Biên soạn : Lưu Văn Chung

BÀI TẬP HÌNH HỌC

9

TÀI LIỆU LUYỆN THI V

Bài tập luyện thi vào lớp 10

ĐỀ BÀI

Bài 1

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại 2 điểm A và B. Vẽ đường kính AC và AD của (O) và (O'). Tia CA cắt đường tròn (O') tại F, tia DA cắt đường tròn (O) tại E. .

1. *Chứng minh tứ giác EOO'F nội tiếp*
2. *Qua A kẻ cát tuyến cắt(O) và (O') lần lượt tại M và N. Chứng minh tỉ số $\frac{MC}{NF}$ không đổi khi đường thẳng MN quay quanh A*
3. *Tìm quỹ tích trung điểm I của MN*
4. *Gọi K là giao điểm của NF và ME. Chứng minh đường thẳng KI luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng MN quay quanh A*
5. *Khi MN // EF. Chứng minh MN = BE + BF*

Bài 2

Cho hình vuông ABCD cố định . E là điểm di động trên cạnh CD ($E \neq$ C và D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng DC tại K.

1. *Chứng minh $\widehat{CAF} = \widehat{CKF}$.*
3. *Chứng minh ΔKAF vuông cân*
4. *Chứng minh đường thẳng BD đi qua trung điểm I của KF*
5. *Gọi M là giao điểm của BD và AE. Chứng minh IMCF nội tiếp*
6. *Chứng minh khi điểm E thay đổi vị trí trên cạnh CD thì tỉ số $\frac{ID}{CF}$ không đổi. Tính tỉ số đó?*

Bài 3

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm thuộc cung nhỏ AC. Vẽ MH $\perp$ BC tại H , vẽ MI $\perp$ AC tại I

1. *Chứng minh $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$*
2. *Đường thẳng HI cắt đường thẳng AB tại K.Ch/ minh MK$\perp$ BK*
3. *DF cắt EB tại M, HF cắt EC tại N.Chứng minh $\Delta MIH \sim \Delta MAB$*

4. *Gọi E là trung điểm IH và F là trung điểm AB. Chứng minh tứ giác KMEF nội tiếp . Suy ra ME $\perp$ EF*

Bài 4

Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B và C là hai tiếp điểm).Vẽ CD $\perp$ AB tại D cắt (O) tại E. Vẽ EF $\perp$ BC tại F; EH $\perp$ AC tại H.

1. *Chứng minh các tứ giác EFCH , EFBD nội tiếp*
2. *Chứng minh EF^2 = ED. EH*
3. *Chứng minh tứ giác EMFN nội tiếp*
4. *Chứng minh MN $\perp$ EF*

Bài 5

Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn .Vẽ tiếp tuyến AM và cát tuyến ACD (tia AO nằm giữa hai tia AM và AD). Gọi I là trung điểm CD.

1. *Chứng minh tứ giác AMOI nội tiếp đường tròn. Xác định tâm K.*
2. *Gọi H là giao điểm của MN và OA .Chứng minh CHOD nội tiếp*
3. *Đường tròn đường kính OA cắt (O) tại N. Vẽ dây CB $\perp$ MO cắt MN tại F. Chứng minh CFIN nội tiếp*
4. *Tia DF cắt AM tại K. Chứng minh KE $\perp$ AM*

Bài 6

Cho OM = 3R , MA , MB là hai tiếp tuyến , AD // MB , MD cắt (O) tại C , BC cắt MA tại F , AC cắt MB tại E.

