Chuyên đề 9: SỐ PHỨC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. SỐ PHỨC

$z = a + ib$ với $i^2 = -1$

$a, b \in \mathbb{R}$

a là phần thực   b là phần ảo

Số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = a - ib$

2. MÔĐUN $z = a + ib$ $(a; b \in \mathbb{R})$

Môđun: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC: $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$

M(a; b) là ảnh của z: $OM = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ môđun của z

$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi + k2\pi$ là Argument của z, $\arg z = \varphi$

4. DẠNG LƯỢNG GIÁC

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $z = re^{i\varphi}$

$r = |z|$ $\varphi = \arg z$

5. CÁC PHÉP TOÁN VỀ SỐ PHỨC

– Phép cộng: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

– Phép trừ: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

– Phép nhân: $z_1.z_2 = (a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

– Phép chia: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 - i(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1^2 + b_1^2}$

Với dạng lượng giác: $z_1z_2 = rr'[\cos(\varphi + \beta) + i\sin(\varphi + \beta)] = rr'e^{i(\varphi + \beta)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)\right] = \frac{r}{r'}e^{i(\alpha - \beta)}$$

6. LŨY THỪA SỐ PHỨC

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ công thức de Moirve

$z^n = r^ne^{in\varphi}$

7. CĂN BẬC n

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ $(r > 0)$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2n}{n}\right)\right]$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2n}{n}\right)}}$$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Tìm tất cả các số phức z, biết $z^2 = \|z\|^2 + \bar{z}$.

Giải

Giả sử z = x + yi với x, y $\in$ R .

Ta có: $z^2 = |z|^2 + \bar{z} \Leftrightarrow (x+iy)^2 = x^2 + y^2 + x - iy$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2 + x - yi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x = x^2 - y^2 \\ -y = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y^2 \\ y = 0 \vee x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4y^2 = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $z = 0,\ \ z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i,\ \ z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Tính môđun của số phức z, biết $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2 - 2i$.

Giải

Giả sử z = x + yi với x, y $\in$ R.

Ta có: $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2 - 2i$

$\Leftrightarrow [2(x+yi) - 1](1+i) + [(x-yi)+1](1-i) = 2 - 2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$. Suy ra: $z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}i$

Do đó: $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Tìm số phức z, biết $\bar{z} - \dfrac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$.

Giải

Giả sử z = x + yi .

Ta có: $\bar{z} - \dfrac{5+i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} - \left(5+i\sqrt{3}\right) - z = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right) - \left(5+i\sqrt{3}\right) - (x+yi) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-x-5\right) - \left(y+\sqrt{3}\right)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-x-5=0 \\ y+\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \vee x=2 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}.$

Vậy $z=-1-i\sqrt{3}$ hoặc $z=2-i\sqrt{3}$.

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$.

Giải

Cách 1:

Ta có: $z = \dfrac{1+3i\sqrt{3}+9i^2+3\sqrt{3}i^3}{1+3i+3i^2+i^3} = \dfrac{1+3i\sqrt{3}-9-3\sqrt{3}i}{1+3i-3-i} = \dfrac{-4}{i-1} = \dfrac{-4(i+1)}{i^2-1} = 2+2i$

Vậy số phức z có phần thực là 2 và phần ảo là 2.

Cách 2:

Có thể giải bằng cách chuyển về dạng lượng giác như sau:

Ta có: $z = \left[\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right]^3 = 2\sqrt{2}\,\dfrac{\cos\pi+i\sin\pi}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}}$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right] = 2+2i.$

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Tìm số phức z, biết $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$.

Giải

Gọi z = x + yi với x, y $\in$ R.

Ta có: $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i \Leftrightarrow (x + yi) - (2 + 3i)(x - yi) = 1 - 9i$

$\Leftrightarrow (x + yi) - (2x - 2yi + 3xi + 3y) = 1 - 9i$

$\Leftrightarrow (-x - 3y) + (3y - 3x)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3y=1 \\ 3y-3x=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$

Vậy z = 2 – i.

Bài 6: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Cho số phức z thoả mãn $(1+2i)^2z + \bar{z} = 4i - 20$. Tính môđun của z.

Giải

Đặt z = a + bi. Ta có: $(-3+4i)(a+bi)+(a-bi) = 4i - 20$

$\Leftrightarrow -3a-3bi+4ai-4b+a-bi=4i-20$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-4b=-20 \\ 4a-4b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=10 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$.

Vậy z = 4 + 3i $\Rightarrow |z|=5$.

Bài 7: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 2(1+i)z + 2i = 0$. Tìm phần thực và phần ảo của $\dfrac{1}{z}$.

Giải

Ta có: $z^2-2(1+i)z+2i=0 \Leftrightarrow (z-1-i)^2=0 \Leftrightarrow z=1+i \Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$.

Vậy phần thực của $\dfrac{1}{z}$ là $\dfrac{1}{2}$ và phần ảo là $-\dfrac{1}{2}$.

Bài 8: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Tìm phần ảo của số phức z, biết $\overline{z}=(\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$

Giải

Ta có: $\overline{z}=(\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i) = (1+2\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 5+\sqrt{2}i \Leftrightarrow z=5-\sqrt{2}\,i$

$\Rightarrow$ Phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$.

Bài 9 : ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\overline{z}+iz$.

