x=3\\x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}\\\begin{cases}x=5\\y=0\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy $z=3+4i$ hoặc $z=5$.

Dạng 3: Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện nào đó.

Đường lối để giải dạng toán này gần giống như cách giải Dạng 2. Chúng ta cũng đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ *rồi dựa theo điều kiện của bài toán ta xác định biểu thức thể hiện quan hệ giữa x và y. Từ đặc điểm của biểu thức quan hệ giữa x và y ta có kết luận về tập hợp điểm cần tìm.*

VD1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|z-i|=|(1-i)z|$. (ĐH-B-cơ bản-2010)

Giải: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ là $M(x;y)$. Ta có $|z-i|=|(1-i)z|\Leftrightarrow|x+yi-i|=|(1-i)(x+yi)|\Leftrightarrow|x+yi-i|=|x+y+(y-x)i|$

$\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|x+y+(y-x)i|\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x+y)^2+(y-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1=0\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn có phương trình $x^2+(y+1)^2=2$.

VD2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|z-(3-4i)|=2$. (ĐH-D-cơ bản-2009)

Giải: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ là $M(x; y)$. Ta có $|z-(3-4i)| = 2 \Leftrightarrow |x+yi-(3-4i)| = 2 \Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn có phương trình $(x-3)^2+(y+4)^2 = 4$.

Dạng 4: Giải phương trình với biến số phức

Trong đề thi, chúng ta thường gặp phương trình bậc hai với biến số phức mà cách giải đã được sách giáo khoa hướng dẫn rồi. Sau đây ta xét các ví dụ minh họa trích từ đề thi Đại học.

VD1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$. (ĐH-A-cơ bản-2009)

Giải: Xét phương trình $z^2+2z+10=0$, ta có: $\Delta = -36 = 36i^2$. Suy ra nghiệm của phương trình là $z_1 = \frac{-2-6i}{2} = -1-3i$; $z_2 = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i$.

Vậy ta có $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = \left[\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}\right]^2 + \left[\sqrt{(-1)^2+3^2}\right]^2 = 20$.

VD2: Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 2(1+i)z + 2i = 0$. Tìm phần thực và phần ảo của $\frac{1}{z}$. (CĐ-nâng cao-2011)

Giải: Ta có: $\Delta = [-2(1+i)]^2 - 8i = 0$. Suy ra nghiệm của phương trình là $z = 1+i$.

$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Vậy phần thực của $\frac{1}{z}$ là $\frac{1}{2}$, phần ảo của $\frac{1}{z}$ là $-\frac{1}{2}$.

Cách khác:

Ta có $z^2-2(1+i)z+2i=0 \Leftrightarrow z^2-2(1+i)z+(1+i)^2=0 \Leftrightarrow \left[z-(1+i)\right]^2=0 \Leftrightarrow z-(1+i)=0$

$\Leftrightarrow z=1+i \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

Vậy phần thực của $\frac{1}{z}$ là $\frac{1}{2}$, phần ảo của $\frac{1}{z}$ là $-\frac{1}{2}$.

Bài viết của: Trần Tuấn Anh (Giáo viên Toán)

ĐT: 0974.48.48.58

Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

Cảm ơn bạn Trần Quốc Bảo (quocbao96@gmail.com) đã gửi tới www.laisac.page.tl