1. *Chứng minh MAOB nội tiếp*
2. *Chứng minh EB^2 = EC.EA*
3. *Chứng minh E là trung điểm MB*
4. *Chứng minh BC.BM = MC.AB*
5. *Tia CF là phân giác của $\widehat{MCA}$*
6. *Tính $S_{\Delta BAD}$ theo R*

Bài 7

Cho MA , MB là hai tiếp tuyến của (O). C là điểm thuộc cung nhỏ AB. Vẽ CD $\perp$ AB . CE $\perp$MA , CF$\perp$MB

1. *Chứng minh các tứ giác sau nội tiếp : DAEC , DBFC*
2. *Chứng minh CE.CF = CD^2*

3. AC cắt ED tại H, BC cắt DF tại K. Chứng minh CHDK nội tiếp
4. Chứng minh HK // AB
5. Chứng minh HK là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp ΔCKF và ΔCEH
6. Gọi I là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (CKF) và (CEH). Chứng minh đường thẳng CI đi qua trung điểm của AB

Bài 8

Cho đường thẳng d cắt (O;R) tại C và D. M là điểm di động trên d (M ngoài đường tròn và MC < MD). Vẽ hai tiếp tuyến MA , MB (A và B là hai điểm) , H là trung điểm CD

1. Chứng minh MIHF và OHEI là các tứ giác nội tiếp
2. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$
3. Chứng minh CIOD nội tiếp
4. Chứng minh $4IF.IE = AB^2$
5. Chứng minh khi M di động thì đường thẳng AB luôn điểm qua điểm cố định

Bài 9

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R) ; hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H ($D \in BC$; $E \in AC$; AB < AC)

1. Chứng minh các tứ giác AEDB và CDHE nội tiếp
2. Chứng minh OC vuông góc với DE
3. CH cắt AB tại F. Chứng minh :

$$AH.AD + BH.BE + CH.CF = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2}$$

4. Đường phân giác trong AN của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại N , cắt đường tròn (O) tại K.(K khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCAN. Chứng minh KO và CI cắt nhau tại điểm thuộc đường tròn (O).

Bài 10

Cho (O;R) và dây BC = 2a cố định. M $\in$ tia đối tia BC. Vẽ đường tròn đường kính MO cắt BC tại E , cắt (O) tại A và D (A $\in$ cung lớn $\overset{\frown}{BC}$). AD cắt MO tại H , cắt OE tại N.

1. Chứng minh MA là tiếp tuyến của (O) và $MA^2 = MB.MC$

2. Chứng minh tứ giác MHEN nội tiếp
3. Tính ON theo a và R
4. Tia DE cắt (O) tại F. Chứng minh ABCF là hình thang cân

Bài 11

Cho nửa đường tròn (O;R) , đường kính AB . C là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$, K là trung điểm BC. AK cắt (O) tại M . Vẽ CI vuông góc với AM tại I cắt AB tại D.

1. Chứng minh tứ giác ACIO nội tiếp . Suy ra số đo góc $\widehat{OID}$
2. Chứng minh OI là tia phân giác của $\widehat{COM}$
3. Chứng minh $\Delta CIO \sim \Delta CMB$. Tính tỉ số $\frac{IO}{MB}$
4. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$. Từ đó tính AM , BM theo R
5. Khi M là điểm chính giữa cung BC.Tính diện tích tứ giác ACIO theo R

Bài 12

Cho ΔABC (AC > AB và $\widehat{BAC} < 90^0$). Gọi I , K lần lượt là trung điểm AB và AC. Các đường tròn (I) đường kính AB và (K) đường kính AC cắt nhau tại điểm thứ hai là D . Tia BA cắt (K) tại E ; tia CA cắt (I) tại F .

1. Chứng minh B,C, D thẳng hàng
2. Chứng minh BFEC nội tiếp
3. Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với với đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. So sánh DH và DE

Bài 13

Cho đường tròn (O) và dây AB. Trên tia AB lấy điểm C nằm ngoài đường tròn . Từ điểm E chính giữa cung lớn AB kẻ đường kính EF cắt dây AB tại D. Tia CE cắt (O) tại điêm I. Các tia AB và FI cắt nhau tại K

1. Chứng minh EDKI nội tiếp
2. Chứng minh CI.CE =CK.CD
3. Chứng minh IC là tia phân giác ngoài đỉnh I của ΔAIB
4. Cho A , B , C cố định. Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi

nhưng vẫn đi qua A , B thì đường thẳng FI luôn đi qua một điểm cố định

Bài 14

Cho ΔABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm D . Vẽ đường tròn (O) đường kính CD.Đường tròn (I) đường kính BC cắt (O) tại E. AE cắt (O) tại F.

