BÀI 2. CÁC BÀI TOÁN VỀ KHAI TRIỂN NEWTON

Bài 1. Cho n nguyên, $n \geq 2$. Chứng minh:

$$a)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \qquad\qquad b)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Giải

a. Khai triển nhị thức:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.\left(\frac{1}{n}\right)^k = C_n^0\left(\frac{1}{b}\right)^0 + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \ldots = 1+1+\ldots > 2 \ \ (\text{Vì } C_n^i.\left(\frac{1}{n}\right)^i > 0)$$

b. Ta có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+1+\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \ldots < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

Bài 2. Cho số *a, b* thỏa mãn: $a+b=1$. Chứng minh: $a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Giải

Đặt $a = \frac{1}{2}+x,\ b = \frac{1}{2}-x$ thì $a^n + b^n = \left(\frac{1}{2}+x\right)^n + \left(\frac{1}{2}-x\right)^n$

$$= \left(\frac{1}{2^n} + C_n^1\cdot\frac{x}{2^{n-1}} + C_n^2\cdot\frac{x^2}{2^{n-2}} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^n} - C_n^1\cdot\frac{x}{2^{n-1}} + C_n^2\cdot\frac{x^2}{2^{n-2}} - \ldots\right)$$

$= 2\left(\frac{1}{2^n} + C_n^2\cdot\frac{x^2}{2^{n-2}} + C_n^4\,\frac{x^4}{2^{n-4}} + \ldots\right) \geq 2\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vậy $a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$

Bài 3. Tìm $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn: $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 2^3C_n^3 + \ldots + 2^nC_n^n = 243$

Giải

$$(1+2)^n = C_n^0 + C_n^1.2 + C_n^2.2^2 + \ldots + C_n^n.2^n = 243 \Leftrightarrow 3^n = 243 \Leftrightarrow n = 5$$

Bài 4. Cho khai triển nhị thức

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right) + \ldots + C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$$

Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20. Tìm *n* và *x*.

Giải

Ta có $C_n^3 = 5C_n^1$ (với $n \geq 3,\ n \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!3!} = 5n \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n$

$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 30 \ \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow (n-7)(n+4) = 0 \Rightarrow n = 7$

Khi đó số hạng thứ tư là $C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 20 \Leftrightarrow 35 \cdot 2^{2(x-1)-x} = 140 \Leftrightarrow x = 4$

Bài 5. Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển:

$$a)\ P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15},\ x \neq 0\ ;\ b)\ Q(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17},\ x \neq 0$$

Giải

a. Số hạng tổng quát: $a_k = C_{15}^k\left(x^2\right)^{15-k}.\left(\dfrac{1}{x}\right)^k = C_{15}^k.x^{2(15-k)}.x^{-k} = C_{15}^k.x^{30-3k}$

Số hạng không chứa *x* tương ứng với $30 - 3k = 0 \Rightarrow k = 10$ là $C_{15}^{10} = 3003$.

b. Số hạng tổng quát: $a_k = C_{17}^k\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{17-k}.\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^k = C_{17}^k.x^{-\frac{2}{3}(17-k)}x^{\frac{3}{4}k} = C_{17}^k x^{\frac{17-k-136}{12}}$

Số hạng không chứa *x* tương ứng với $17k - 136 = 0 \Rightarrow k = 8$ là $C_{17}^8 = 24310$

Bài 6. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

Giải

$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$. Do $C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1} = 1$

nên $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + \ldots + C_{2n+1}^{2n} = 2^{2n+1} - 2 = 2\left(20^{20} - 1\right)$

$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2^{21} \Leftrightarrow 2n + 1 = 21 \Leftrightarrow n = 10$. Xét biểu thức

$$\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \left(x^{-4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\left(x^{-4}\right)^{10-k}\left(x^7\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{4k-40}x^{7k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$$

Xét $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow 11k = 66 \Leftrightarrow k = 6$. Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6 = 210$.

Bài 7. Trong khai triển nhị thức $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$, hệ số của số hạng thứ ba lớn hơn hệ số của số hạng thứ hai là 35.

a. Tìm *n*. **b.** Tìm số hạng không chứa *x*

Giải

a. Ta có $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-2k}$

Hệ số của số hạng thứ i ứng với $k=i-1$ là: $a_{i-1}=C_n^{i-1}$.

