www.laisac.page.tl

LUYỆN BÀI TẬP CÂU LIÊN QUAN KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số y = $\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thi (C) của hàm số.
2. Cho điểm M thuộc (C) có hoành độ x_M = a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M, với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M.

Giải.

2/ + Vì $M \in (C) \Rightarrow M\left(a\,;\frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}\right)$.

Ta có: y' = $2x^3$ – 6x $\Rightarrow y'(a) = 2a^3 - 6a$

Vậy tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình : $y = (3a^3 - 6a)(x-a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$.

+ Xét pt : $\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = (3a^3 - 6a)(x-a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x-a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ g(x) = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6 = 0 \end{array}\right.$$

YCBT khi pt g(x) = 0 có 2 nghiệm phân biệt khác a $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 > 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thi (C) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Giải.

2/ Giả sử $M(x_0; \frac{x_0}{x_0 - 1}) \in (C)$ mà tiếp tuyến với đồ thị tại đó có khoảng cách từ tâm đối xứng đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng : $y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0}{x_0 - 1}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2}x - y + \frac{x_0^2}{(x_0-1)^2} = 0$$

Ta có d(I ;tt) = $\dfrac{\frac{2}{|x_0 - 1|}}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x_0-1)^4}}}$.Đặt t = $\frac{1}{|x_0 - 1|} > 0$

Xét hàm số f(t)$\frac{2t}{\sqrt{1+t^4}}$ $(t > 0)$

ta có f'(t) = $\dfrac{(1-t)(1+t)(1+t^2)}{(1+t^4)\sqrt{1+t^4}}$

f'(t) = 0 khi t = 1

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗	$\sqrt{2}$	↘	

từ bảng biến thiên ta có d(I ;tt) lớn nhất khi và chỉ khi t = 1 hay

$$|x_0 - 1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$$

+ Với $x_0 = 0$ ta có tiếp tuyến là y = -x

+ Với $x_0 = 2$ ta có tiếp tuyến là y = -x+4

Bài 3. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Tìm trên đồ thị (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết M(-3; 0) và N(-1; -1).

Giải.

2. Gọi 2 điểm cần tìm là A, B có $A\left(a; 2 - \dfrac{6}{a+1}\right); B\left(b; 2 - \dfrac{6}{b+1}\right); a, b \neq -1$

Trung điểm I của AB: $I\left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{a-2}{a+1} + \dfrac{b-2}{b+1}\right)$

Pt đường thẳng MN: x + 2y +3= 0

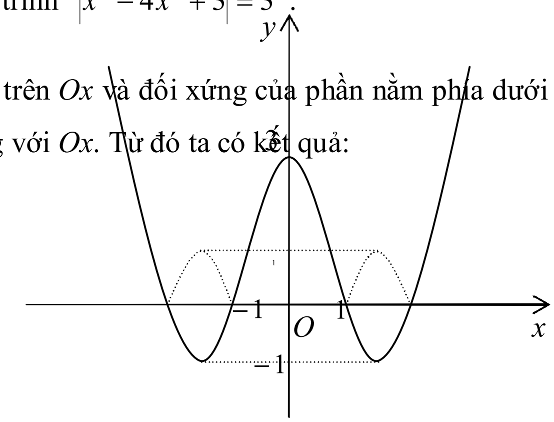
Có : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = 0 \\ I \in MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0;-4) \\ B(2;0) \end{cases}$

Bài 4. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Biện luận theo tham số k số nghiệm của phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = 3^k$.

Giải.

2. Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + 3|$ gồm phần nằm phía trên Ox và đối xứng của phần nằm phía dưới Ox qua Ox của đồ thị (C); $y = 3^k$ là đường thẳng song song với Ox. Từ đó ta có kết quả:



* $3^k < 1 \Leftrightarrow k < 0$: phương trình có 8 nghiệm,
* $3^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$: phương trình có 6 nghiệm,
* $1 < 3^k < 3 \Leftrightarrow 0 < k < 1$: phương trình có 4 nghiệm,
* $3^k = 3 \Leftrightarrow k = 1$: phương trình có 3 nghiệm,
* $3^k > 3 \Leftrightarrow k > 1$: phương trình có 2 nghiệm.

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số .
2. Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1; 2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất .

Giải.