1. *Chứng minh ABCE nội tiếp*
2. *Chứng minh $\widehat{BCA} = \widehat{ACF}$*
3. *Lấy điểm M đối xứng với D qua A ; N đối xứng với D qua đường thẳng BC. Chứng minh BMCN nội tiếp*
4. *Xác định vị trí của D để đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMCN có bán kính nhỏ nhất*

Bài 15

Cho ΔABC có $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nhọn . các đường tròn đường kính AB và AC cắt nhau tại H. Một đường thẳng d tùy ý đi qua A lần lượt cắt hai đường tròn tại M và N.

1. *Chứng minh $H \in BC$*
2. *Tứ giác BCNM là hình gì ? Tại sao?*
3. *Gọi I và K là trung điểm của BC và MN. Chứng minh bốn điểm A , H, I , $K \in$ một đường tròn .Từ đó suy ra quỹ tích của I khi d quay quanh A*
1. *Xác định vị trí của d để MN có độ dài lớn nhất*

Bài 16

Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính bằng nhau và cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến qua B cắt (O) tại E , cắt (O') tại F.

1. *Chứng minh AE = AF*
2. *Vẽ cát tuyến BCD vuông góc với AB ($C \in (O)$; $D \in (O')$), Gọi K là giao điểm của CE và FD. Chứng minh AEKF và ACKD là các tứ giác nội tiếp*
3. *Chứng minh ΔEKF cân*
4. *Gọi I là trung điểm EF. Chứng minh I , A , K thẳng hàng*
5. *Khi EF quay quanh B thì I và K di chuyển trên đường nào?*

Bài 17

Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với (O). Vẽ dây BD // AC. AD cắt (O) tại K. Tia BK cắt AC tại I.

1. *Chứng minh $IC^2 = IK.IB$*
2. *Chứng minh Δ BAI ~ ΔAKI*
3. *Chứng minh I là trung điểm AC*
4. *Tìm vị trí điểm A để $CK \perp AB$*

Bài 18

Cho đường tròn (O;R)và điểm A cố định với OA = 2R. BC là đường kính quay quanh O. Đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt đường thẳng AO tại I.

1. *Chứng minh OI.OA = OB.OC. Suy ra I là điểm cố định*
2. *Trường hợp AB , AC cắt (O) tại D và E. DE cắt OA tại K.*
    a. *Chứng minh tứ giác KECI nội tiếp*
    b. *Tính AK theo R*
    c. *Gọi N là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔADE với OA. Chứng minh tứ giác BOND nội tiếp . Suy ra N là điểm cố định*
3. *Tìm vị trí của BC để diện tích ΔABC lớn nhất*
4. *Tìm vị trí BC để bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC nhỏ nhất.*

Bài 19

Cho đường tròn (O; R) và dây AB cố định. M là điểm di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. Vẽ hình bình hành MABC. Vẽ $MH \perp BC$ tại H cắt (O) tại K. BK cắt MC tại F.

1. *Chứng minh tứ giác FKHC nội tiếp . Suy ra K là trực tâm của ΔMBC*
2. *Tia phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt (O) tại E và cắt tia CB tại N.Chứng minh ΔMBN cân. Suy ra N thuộc một cung tròn cố định tâm O' khi M di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$*
3. *Chứng minh AB là tiếp tuyến của (O')*
4. *Khi $AB = R\sqrt{3}$. Tính diện tích tứ giác OEO'B theo R*

Bài 20

Cho đường tròn (O; R) và một dây AB cố định (AB < 2R) . Một điểm M tùy ý trên cung lớn AB (M ≠ A , B) . Gọi I là trung điểm của dây AB và (O') là đường tròn qua M và tiếp xúc với AB tại A. Đường thẳng MI cắt (O) ; (O') lần lượt tại các giao điểm thứ hai là N , P.

1. *Chứng minh* $IA^2 = IP.IM$
2. *Chứng minh tứ giác ANBP là hình bình hành*
3. *Chứng minh IB là tiếp tuyến của đường tròn (MBP)*
4. *Chứng minh khi M di chuyển thì P chạy trên một cung tròn cố định*

Bài 21

Cho ΔABC có góc A tù , đường tròn (O) đường kính AB cắt đường tròn (O') đường kính AC tại giao điểm thứ hai là H. Một đường thẳng d quay quanh A cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại M và N sao cho A nằm giữa M và N.