Giải

Ta có: $(1-\sqrt{3}i)=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

$\Rightarrow (1-\sqrt{3}i)^3=8\big(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\big) = -8 \Rightarrow \overline{z}=\dfrac{-8}{1-i}=\dfrac{-8(1+i)}{2}=-4-4i$

$\Rightarrow \overline{z}+iz=-4-4i+i(-4+4i) = -8(1+i) \Rightarrow \left|\overline{z}+iz\right|=8\sqrt{2}$.

Bài 10: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|z-i|=|(1+i)z|$.

Giải

Giả sử z = x + yi (với x, y $\in \mathbb{R}$)

Suy ra : $z - i = x + (y-1)i$ và $(1+i)z = (1 + i)(x + yi) = (x - y) + (x + y)i$

Ta có $|z - i| = |(1+i)z| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn tâm $I(0; -1)$ có bán kính $R = \sqrt{2}$.

Bài 11: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Tìm số phức z thoả mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Giải

Đặt $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

Từ giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases}$.

Vậy: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - i$

Bài 12: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$.
Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Giải

Ta có: $\Delta' = -9 = 9i^2$ do đó phương trình

$\Leftrightarrow z = z_1 = -1 - 3i$ hay $z = z_2 = -1 + 3i$

$\Rightarrow A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = (1 + 9) + (1 + 9) = 20$

Bài 13: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Tìm số phức z thỏa mãn: $|z - (2+i)| = \sqrt{10}$ và $z.\bar{z} = 25$.

Giải

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) suy ra $z - (2 + i) = (x - 2) + (y - 1)i$

Ta có $|z - (2+i)| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ (1)

$z.\bar{z} = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được: $(x; y) = (3; 4)$ hoặc $(x; y) = (5; 0)$

Vậy: $z = 3 + 4i$ hoặc $z = 5$

Bài 14: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Giải

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Ta có $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$

$\Leftrightarrow (2 - 3i)(x + yi) + (4 + i)(x - yi) = 8 - 6i$

$\Leftrightarrow (6x + 4y) - (2x + 2y)i = 8 - 6i$

$\Leftrightarrow 6x + 4y = 8$ và $2x + 2y = 6 \Leftrightarrow x = -2$ và $y = 5$

Vậy phần thực của z là -2 và phần ảo của z là 5.

Bài 15: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Giải phương trình $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$ trên tập hợp các số phức.

Giải

Ta có: $\Delta = -24 - 10i = (1 - 5i)^2$

Do đó $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i$ hay $z = 3i$.

Bài 16: TNPT NĂM 2010

Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1 - 2z_2$.

Giải

Ta có: $z_1 - 2z_2 = (1 + 2i) - 2(2 - 3i) = -3 + 8i$

Suy ra số phức $z_1 - 2z_2$ có phần thực là -3 và phần ảo là 8.

Bài 17: TNPT NĂM 2010

Cho hai số phức $z_1 = 2 + 5i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1.z_2$.

Giải

Ta có: $z_1z_2 = (2 + 5i)(3 - 4i) = 6 - 8i + 15i - 20i^2 = 26 + 7i$

$\Rightarrow$ số phức z_1z_2 có phần thực là 26 và phần ảo là 7.

Bài 18: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

Giải

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$; suy ra $z - 3 + 4i = (x - 3) + (y + 4)i$

Từ giả thiết, ta có:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm I(3; -4) bán kính R = 2

Bài 19: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Giải

Ta có: $(1 + i)^2 (2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$

$\Leftrightarrow (2i)(2 - i)z - (1 + 2i)z = 8 + i \Leftrightarrow z[4i + 2 - 1 - 2i] = 8 + i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{8+i}{1+2i} = \frac{(8+i)(1-2i)}{5} = \frac{8-15i+2}{5} = \frac{10-15i}{5} = 2-3i$$

Phần thực của z là 2. Phần ảo của z là –3.

Bài 20: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Giải phương trình sau trên tập hợp các số phức: $\frac{4z-3-7i}{z-i} = z-2i$

Giải

Ta có: $\frac{4z-3-7i}{z-i} = z-2i \Leftrightarrow z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 7i = 0$ (với $z \neq i$)

$\Delta = (4 + 3i)^2 - 4(1 + 7i) = 3 - 4i = (2 - i)^2$

Vậy : $z = \frac{4+3i+2-i}{2} = 3+i$ hay $z = \frac{4+3i-2+i}{2} = 1+2i$

Kết hợp với điều kiện nên phương trình có nghiệm $z = 3 + i$; $z = 1 + 2i$

Bài 21: TNPT NĂM 2009

Giải phương trình (S): $8z^2 - 4z + 1 = 0$ trên tập số phức.

Giải

Ta có: $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$

Do đó, phương trình đã cho có 2 nghiệm là:

$$z_1 = \frac{4+4i}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \text{ và } z_2 = \frac{4-4i}{16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

Bài 22: TNPT NĂM 2009

Giải phương trình $2z^2 - iz + 1 = 0$ trên tập số phức.

Giải

Ta có: $\Delta = i^2 - 8 = -9 = (3i)^2$.

Do đó, phương trình đã cho có 2 nghiệm là:

$$z_1 = \frac{i+3i}{4} = i \text{ và } z_2 = \frac{i-3i}{4} = -\frac{1}{2}i$$