2. Nếu $M\left(x_0; 2 - \dfrac{3}{x_0+1}\right) \in (C)$ thì tiếp tuyến tại M có phương trình $y - 2 + \dfrac{3}{x_0+1} = \dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x - x_0)$ hay

$3(x - x_0) - (x_0+1)^2(y-2) - 3(x_0+1) = 0$

. Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là

$$d=\frac{|3(-1-x_0)-3(x_0+1)|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}$$. Theo bất đẳng thức Côsi

$\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{9}=6$, vây $d\le\sqrt{6}$. Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm M : $\boxed{M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)}$ hoặc $\boxed{M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)}$

Bài 6. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).
2. Cho điểm A(0;a) .Xác định a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục ox.

Giải.

2. Phương trình tiếp tuyến qua A(0;a) có dạng y=kx+a (1)

Điều kiện có hai tiếp tuyến qua A: $\begin{cases}\frac{x+2}{x-1}=kx-a & (2)\\ \frac{-3}{(x-1)^2}=k & (3)\end{cases}$ có nghiệm $x\ne 1$

Thay (3) vào (2) và rút gọn ta được: $(a-1)x^2-2(a+2)x+a+2=0$ (4)

Để (4) có 2 nghiệm $x\ne 1$ là: $\begin{cases}a\ne 1\\ f(1)=-3\ne 0\\ \Delta'=3a+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne 1\\ a>-2\end{cases}$

Hoành độ tiếp điểm $x_1;x_2$ là nghiệm của (4)

Tung độ tiếp điểm là $y_1=\frac{x_1+2}{x_1-1}$, $y_2=\frac{x_2+2}{x_2-1}$

Để hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục ox là: $y_1.y_2<0\Leftrightarrow\frac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-2)}<0$

$\frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0\Leftrightarrow\frac{9a+6}{-3}<0\Leftrightarrow a>-\frac{2}{3}$ Vậy $-\frac{2}{3}<a\ne 1$ thoả mãn đkiện bài toán.

Bài 7. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$.

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2.Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình $\frac{|x|+1}{|x|-1}=m$.

Giải.

2. Học sinh lập luận để suy từ đồ thị (C) sang đồ thị $y=\frac{|x|+1}{|x|-1}(C')$.*Học sinh tự vẽ hình*

Suy ra đáp số

$m<-1;m>1$: phương trình có 2 nghiệm

$m=-1$: phương trình có 1 nghiệm

$-1 < m \le 1$: phương trình vô nghiệm

Bài 8. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C)

2.Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất .

Giải.

2. Lấy điểm $M\left(m;2+\dfrac{1}{m-2}\right) \in (C)$. Ta có : $y'(m) = -\dfrac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình :

$$y = -\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là : $A\left(2;2+\dfrac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là : B(2m – 2 ; 2)

Ta có : $AB^2 = 4\left[(m-2)^2+\dfrac{1}{(m-2)^2}\right] \ge 8$. Dấu "=" xảy ra khi $m = 2$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là : (2; 2)

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2+2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Tìm điểm M thuộc đường thẳng y=3x-2 sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

Giải.

2. Gọi tọa độ điểm cực đại là A(0;2), điểm cực tiểu B(2;-2)

Xét biểu thức P=3x-y-2

Thay tọa độ điểm A(0;2)=>P=-4<0, thay tọa độ điểm B(2;-2)=>P=6>0

Vậy 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng y=3x-2, để MA+MB nhỏ nhất => 3 điểm A, M, B thẳng hàng

Phương trình đường thẳng AB: y= - 2x+2

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 3x-2 \\ y = -2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$$

Bài 10. Cho hàm số $y = \dfrac{m-x}{x+2}$ có đồ thị là (H_m), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 1$.
2. Tìm m để đường thẳng $d: 2x+2y-1=0$ cắt (H_m) tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S = \dfrac{3}{8}$.

Giải.

2. Hoành độ giao điểm A, B của d và (H_m) là các nghiệm của phương trình $\dfrac{-x+m}{x+2} = -x+\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+2(m-1)=0,\ x \ne -2 \qquad (1)$$

Pt (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác -2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 17-16m > 0 \\ 2.(-2)^2-2+2(m-1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{17}{16} \\ m \ne -2 \end{cases}$.

Ta có

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17 - 16m}.$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d là $h = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

Suy ra $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.h.AB = \frac{1}{2}.\frac{1}{2\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17 - 16m} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2},$ thỏa mãn.

Bài 11. Cho hàm số $y = -\frac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (3m-2)x - \frac{5}{3}$ có đồ thị (C_m), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 2$.
2. Tìm m để trên (C_m) có hai điểm phân biệt $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1.x_2 > 0$ và tiếp tuyến của (C_m) tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x - 3y + 1 = 0$.