Theo giả thiết: $C_n^2-C_n^1=35$; $n^2-3n-70=0\Leftrightarrow(n+7)(n-10)=0\Rightarrow n=10\in\mathbb{N}$

b. Số hạng không chứa x ứng với $n-2k=0$; $10-2k=0\Leftrightarrow k=5$ là $C_{10}^5=252$

Bài 8. Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x>0$

Giải

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{-1}{4}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{7-k}\left(x^{\frac{-1}{4}}\right)^k=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7-k}{3}}x^{\frac{-k}{4}}=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{28-7k}{12}}$$

Xét $\frac{28-7k}{12}=0\Leftrightarrow k=4$. Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_7^4=35$.

Bài 9. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x.\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$, biết rằng:

$C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$.

Giải

Ta có: $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$ (n nguyên, $n\geq 2$)

$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=79\Leftrightarrow n^2+n-156=0\Leftrightarrow(n+13)(n-12)=0\Rightarrow n=12\in\mathbb{N}$

Với $n=12$ thì $a_k=C_{12}^k\left(x\sqrt[3]{x}\right)^{12-k}\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k=C_{12}^k\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-k}.\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k=C_{12}^k.x^{\frac{240-48k}{15}}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $240-48k=0\Leftrightarrow k=5$ là $C_{12}^5=792$.

Bài 10. Tìm các hạng tử hữu tỉ trong khai triển: **a.** $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5$; **b.** $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$

Giải

a. Khi khai triển $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5$, số hạng TQ: $T_{k+1}=C_5^k.\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}.\left(\sqrt[3]{3}\right)^k=C_5^k.2^{\frac{5-k}{2}}.3^{\frac{k}{3}}$

Để T_{k+1} hữu tỉ thì $\frac{5-k}{2}$ và $\frac{k}{3}$ nguyên với $k=\overline{0,5}\Rightarrow k=3\Rightarrow T_4=C_5^3.2.3=60$

b. Khi khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$, số hạng TQ: $T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^k=C_9^k.3^{\frac{9-k}{2}}.2^{\frac{k}{3}}$

Để T_{k+1} hữu tỉ thì $\frac{9-k}{2}, \frac{k}{3}$ nguyên với $k = \overline{0,9} \Rightarrow k = 3; k = 9$

Vậy có 2 hạng tử hữu tỉ là: $T_4 = C_9^3.3^2.2 = 4536$; $T_{10} = C_9^9.3^0.2^3 = 8$

Bài 11. Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển nhị thức Newton $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$

Giải

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k.x^{40-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{31} C_{40}^k.x^{40-3k}$; $40-3k = 31 \Leftrightarrow k = 3; C_{40}^3 = 9880$

Bài 12. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$,

biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Giải

$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1} = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2} = 7(n+3) \Leftrightarrow n = 12$.

$\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12} = \left(x^{-3}+x^{\frac{5}{2}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k\left(x^{-3}\right)^{12-k}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{3k-36}x^{\frac{5k}{2}} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{\frac{11k-72}{2}}$

Xét $\frac{11k-72}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 8$. Vậy số hạng chứa x^8 trong khai triển là $C_{12}^8 = 495$.

Bài 13. Tìm hệ số của x^9 khi khai triển: $P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \ldots + (1+x)^{14}$

Giải

$P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \ldots + (1+x)^{14} = \sum_{k=0}^{9} C_9^k x^k + \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^k + \ldots + \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k.x^k$

Hệ số theo x^9 ứng tất cả $k = 9$ là:

$C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 \ldots + C_{14}^9 = 1 + 10 + 55 + 220 + 715 + 2002 = 3003$

Bài 14. a. Tìm hệ số của x^{15} trong $(1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \ldots + 20(1+x)^{20}$

b. Tìm hệ số của x^5 khi khai triển: $(2x+1)^4 + (2x+1)^5 + (2x+1)^6 + (2x+1)^7$

Giải

a. Với biểu thức: $k(1+x)^k$ chứa số hạng ax^{15} khi $k \ge 15$, lúc đó:

$k(1+x)^k = k\sum_{i=0}^{k} C_k^i.x^i$ thì hệ số theo x^{15} ứng với $i = 15$ là $k.C_k^{15}$.

Suy ra hệ số theo x^{15} của khai triển: $(1+x)+2(1+x)^2+...+20(1+x)^{20}$ là:

$a_{15}=15+16C_{16}^{15}+17C_{17}^{15}+18C_{18}^{15}+19C_{19}^{15}+20C_{20}^{15}=400995$

b. Ta có: $P(x)=(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7$

$$=(1+2x)^4+\sum_{i=0}^{5}C_5^i(2x)^i+\sum_{j=0}^{6}C_6^j.(2x)^j+\sum_{k=0}^{7}C_7^k(2x)^k$$

Hệ số theo x^5 ứng với $i=j=k=5$ là: $C_5^5.2^5+C_6^5.2^5+C_7^5.2^5=896$.