1. *Chứng minh* $H \in BC$ *và tứ giác BCNM là hình thang vuông*
2. *Chứng minh tỉ số* $\frac{HM}{HN}$ *không đổi*
3. *Gọi I là trung điểm MN , K là trung điểm BC. Chứng minh 4 điểm A , H , I , K cùng thuộc một đường tròn và I di chuyển trên một cung tròn cố định*
4. *Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích ΔMHN lớn nhất*

Bài 22

Cho đoạn thẳng AB = 2a có trung điểm là O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB kẻ các tia Ax và By vuông góc với AB. Một đường thẳng d thay đổi cắt Ax tại M , cắt By tại N sao cho $AM.BN = a^2$.

1. *Chứng minh* $\Delta AOM \sim \Delta BON$ *và* $\widehat{MON}$ *vuông*
2. *Gọi H là hình chiếu của O trên MN. Chứng minh đường thẳng d luôn tiếp xúc với một nửa đường tròn cố định tại H.*
3. *Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔMON chạy trên một tia cố định*
4. *Tìm vị trí của đường thẳng d sao cho chu vi ΔAHB đạt giá trị lớn nhất , tính giá trị lớn nhất đó theo a*

Bài 23

Cho ΔABC có ba góc nhọn với trực tâm H. Vẽ hình bình hành BHCD. Đường thẳng qua D và // BC cắt đường thẳng AH tại E.

1. *Chứng minh A , B , C , D , E cùng thuộc một đường tròn*
2. *Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC , chứng minh* $\widehat{BAE} = \widehat{OAC}$ *và BE = CD*
3. *Gọi M là trung điểm của BC , đường thẳng AM cắt OH tại G. Chứng minh G là trọng tâm của ΔABC*

Bài 24

Cho ba điểm cố định A , B , C thẳng hàng (theo thứ tự đó). Một đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua B, C . Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AM , AN đến đường tròn (O). Đường thẳng MN cắt AO và AC lần lượt tại H và K

1. *Chứng minh M , N di động trên một đường tròn cố định*
2. *Gọi I là trung điểm BC. Vẽ dây MD // BC. Chứng minh DN đi qua điểm cố định*
3. *Chứng minh đường tròn (OHI) luôn đi qua 2 điểm cố định*

Bài 25

Cho ΔABC có $\widehat{A} = 45^0$, *BC = a . O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC B' và C' là chân các đường cao hạ từ B và C xuống các cạnh tương ứng .Gọi O' là điểm đối xứng của O qua đường thẳng B'C'.*

1. *Chứng minh A , B' , O' , C' cùng thuộc một đường tròn tâm I*
2. *Tính B'C' theo a*
3. *Tính bán kính đường tròn (I) theo a*

Bài 26

Cho đường tròn (O;R) và điểm M sao cho OM = 2R. Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA và MB với (O)

1. *Chứng minh Δ AMB đều và tính MA theo R*
2. *Qua điểm C thuộc cung nhỏ* $\widehat{AB}$ *vẽ tiếp tuyến với (O) cắt MA tại E và cắt MB tại F. Chứng minh chu vi Δ MEF không đổi khi C chạy trên cung nhỏ AB*

3. OF cắt AB tại K , OE cắt AB tại H. Chứng minh $EK \perp OF$.
4. Khi sđ $\overset{\frown}{BC} = 90^0$. Tính EF và diện tích ΔOHK theo R

Bài 27

Cho đường tròn (O;R) và dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ .Các đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

1. Chứng minh BEDC nội tiếp đường tròn
2. Vẽ đường tròn tâm H bán kính HA cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh MN // ED và 4 điểm B, C , M , N cùng thuộc một đường tròn
3. Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ A đi qua một điểm cố định
4. Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ H cũng đi qua một điểm cố định O'
5. Tìm độ dài BC để O' thuộc đường tròn (O)

Bài 28

Cho đường tròn (O ; R) có dây $BC = R\sqrt{3}$ .Vẽ đường tròn (M) đường kính BC. Lấy điểm $A \in (M)$ (A ở ngoài (O)). AB , AC cắt (O) tại D và E. Đường cao AH của ΔABC cắt DE tại I.