Giải.

2. Ta có hệ số góc của $d: x - 3y + 1 = 0$ là $k_d = \frac{1}{3}$. Do đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $y' = -3$, hay

$$-2x^2 + 2(m-1)x + 3m - 2 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(m-1)x - 3m - 1 = 0 \qquad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 > 0$

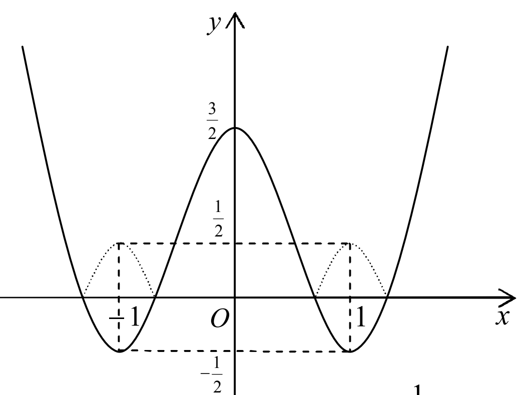
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + 2(3m+1) > 0 \\ \dfrac{-3m-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ -1 < m < -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy kết quả của bài toán là $m < -3$ và $-1 < m < -\frac{1}{3}$.

Bài 12. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
2. Tìm m để phương trình sau có đúng 8 nghiệm thực phân biệt

$$|2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}| = m^2 - m + \frac{1}{2}.$$



Giải.

2. Phương trình $|2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}| = m^2 - m + \frac{1}{2}$ có 8 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m^2 - m + \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}|$ tại 8 điểm phân biệt.

Đồ thị $y = |2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}|$ gồm phần (*C*) ở phía trên trục *Ox* và đối xứng phần (*C*) ở phía dưới trục *Ox* qua *Ox*.

Từ đồ thị suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m^2 - m + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$

Bài 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$, với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 1$.
2. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

Giải.

2. Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9.$

+) Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm pb là x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ Pt $x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -1+\sqrt{3} \\ m < -1-\sqrt{3} \end{array}\right.$ (1)

+) Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1);\ x_1x_2 = 3$. Khi đó

$$|x_1 - x_2| \le 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \le 4$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m là $-3 \le m < -1-\sqrt{3}$ và $-1+\sqrt{3} < m \le 1$.

Bài 14. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (1) m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) với m=2.
2. Tìm tham số m để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $x + y + 7 = 0$ góc α, biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Giải.

2. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến $\Rightarrow$ tiếp tuyến có véctơ pháp $\overrightarrow{n_1} = (k;-1)$

d: có véctơ pháp $\overrightarrow{n_2} = (1;1)$

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{26}} = \dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{3}{2} \\ k_2 = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Yêu cầu của bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình: $y' = k_1$ (1) và $y' = k_2$ (2) có nghiệm x

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \dfrac{3}{2} & \text{có nghiệm} \\ 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \dfrac{2}{3} & \text{có nghiệm} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_1 \ge 0 \\ \Delta'_2 \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2 - 2m - 1 \ge 0 \\ 4m^2 - m - 3 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{1}{4}; m \ge \dfrac{1}{2} \\ m \le -\dfrac{3}{4}; m \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le -\dfrac{1}{4} \text{ hoặc } m \ge \dfrac{1}{2}$$

Bài 15. Cho hàm số y = $\dfrac{2x}{x-2}$ (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).
2. Tìm m để đường thẳng (d): y = x + m cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị sao cho khoảng cách giữa 2 điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải.

2. Để (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thì pt $\dfrac{2x}{x-2} = x + m$ hay $x^2 + (m - 4)x - 2x = 0$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta = m^2 + 16 \\ -4 \ne 0 \end{cases} \forall m$ (2).

Giả sử $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là 2 giao điểm khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình (1). Theo định lí viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - m \\ x_1x_2 = -2m \end{cases}$ (3) , $y_1=x_1+m$, $y_2=x_2+m$

Để A, B thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị thì A, B nằm khác phía đối với đt x – 2 = 0. A, B nằm khác phía đối với đt x – 2 = 0 khi và chỉ khi $(x_1- 2)(x_2 - 2) < 0$ hay

$x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0$ (4) thay (3) vào 4 ta được – 4 < 0 luôn đúng (5)

mặt khác ta lại có AB = $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{2(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2}$ (6)

thay (3) vào (6) ta được AB = $\sqrt{2m^2+32} \ge \sqrt{32}$ vậy AB = $\sqrt{32}$ nhỏ nhất khi m = 0 (7). Từ (1), (5), (7) ta có m = 0 thoả mãn .