Bài 15. Tìm hệ số theo x^3 khi khai triển $P(x)=(x+1)^2.(3-x)^{10}$

Giải

Ta có: $P(x)=(x+1)^2.(3-x)^{10}=x^2(3-x)^{10}+2x(3-x)^{10}+(3-x)^{10}$

$$=x^2\sum_{i=0}^{10}C_{10}^i.3^{10-i}(-x)^i+2x\sum_{j=0}^{10}C_{10}^j.3^{10-j}(-x)^j+\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.3^{10-k}.x^k$$

Hệ số theo x^3 ứng với $i=1,\ j=2,\ k=3$ là: $-C_{10}^1.3^9+2.C_{10}^2.3^8-C_{10}^3.3^7=131220$

Bài 16. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $P=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$

Giải

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$P=x\sum_{k=0}^{5}C_5^k(-2x)^{5-k}+x^2\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(3x)^{10-k}\quad(1)$$

Vậy từ (1) suy ra số hạng chứa x^5 là: $x.C_5^1(-2x)^4+x^2.C_{10}^7(3x)^3$.

Do đó, hệ số của x^5 là $(-2)^4C_5^1+(3)^3C_{10}^7=16.5+27.120=80+3240=3320$

Vậy hệ số của x^5 trong biểu thức P đã cho là 3320.

Bài 17. Tìm hệ số theo x^k của khai triển $(1+x)^n.(1+x)^m$, $m,n\ge k$

Giải

$(1+x)^n(1+x)^m=\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^i\sum_{i=0}^{m}C_m^jx^j$. Vì $m,\ n\ge k$ nên $x^k=x^0.x^k=x.x^{k-1}=...=x^k.x^0$.

Do đó, hệ số theo x^k là: $a_k=C_n^0.C_m^k+C_n^1.C_m^{k-1}+...+C_n^k.C_m^0$

Bài 18. Trong khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ tìm hệ số theo x^{12}, biết rằng tổng các hệ số bằng 1024.

Giải

Đặt $P(x)=(x^2+1)^n$ thì tổng các hệ số là $P(1)=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n=1024$

$\Rightarrow n=10$. Với $n=10$ thì $P(x)=(x^2+1)^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k.(x^2)^{10-k}.1^k=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k.x^{20-2k}$.

Hệ số theo x^{12} ứng $20-2k=12\Rightarrow k=4$ là $C_{10}^4=210$.

Bài 19. Tìm hệ số của x^{n-1} ; x^{n-2} của khai triển: $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2^2}\right)...\left(x+\frac{1}{2^n}\right)$

Giải

a. Ta có: $P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2^2}\right)...\left(x+\frac{1}{2^n}\right)=x^n+A.x^{n-1}+B.x^{n-2}+...+Rx+S$

Hệ số của x^{n-1} là: $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$

b. Hệ số của x^{n-2} là: $B=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2^n}$.

Mà $A^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}+2B$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^{n-1}}\right)+2B=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}+2B=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+2B$$

Do đó $B=\frac{1}{2}\left(A^2-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\right)=\frac{4^n-3.2^n+2}{3.4^n}$

Bài 20. Tìm hệ số của x^{50} trong khai triển của các đa thức sau đây:

a. $P(x)=(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+...+x^{1000}$

b. $Q(x)=(1+x)^1+2(1+x)^2+...+1000(1+x)^{1000}$

Giải

a. Để ý: $(x+1)^{1000}-x^{1001}=(x+1-x).P(x)=P(x)$

Do đó hệ số của x^{50} trong khai triển $P(x)$ cũng là hệ số theo x^{50} trong khai triển của nhị thức $(x+1)^{1001}=(1+x)^{1001}=\sum\limits_{i=0}^{1001}C_{1001}^i.x^i$ là C_{1001}^{50}.

b. $Q(x)=(1+x).\sum_{i=1}^{1000} i(1+x)^{i-1}=(1+x).\left(\sum_{i=1}^{1000}(1+x)^i\right)'=(1+x)\left((1+x)\dfrac{1-(1+x)^{1000}}{1-(1+x)}\right)'$

$=\dfrac{1000(1+x)^{1001}}{x}-\dfrac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x^2}$. Vậy hệ số theo x^{50} là: $1000.C_{1001}^{51}-C_{1001}^{52}$

Bài 21. Tìm hệ số theo x^8 của khai triển: $P(x)=(1+x^2-x^3)^9$

Giải

$P(x)=\left[(1+x^2)-x^3\right]^9=(1+x^2)^9-C_9^1(1+x^2)^8.x^3+C_9^2(1+x^2)^7.x^6-C_9^3.(1+x^2).x^9+...$