1. Chứng minh AD.AB = AE.AC
2. Chứng minh I là trung điểm DE
3. AM cắt ED tại K. Chứng minh IKMH nội tiếp
4. Tính DE và tỉ số $\frac{AH}{AK}$ theo R
5. Tìm vị trí điểm A để diện tích ΔADE lớn nhất

Bài 29

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại P và Q. Tiếp tuyến chung gần P của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại A và tiếp xúc với (O') tại B. Tiếp tuyến cỏa (O) tại P cắt (O') tại điểm thứ hai là D (D $\neq$ P), đường thẳng AP cắt đường thẳng BD tại K. Chứng minh :

1. Bốn điểm A , B , Q , K cùng thuộc một đường tròn
2. Δ BPK cân
3. Đường tròn ngoại tiếp Δ PQK tiếp xúc với PB và KB

Bài tập luyện thi vào lớp 10

Bài 30

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O) và (O') tại C và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt (O) và (O') tại M và N. Các đường thẳng BC và BD lần lượt cắt đường thẳng MN tại P và Q; các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Chứng minh :

1. Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD
2. Δ EPQ cân

Bài 31

Cho Δ ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) (AB < AC). Đường tròn tâm (O') tiếp xúc với (O) tại M và tiếp xúc với hai cạnh AB và AC tại I và K . Gọi E là giao điểm thứ hai của MK với (O).

1. Chứng minh ME là tia phân giác $\widehat{AMC}$
2. Tia phân giác Mx của $\widehat{BMC}$ cắt IK tại F . Chứng minh tứ giác FKCM và FIBM nội tiếp
3. Chứng minh $\Delta BIF \sim \Delta FKC$
4. Chứng minh $FM^2 = MB.MC$
5. Chứng minh tia CF là phân giác $\widehat{BCA}$

Bài 32

Cho đường tròn (O;R) và hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau . I là điểm di động trên bán kính OB (I $\neq$ B và O).Tia CI cắt đường tròn tại E.

1. Chứng minh OIED nội tiếp
2. Chứng minh $CI.CE = 2R^2$
3. DB cắt CE tại H. AE cắt CD tại K. Chứng minh HK // AB
4. Chứng minh diện tích tứ giác ACIK không đổi khi I di động trên OB (I $\neq$ O và B)

Bài 33

Cho đường tròn (O;R) và một dây cung AB cố định . Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$. Lấy điểm C tùy ý trên trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MB}$, kẻ tia Ax vuông góc với tia CM tại H , cắt đường thẳng BC tại K.

1. Chứng minh CM là tia phân giác của $\widehat{ACK}$
2. Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABK và sđ $\widehat{AKB}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm C
3. Tia KM cắt tia AB tại E và cắt đường tròn tại điểm thứ hai là F. Chứng minh tích ME.MF không đổi khi C di động và tính tích đó theo R và $\widehat{MAB} = \alpha$

Bài 34

Cho đường tròn (O;R) và điểm M sao cho OM = 2R. Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA và MB với (O)

1. Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp và MO $\perp$ AB
2. Chứng minh Δ AMB đều và tính MA theo R
3. Qua điểm C thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ vẽ tiếp tuyến với (O) cắt MA tại E và cắt MB tại F. OF cắt AB tại K .OE cắt AB tại H. Chứng minh EK $\perp$ OF
4. Chứng minh EF = 2HK

Bài 35

Cho Δ ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) (AB < AC). Đường cao BE của tam giác kéo dài cắt đường tròn (O) tại K . Kẻ KD vuông góc với BC tại D .