Bài 16.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1;2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

Giải.

2. Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ có phương trình

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Hay $x + (x_0-1)^2 y - 2x_0{}^2 + 2x_0 - 1 = 0$ (*)

*Khoảng cách từ điểm I(1;2) đến tiếp tuyến (*) bằng $\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2-2x_0|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}} = \sqrt{2}$$

giải được nghiệm $x_0 = 0$ và $x_0 = 2$

*Các tiếp tuyến cần tìm : $x + y - 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$

Bài 17. Cho hàm số y = - x^3 + 3mx^2 -3m – 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.
2. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: x + 8y – 74 = 0.

Giải.

2. Ta có y' = - 3x^2 + 6mx ; y' = 0 $\Leftrightarrow$ x = 0 v x = 2m.

Hàm số có cực đại , cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ m $\neq$ 0.

Hai điểm cực trị là A(0; - 3m - 1) ; B(2m; 4m^3 – 3m – 1)

Trung điểm I của đoạn thẳng AB là I(m ; 2m^3 – 3m – 1)

Vectơ $\overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3)$; Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (8; -1)$.

Hai điểm cực đại , cực tiểu A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d $\Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ AB \perp d \end{cases}$

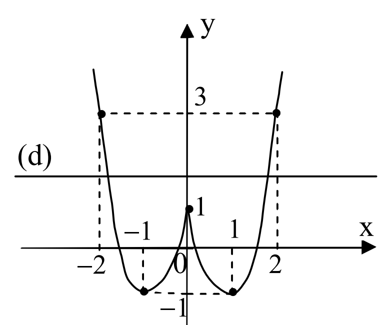
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{m} = 2$$

Bài 18. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Định m để phương trình sau có 4 nghiệm thực phân biệt:

$$|x|^3 - 3|x| = m^3 - 3m$$

Giải.



2. Phương trình đã cho là phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị (C') của hàm số: $y = |x|^3 - 3|x| + 1$ và đường thẳng (d): $y = m^3 - 3m + 1$ ((d) cùng phương với trục hoành)

Xét hàm số: $y = |x|^3 - 3|x| + 1$, ta có:

+ Hàm số là một hàm chẵn nên (C') nhận trục Oy làm trục đối xứng, đồng thời $\forall x > 0$ thì $y = |x|^3 - 3|x| + 1 = x^3 - 3x + 1$

+ Dựa vào đồ thị (C') ta suy ra điều kiện của m để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt là:

$$-1 < m^3 - 3m + 1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 3m < 0 \\ m^3 - 3m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < m < -\sqrt{3} \\ \begin{cases} 0 < m < \sqrt{3} \\ m \neq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Bài 19. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho OA = 4OB

Giải.

2. OA =4OB nên ΔOAB có $\tan A=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến AB có hệ số góc k = $\pm\dfrac{1}{4}$

Phương trình y' = k $\Leftrightarrow \dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$

+) x = 3 $\Rightarrow$ y=0, tiếp tuyến có phương trình $y=\dfrac{1}{4}(x-3)$

+) x= -5 $\Rightarrow$ y= 2, tiếp tuyến có phương trình $y=\dfrac{1}{4}(x+5)+2\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$

Bài 20. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm a và b để đường thẳng (d): $y=ax+b$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua đường thẳng (Δ): $x-2y+3=0$.

Giải.

2. Phương trình của (Δ) được viết lại: $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

Để thoả đề bài, trước hết (d) vuông góc với (Δ) hay $a=-2$

Khi đó phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (C):

$$\frac{x-1}{x+1}=-2x+b \;\Leftrightarrow\; 2x^2-(b-3)x-(b+1)=0. \qquad (1)$$

Để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow$ $b^2+2b+17>0 \Leftrightarrow$ b tuỳ ý.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{b-3}{4} \\ y_I=-2x_I+b=\dfrac{b+3}{2} \end{cases}.$$

Vậy để thoả yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{tồn tại } A, B \\ AB\perp(\Delta) \\ I\in(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall b \\ a=-2 \\ x_I-2y_I+3=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ \dfrac{b-3}{4}-(b+3)+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Bài 21. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Chứng minh rằng đường thẳng $(d): y=2x+m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau. Xác định m để đoạn AB có độ dài ngắn nhất.