Vì x^8 có mũ chẵn nên các số hạng theo x^8 chỉ xuất hiện ở hai đa thức sau:

$(1+x^2)^9=\sum_{i=0}^{9}C_9^i.(x^2)^i$ ứng với $i=4$, tức là có hệ số C_9^4

$C_9^2(1+x^2)^7.x^6=C_9^2.x^6.\sum_{i=0}^{7}C_7^j(x^2)^j$ ứng với $j=1$, tức là có hệ số $C_9^2.C_7^1$

Vậy hệ số theo x^8 của khai triển P(x) là: $C_9^4+C_9^2.C_7^1=378$

Bài 22. a. Trong khai triển $(x+y+z)^n$ tìm số hạng chứa $x^k y^m$ $(k+m\le n)$

b. Tìm hệ số theo $x^6y^5z^4$ của khai triển $(2x-5y+z)^{15}$

Giải

a. Ta có $(x+y+z)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.x^k.(y+z)^{n-k}=\sum C_n^k.x^k\left(\sum_{m=0}^{n-k}C_{n-k}^m.y^m.z^{n-k-m}\right)$

Vậy số hạng cần tìm là $\dfrac{n!}{k!m!l!}x^k.y^m.z^l$ với $l=n-k-m$

Tổng quát: $\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^n=\sum\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_{m!}}a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ với tổng $\sum$ lấy theo

$n_1+n_2+...+n_m=n$

b. Áp dụng $(2x-5y+z)^{15}=((2x)+(-5y)+z)^{15}$

Hệ số theo $x^6y^5z^4$ là: $2^6(-5)^5\cdot\dfrac{15!}{6!5!4!}=-126.126.10^6$

Chú ý: $C_n^k.C_{n-k}^m=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\dfrac{(n-k)!}{m!(n-k-m)!}=\dfrac{n!}{k!m!(n-k-m)!}$

Bài 23. Cho nhị thức $P(x)=(3-2x)^n$, n tự nhiên. Sau khi khai triển, tính:

a. Tổng tất cả các hệ số theo lũy thừa lẻ.

b. Tổng tất cả các hệ số theo lũy thừa chẵn.

Giải

Ta có: $P(x)=(3-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$

$1=(3-2)^n=P(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+...+a_n$

$P(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+...+(-1)^n a_n$

a. Tổng các hệ số theo lũy thừa lẻ: $a_1+a_3+a_5+...=\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}=\dfrac{1-5^n}{2}$

b. Tổng các hệ số theo lũy thừa chẵn: $a_0+a_2+a_4+...=\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}=\dfrac{1+5^n}{2}$

Bài 24. Tìm hệ số lớn nhất của khai triển tổng quát: $(a+b)^n$

Giải

Ta có $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k.a^{n-k}.b^k$. Các hệ số là C_n^k, $0\le k\le n$.

Xét $C_n^{k-1}<C_n^k \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}<\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\Leftrightarrow k<n-k+1\Leftrightarrow k<\dfrac{n+1}{2}$.

Do đó: $\underset{k=\overline{0,n}}{\text{Max}}\, C_n^k = C_n^{\frac{n}{2}}$ nếu n chẵn và $\underset{k=\overline{0,n}}{\text{Max}}\, C_n^k = C_n^{\frac{n+1}{2}}$ nếu n lẻ.

Bài 25. Tìm hạng tử lớn nhất trong khai triển của $(a+b)^n$ với $a,b>0;n\in\mathbb{N}$

Giải

Ta có: $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k.a^{n-k}.b^k$. Gọi $T_{k+1}=C_n^k.a^{n-k}b^k=\underset{k=\overline{0,n}}{\text{Max}}\, C_n^k.a^{n-k}b^k$

Khi đó $\begin{cases}T_k\le T_{k+1}\\T_{k+2}\le T_{k+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_n^{k-1}.a^{n-k+1}.b^{k-1}\le C_n^k.a^{n-k}.b^k\\C_n^{k+1}.a^{n-k-1}.b^{k-1}\le C_m^k.a^{n-k}.b^k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\le\dfrac{(n+1)b}{a+b}\\k\ge\dfrac{(n+1)b}{a+b}-1\end{cases}$

Vậy, nếu $\dfrac{(n+1)b}{a+b}$ nguyên thì có 2 số hạng ứng với $k=\dfrac{(n+1)b}{a+b}$ hay $\dfrac{(n+1)b}{a+b}-1$

Còn nếu $\dfrac{(n+1)b}{a+b}$ không nguyên thì chỉ có 1 số hạng ứng với $k=\left[\dfrac{(n+1)b}{a+b}\right]$.