1. Chứng minh 4 điểm K ; E ; D ; C cùng thuộc một đường tròn . Xác định tâm của đường tròn này
2. Chứng minh KB là phân giác của $\widehat{AKD}$
3. Tia DE cắt đường thẳng AB tại I . Chứng minh KI $\perp$ AB
4. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với OA , cắt AB tại H . Chứng minh CH // KI

Bài 36

Cho hình vuông ABCD cạnh a. M , N là hai điểm di động trên AD và DC sao cho $\widehat{MBN} = 45^0$. BM , BN cắt AC lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh NE $\perp$ BM
2. Gọi H là giao điểm của ME và NF. Chứng minh HF.HM =HE.HN
3. Tia BH cắt MN tại I. Tính BI theo a. Suy ra đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.
4. Cho a = 5, AM = 2 . Tính EF.

Bài 37

Cho đường tròn (O;R) và một điểm A cố định trên đường tròn . Một góc nhọn $\widehat{xAy}$ có số đo không đổi quay quanh A cắt đường tròn tại B và C.Vẽ hình bình hành ABDC. Gọi E là trực tâm ΔBDC.

1. Chứng minh E thuộc đường tròn (O;R)
2. Gọi H là trực tâm của ΔABC. Chứng minh EH , BC và AD đồng quy tại một điểm I
3. Khi góc $\widehat{xAy}$ quay quanh A sao cho Ax và Ay vẫn cắt (O;R) thì H di chuyển trên đường cố định nào ?

Bài 38

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Một đường thẳng d qua tâm O của hình vuông cắt AD và BC tại E và F. Từ E kẻ đường thẳng song song với BD , từ F kẻ đường thẳng song song với AC , chúng cắt nhau tại I.

1. Chứng minh A , I , B thẳng hàng
2. Kẻ IH $\perp$ EF tại H. Chứng minh H luôn thuộc một đường tròn cố định khi d quay quanh O
3. Đường thẳng IH cắt đường trung trực của AB tại K. Chứng minh AKBH nội tiếp . Suy ra K cố định
4. Tìm vị trí của đường thẳng d để diện tích tứ giác AKHB lớn nhất

Bài 39

Cho đường tròn (O;R) và dây AB cố định . I là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. M là điểm di động trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. K là trung điểm AB. Vẽ tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H cắt đường thẳng MB tại C.

1. Chứng minh tứ giác AHIK nội tiếp
2. Chứng minh ΔAMC là các tam giác cân
3. Chứng minh khi M di động thì C luôn thuộc một đường cố định
4. Gọi E là điểm đối xứng với A qua I và F là điểm đối xứng với B qua đường thẳng MI. Chứng minh tứ giác AFEB nội tiếp

5. Tìm vị trí M để chu vi ΔABM lớn nhất
6. Tìm vị trí M để chu vi ΔACM lớn nhất

Bài 40

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. C là trung điểm AO. Vẽ đường thẳng Cx ⊥ AB tại C cắt đường tròn tại I, K là điểm di động trên đoạn CI (K ≠ C và I), Tia AK cắt (O) tại M. Đường thẳng Cx cắt đường thẳng BM tại D, cắt tiếp tuyến tại M của (O) tại N

1. Chứng minh $AK.AM = R^2$
2. Chứng minh Δ NMK cân
3. Khi K là trung điểm CI. Tính diện tích ΔABD theo R
4. Chứng minh khi K di động trên đoạn CI thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADK thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 41

Cho đường tròn (O ;R) đường kính AB. I là điểm thuộc AO sao cho AO = 3IO. Qua I vẽ dây CD ⊥ AB. Trên CD lấy K tùy ý . Tia AK cắt (O) tại M.

1. Chứng minh tứ giác IKMB nội tiếp
2. Chứng minh đường thẳng AM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔMKC
3. Chứng minh tâm P của đường tròn ngoại tiếp ΔCMK thuộc một đường cố định
4. Tính khoảng cách nhỏ nhất của DP

Bài 42

Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O;R). M là điểm thuộc cung nhỏ AC. Tia AM cắt tia BC tại D.

1. Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{ACM}$
2. Chứng minh $AC^2 = AM.\ AD$
3. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMCD
4. Lấy E là điểm thuộc tia đối của tia MB sao cho ME = MC. Chứng minh ABDE nội tiếp .
5. Chứng minh C luôn thuộc một cung tròn cố định . Xác định tâm của cung tròn này.