Giải.

2. Chứng minh rằng đường thẳng $(d): y=2x+m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau. Xác định m để đoạn AB có độ dài ngắn nhất **.**

. Để đường thẳng (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình. $\frac{x+1}{x-1}=2x+m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m và $x_1<1<x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(x-1)(2x+m) \\ x\neq 1 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(m-3)x-m-1=0 \ \ (*) \\ x\neq 1 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m+1)^2+16>0 \quad \forall m \\ f(1)=2+(m-3)-m-1=-2<0 \end{cases}$

Vậy với mọi giá trị của m thìđường thẳng $(d): y=2x+m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau.

. Gọi $A(x_1;2x_1+m), B(x_2;2x_2+m)$ là hai điểm giao giữa (d) và (C).($x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình (*))

Ta có $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;2(x_2-x_1)) \Rightarrow |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(2(x_2-x_1))^2}=\sqrt{5(x_2-x_1)^2}$

Theo Vi ét ta có $|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{5\left[(m+1)^2+16\right]}\geq 2\sqrt{5} \ \ \forall m$. $|AB|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow m=-1$

Vậy với m = -1 là giá trị cần tìm. (R)

Bài 22. Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm tọa độ M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

Giải.

2.Gọi $M(a;\frac{3a+2}{a+2})\in(C), a\neq -2$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y=\frac{4}{(a+2)^2}(x-a)+\frac{3a+2}{a+2} \quad (\Delta)$$

Đường thẳng d_1:x+2=0 và d_2:y-3=0 là hai tiệm cận của đồ thị

$\Delta\cap d_1$=A(-2;$\frac{3a-2}{a+2}$), $\Delta\cap d_2$=B(2a+2;3)

Tam giác IAB vuông tại I $\Rightarrow$AB là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB $\Rightarrow$diện tích hình tròn S=$\pi\frac{AB^2}{4}=\frac{\pi}{4}\left[4(a+2)^2+\frac{64}{(a+2)^2}\right]\geq 8\pi$

Dấu bằng xảy ra khi và chi khi $(a+2)^2=\frac{16}{(a+2)^2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-4 \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn bài toán M(0;1) và M(-4;5)

Bài 23. Cho hàm số $y=f(x)=8x^4-9x^2+1$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$8\cos^4x-9\cos^2x+m=0 \text{ với } x\in[0;\pi].$$

Giải.

2. Xét phương trình $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0;\pi]$ (1)
Đặt $t = \cos x$, phương trình (1) trở thành: $8t^4 - 9t^2 + m = 0$ (2)
Vì $x \in [0;\pi]$ nên $t \in [-1;1]$, giữa x và t có sự tương ứng một đối một, do đó số nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng nhau.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ (3)
Gọi (C_1): $y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ với $t \in [-1;1]$ và (D): y = 1 – m.
Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (D).
Chú ý rằng (C_1) giống như đồ thị (C) trong miền $-1 \le t \le 1$.

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

- $m > \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho vô nghiệm.
- $m = \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho có 2 nghiệm.
- $1 \le m < \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho có 4 nghiệm.
- $0 < m < 1$: Phương trình đã cho có 2 nghiệm.
- $m = 0$: Phương trình đã cho có 1 nghiệm.
- m < 0 : Phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 24. Cho hàm số: $y = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng 4x + y = 0.

Giải.

2. Gọi M($x_0; \dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)}$) $\in (C)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{x_0-1}{2(x_0+1)} \Rightarrow y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0-1}{2(x_0+1)}$$

Gọi A = $\Delta \cap$ ox $\Rightarrow$ A($-\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2}$;0)

B = $\Delta \cap$ oy $\Rightarrow$ B(0; $\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0+1)^2}$). Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là:

$$G\left(-\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6}; \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

Do G $\in$ đường thẳng:4x + y = 0 $\Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6} + \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 4 = \dfrac{1}{(x_0+1)^2}$ (vì A, B $\neq$ O nên $x_0^2 - 2x_0 - 1 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 + 1 = \frac{1}{2} \\ x_0 + 1 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$; với $x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow M(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$.

Bài 25. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, trong đó m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với m = 0.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Giải.

2. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ $\Leftrightarrow y' = -3x^2 - 6x + m \le 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x \ge m, \forall x > 0$ (*)

x	0		$+\infty$
y		$\nearrow$	$+\infty$
	0		

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^2 + 6x$ trên $(0 ; +\infty)$

Từ đó ta được : (*) $\Leftrightarrow m \le 0$.

Bài 26. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị là (C)

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

2.Chứng minh đường thẳng d: y = -x + m luôn luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Giải.

2. Hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x+1}{x+2} = -x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -2 \\ x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Do (1) có $\Delta = m^2 + 1 > 0\ va\ (-2)^2 + (4-m).(-2) + 1 - 2m = -3 \ne 0\ \forall m$ nên đường thẳng d luôn luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Ta có $y_A = m - x_A$; $y_B = m - x_B$ nên $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 2(m^2 + 12)$ suy ra AB ngắn nhất $\Leftrightarrow AB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = 0$. Khi đó $AB = \sqrt{24}$

Bài 27. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

2/ Định k để đường thẳng d: y = kx + 3 cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm M, N sao cho tam giác OMN vuông góc tại O. (O là gốc tọa độ)

Giải.

2. / Xét pt: $\dfrac{2x+1}{x-1} = kx + 3\ (x \ne 1) \Leftrightarrow kx^2 - (k-1)x - 4 = 0 = g(x)$

d cắt đồ thị hs (1) tại M, N $\Leftrightarrow \begin{cases} k \ne 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ne 0 \\ k < -7 - 4\sqrt{3} \vee k > -7 + 4\sqrt{3} \end{cases}$

$$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow x_M.x_N + (kx_M + 3)(kx_N + 3) = 0 \Leftrightarrow (k^2+1)(x_M.x_N) + 3k(x_M + x_N) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 6k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 3 \pm \sqrt{5} \qquad \begin{cases} x_M + x_N = \dfrac{k-1}{k} \\ x_M.x_N = -\dfrac{4}{k} \end{cases}$$

Bài 28. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = -3.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Giải.

.

2.Pt : $x^3 + mx + 2 = 0 \Rightarrow m = -x^2 - \dfrac{2}{x}$ ($x \ne 0$)

Xét f(x) = $-x^2-\dfrac{2}{x} \Rightarrow f'(x)=-2x+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{-2x^3+2}{x^2}$

Ta có

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & + & \| & + & 0 & - & \\
\hline
f(x) & & & +\infty \,\|\, & & -3 & & \\
 & -\infty & \nearrow & \| -\infty & \nearrow & & \searrow & -\infty
\end{array}$$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hòanh tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m>-3$.

Bài 29. Cho hàm số y = x^3 – 3x + 1 có đồ thị (C) và đường thẳng (d): y = mx + m + 3.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm m để (d) cắt (C) tại M(-1; 3), N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc nhau.

Giải.

2. Phương trình hòanh độ giao điểm của (C) và (d): x^3 – (m + 3)x – m – 2 = 0

Hay : (x + 1)(x^2 – x – m – 2) = 0 $\left[\begin{array}{l} x=-1\,,\ y=3 \\ x^2-x-m-2=0\ (*) \end{array}\right.$

(*) phải có hai nghiệm phân biệt ($m>-\dfrac{9}{4}$), x_N và x_P là nghiệm của (*)

Theo giả thiết: $\left(x_N^2-3\right)\left(x_P^2-3\right)=-1 \Leftrightarrow 9m^2+18m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Bài 30. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+4}{1-x}$.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.
2) Gọi (*d*) là đường thẳng qua *A*(1; 1) và có hệ số góc *k*. Tìm *k* sao cho (*d*) cắt (*C*) tại hai điểm *M*, *N* và $MN=3\sqrt{10}$.

Giải.

2. Từ giả thiết ta có: $(d): y=k(x-1)+1$. Bài toán trở thành: Tìm *k* để hệ phương trình sau có hai nghiệm $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ phân biệt sao cho $\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2=90(*)$

$\begin{cases} \dfrac{2x+4}{-x+1}=k(x-1)+1 \\ y=k(x-1)+1 \end{cases}(I)$. Ta có: $(I)\Leftrightarrow\begin{cases} kx^2-(2k-3)x+k+3=0 \\ y=k(x-1)+1 \end{cases}$

Dễ có (*I)* có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $kx^2-(2k-3)x+k+3=0(**)$ có hai nghiệm phân biệt. Khi đó dễ có được $k\neq 0, k<\dfrac{3}{8}$.