Bài 43

Cho đường tròn (O;R) và một đường thẳng d không cắt đường tròn . Vẽ OH ⊥ d tại H. M là điểm thuộc d. Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA và MB với (O) (A , B là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác MAOH nội tiếp
2. Đường thẳng AB cắt OH tại I. Chứng minh IH.IO = IA.IB
3. Chứng minh I cố định khi M chạy trên đường thẳng d.
4. Cho OM = 2R , OH = a. Tính diện tích ΔMAI theo a và R

Bài 44

Cho đường tròn (O;R) và điểm A ở ngoài đường tròn . Vẽ đường thẳng d ⊥ OA tại A. Lấy điểm M ∈ d . Vẽ tiếp tuyến MC với (O) C là tiếp điểm).

1. Chứng minh 4 điểm M , A , O , C cùng thuộc một đường tròn.
2. AC cắt (O) tại B, Tiếp tuyến tại B của (O) cắt MC tại E , cắt đường thẳng d tại D. Chứng minh M, E, O, D cùng thuộc một đường tròn
3. Chứng minh A là trung điểm MD
4. Chứng minh $\Delta EOD \sim \Delta COA$.
5. Cho OM = 2R và OA = a. Tính DE theo a và R

Bài 45

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R)(AB < AC). Kẻ đường cao AH và đường kính AD của đường tròn (O). Phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại E.

1. Chứng minh AE là phân giác của $\widehat{HAD}$
2. Chứng minh AB.AC = AH.AD
3. Chứng minh $\widehat{HAD} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$
4. EO cắt AC tại F , BF cắt AH tại M. Chứng minh ΔAFM cân
5. Cho AB = 4 , AC = 5 , R = 3. Tính BC (lấy 1 chữ số thập phân)

Bài 46

Cho ΔABC đều nội tiếp (O;R). M là điểm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Trên dây AM lấy điểm E sao cho ME = MB .

1. Chứng minh Δ MBE đều

2. Chứng minh $\Delta CBM = \Delta ABE$
3. Tìm vị trí điểm M sao cho tổng MA + MB + MC lớn nhất
4. Khi M chạy trên $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ thì E chạy trên đường cố định nào
5. Gọi F là giao điểm của AM và BC. Chứng minh
$$\frac{1}{MF} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$$
6. Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

Bài 47

Cho đường tròn (O;R) và dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB tại K.(D thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$). M là điểm thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. DM cắt AB tại F.

1. Chứng minh tứ giác CKFM nội tiếp
2. Chứng minh DF. DM = AD^2
3. Tia CM cắt đường thẳng AB tại E. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt AF tại I. Chứng minh IE = IF
4. Chứng minh $\frac{FB}{EB} = \frac{KF}{KA}$

Hd : d) Chú ý F là trực tâm của ΔCDE .
Suy ra : KE.KF = KC.KD

Bài 48

Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC). Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại M. Đường tròn (O) đường kính MC cắt tia BM tại H, cắt BC tại N.

1. Chứng minh tứ giác BAHC nội tiếp
2. Chứng minh HC^2 = HM.HB
3. HO cắt BC tại K . Chứng minh K là trung điểm NC
4. Cho AB = 5 cm , HC = $3\sqrt{2}$ cm. Tính độ dài cạnh BC.

Bài 49

Cho đường tròn (O ; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau E là điểm thuộc $\overset{\frown}{DB}$ nhỏ. AE cắt DC tại N , CE cắt AB tại M.

1. Chứng minh tứ giác NOBE nội tiếp
2. Chứng minh AN. AE = $2R^2$
3. Chứng minh $\Delta ANC \sim \Delta MAC$. Tìm vị trí của E để diện tích ΔNEN lớn nhất
4. Biết AM = 3BM. Tính DN và EB theo R

Bài 50

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R) với AB < AC. Phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại E và cắt (O) tại D. Tia OD cắt BC tại K.Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M .