Ta biến đổi (*) trở thành: $(1+k^2)\left(x_2-x_1\right)^2=90 \Leftrightarrow (1+k^2)[\left(x_2+x_1\right)^2-4x_2x_1]=90(***)$

Theo định lí Viet cho (**) ta có: $x_1+x_2=\dfrac{2k-3}{k}, x_1x_2=\dfrac{k+3}{k}$, thế vào (***) ta có phương trình:

$8k^3+27k^2+8k-3=0 \Leftrightarrow (k+3)(8k^2+3k-1)=0 \Leftrightarrow k=-3 \vee k=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{16} \vee k=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{16}$.

KL: Vậy có 3 giá trị của *k* thoả mãn như trên.

Bài 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm A(2 , 0) và B(0 , 2)

Giải.

2. Pt đường trung trực đọan AB : y = x
Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoàng độ là nghiệm của pt :

$$\frac{x+2}{2x-1} = x$$
$$\leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$
$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Hai điểm trên đồ thị thỏa ycbt : $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 32. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Cho *M* là điểm bất kì trên (*C*). Tiếp tuyến của (*C*) tại *M* cắt các đường tiệm cận của (*C*) tại *A* và *B*. Gọi *I* là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm *M* sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* có diện tích nhỏ nhất.

Giải.

2. Ta có: $M\left(x_0; \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$, $x_0 \neq 2$, $y'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $\Delta : y = \dfrac{-1}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của (Δ) và hai tiệm cận là: $A\left(2; \dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B(2x_0-2; 2)$

Ta thấy $\dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{2+2x_0-2}{2} = x_0 = x_M$, $\dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{2x_0-3}{x_0-2} = y_M$ suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác I = (2; 2) và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S = \pi IM^2 = \pi\left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-3}{x_0-2} - 2\right)^2\right] = \pi\left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2}\right] \geq 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \dfrac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

Do đó có hai điểm M cần tìm là M(1; 1) và M(3; 3)

Bài 33. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ (C)

1. Khảo sát hàm số.
2. Tìm m để đường thẳng d: y = 2x + m cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho AB = $\sqrt{5}$.

Giải.

2. Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 + mx + m + 2 = 0$, $(x \neq -1)$ (1)
d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow m^2 - 8m - 16 > 0$ (2)
Gọi $A(x_1; 2x_1 + m)$, $B(x_2; 2x_2 + m$. Ta có x_1, x_2 là 2 nghiệm của PT(1).

Theo ĐL Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{m+2}{2} \end{cases}$.

$AB^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 20 = 0$

$\Leftrightarrow m = 10$, $m = -2$ (Thỏa mãn (2))

Bài 34. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1)

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) ứng với m=1

2.Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến góc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến góc tọa độ O.

Giải.

2. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Để hàm số có cực trị thì PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có 2 nhiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$

Cực đại của đồ thị hàm số là A(m-1;2-2m) và cực tiểu của đồ thị hàm số là B(m+1;-2-2m)

Theo giả thiết ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m là $m = -3 - 2\sqrt{2}$ và $m = -3 + 2\sqrt{2}$.

Bài 35. 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + 2$

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x^2 - 2x - 2 = \dfrac{m}{|x-1|}$

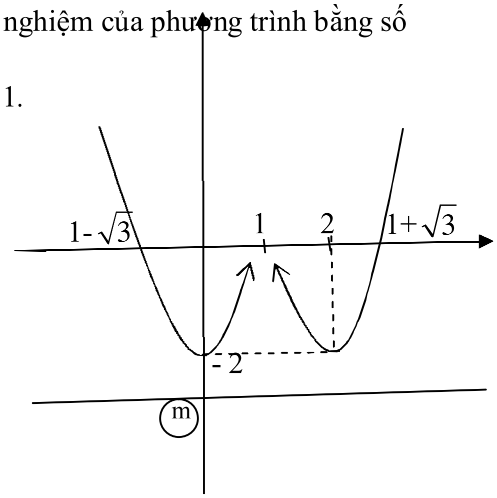
Giải.

2. Ta có $x^2 - 2x - 2 = \dfrac{m}{|x-1|} \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 2\right)|x-1| = m, x \neq 1.$ Do đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của $y = \left(x^2 - 2x - 2\right)|x-1|, (C')$ và đường thẳng $y = m, x \neq 1.$

Vẽ $y = \left(x^2 - 2x - 2\right)|x-1| = \begin{cases} f(x) & khi\ \ x > 1 \\ -f(x) & khi\ \ x < 1 \end{cases}$ nên (C') bao gồm:

+ Giữ nguyên đồ thị (*C*) bên phải đường thẳng $x = 1.$

+ Lấy đối xứng đồ thị (*C*) bên trái đường thẳng $x = 1$ qua *Ox*.



Dựa vào đồ thị ta có:

+ $m < -2$: Phương trình vụ nghiệm;

+ $m = -2$: Phương trình có 2 nghiệm kép;

+ $-2 < m < 0$: Phương trình có 4 nghiệm phân biệt;

+ $m \geq 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 36.

1. khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$
2. Tìm m để đường thẳng (d): y = 2x + m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau.

Giải.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$\dfrac{2x+3}{x-2} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m-6)x - 2m - 3 = 0$ (x = 2 không là nghiệm của p trình)

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thoả mãn: $y'(x_1) = y'(x_2)$ hay $x_1+x_2= 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-6)^2 + 8(2m+3) > 0 \\ \dfrac{6-m}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

Bài 37. Cho hàm số : $y=(x-m)^3-3x$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi m = 1.

2) Tìm k để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}|x-1|^3-3x-k<0\\ \frac{1}{2}\log_2 x^2+\frac{1}{3}\log_2(x-1)^3\le 1\end{cases}$

Giải.

2. Ta có : $\begin{cases}|x-3|^3-3x-k<0 & (1)\\ \frac{1}{2}\log_2 x^2+\frac{1}{3}\log_2(x-1)^3\le 1 & (2)\end{cases}$. Điều kiện (2) có nghĩa: x > 1.

Từ (2) $\Leftrightarrow$ x(x – 1)≤ 2 $\Leftrightarrow$ 1 < x ≤ 2.

Hệ PT có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thoả 1 < x ≤ 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^3-3x-k<0\\ 1<x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^3-3x<k\\ 1<x\le 2\end{cases}$$

Đặt: f(x) = $(x-1)^3-3x$ và g(x) = k (d). Dựa vào đồ thị (C) $\Rightarrow$ (1) có nghiệm x $\in(1;2]$ $\Leftrightarrow$ $k\ge\min\limits_{(1;2]} f(x)=f(2)=-5$. Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ k > – 5

Bài 38. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ (1), m là tham số thực

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=0$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $\Delta: y=-x+2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;2)$; B; C sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$.

Giải.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với (Δ) là: $x^3+2mx^2+3(m-1)x+2=-x+2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=2\\ g(x)=x^2+2mx+3m-2=0(2)\end{array}\right.$$

Đường thẳng (Δ) cắt dồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A(0;2), B, C $\Leftrightarrow$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\ 3m-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2 \text{ hoặc } m<1\\ m\ne\frac{2}{3}\end{cases}$$

Gọi $B(x_1;y_1)$ và $C(x_2;y_2)$, trong đó x_1,x_2 là nghiệm của (2); $y_1=-x_1+2$ và $y_1=-x_2+2$

Ta có $h=d(M;(\Delta))=\frac{|3+1-2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow BC=\frac{2S_{MBC}}{h}=\frac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$

Mà $BC^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=2\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]=8(m^2-3m+2)$

Suy ra $8(m^2-3m+2)=16\Leftrightarrow m=0$ (thoả mãn) hoặc $m=3$ (thoả mãn)

Bài 39. Cho hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có đồ thị (C_m).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 0.
2. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Giải.

2. $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1\Rightarrow y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

y’ có $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x=m+1\end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $y'>0\ \forall x>2\Leftrightarrow m+1\le 2\Leftrightarrow m\le 1$

Bài 40. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng đi qua điểm M và điểm I(1; 1). (M(0 ; 0) ; M(2 ; 2))

Giải.

2. Với $x_0 \neq 1$, tiếp tuyến (d) với (C) tại M(x_0 ; $\dfrac{x_0}{x_0-1}$) có phương trình :

$$y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0}{x_0-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-1)^2}x + y - \frac{x_0^2}{(x_0-1)^2} = 0$$

(d) có vec – tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; \dfrac{1}{(x_0-1)^2})$, $\overrightarrow{IM} = (x_0 - 1; \dfrac{1}{x_0-1})$

Để (d) vuông góc IM điều kiện là :

$$\vec{u}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow -1.(x_0-1) + \frac{1}{(x_0-1)^2}\frac{1}{x_0-1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$$

+ Với $x_0 = 0$ ta có M(0,0)
+ Với $x_0 = 2$ ta có M(2, 2)