1. Chứng minh tứ giác MAOK nội tiếp
2. Chứng minh MA^2 = MB.MC
3. Chứng minh MA = ME
4. Kẻ tiếp tuyến MF của (O) (F là tiếp điểm). Chứng minh tia FE v đường thẳng DO cắt nhau tại điểm thuộc (O).
5. Biết BE = a và EC = b. Tính AM theo a và b.

Bài 51

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt đường tròn tại E.
Vẽ DK $\perp$ AB và DM $\perp$ AC tại K và M.

1. Chứng minh tứ giác AKDM nội tiếp và KM $\perp$ AE
2. Chứng minh AD.AE = AB.AC
3. Chứng minh MK = AD. sin $\widehat{BAC}$
4. So sánh diện tích tứ giác AKEM và diện tích ΔABC

Bài 52

Cho điểm A $\in$ đoạn BC sao cho AB = 2AC . Vẽ đường tròn (O;R) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AC.

1. Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc nhau
2. Lấy điểm H $\in$ đoạn OB sao cho OH = $\frac{1}{5}$OB. Vẽ tia Hx vuông góc AB cắt (O) tại D. Tia DA cắt (O') tại M. Vẽ đường kính MN của (O'). OD cắt BN tại K. Chứng minh OD // MN và tính OK theo R
3. Chứng minh BN là tiếp tuyến của (O')
4. DA cắt BN tại E. Tính diện tích ΔBEA theo R

Bài 53

Cho ΔAOB cân tại O ($\widehat{AOB} > 90^0$). Trên cạnh AB lấy điểm M , vẽ MC // OB và MD // OA. Vẽ đường tròn (C;CM) và đường tròn (D;DM) cắt nhau tại điểm thứ hai là N.

1. Chứng minh $A \in (C ; CM)$ và $B \in (D;DM)$
2. Chứng minh $\Delta ANB \sim \Delta CMD$
3. Chứng minh N thuộc một đường cố định khi M chạy trên AB
4. Chứng minh ΔONM vuông

Bài 54

Cho Δ ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Vẽ đường cao AH của Δ ABC , đường kính AD. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của C và B lên AD. M là trung điểm BC.

1. Chứng minh các tứ giác ABHF và BFOM nội tiếp
2. Chứng minh HE // BD
3. Chứng minh $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$
4. Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔEFH

Bài 55

Cho đường tròn (O;R) và dây BC cố định , A là điểm di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Vẽ 2 đường cao BE và CF của ΔABC cắt nhau tại H.

1. Chứng minh $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$
2. Vẽ bán kính ON $\perp$ BC tại M (N $\in$ cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$) . AN cắt BC tại D. Chứng minh AB.NC = AN.BD
3. AH cắt (O) tại K . Chứng minh : BC. AK = AB.CK + AC.BK
4. Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔADC luôn thuộc một đường cố định khi A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$

Bài 56

Cho hai đường tròn (O;R) và (O': r) (R > r) cắt nhau tại Avà B. Vẽ đường kính AC của (O) và đường kính AD của (O'). M là điểm thuộc cung nhỏ BC. MB cắt (O') tại N.

1. Chứng minh C , B , D thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{AN}{AM}$ theo R và r

2. CM và DN cắt nhau tại E. Ch. minh tứ giác AMEN nội tiếp
3. Chứng minh điểm E thuộc một đường cố định khi M thay đổi
4. Chứng minh $\Delta AMB \sim \Delta AED$

Bài 57

Cho Δ ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Vẽ đường tròn (O) đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại E và D .

1. Chứng minh AD.AC = AE.AB
2. Gọi H là giao điểm của BD và CE , K là giao điểm của AH và BC. Chứng minh $\widehat{BHK} = \widehat{AED}$
3. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với (O) với M , N là các tiếp điểm .Chứng minh KA là phân giác của $\widehat{NKM}$
4. Chứng minh ba điểm M, N , H thẳng hàng

Bài 58

Cho (O;R) và điểm P trên đường tròn . Từ P vẽ hai tia Px , Py cắt đường tròn tại A và B sao cho $\widehat{xPy}$ là góc nhọn.

1. Vẽ hình bình hành APBM. Gọi K là trực tâm của ΔABM. Chứng minh K thuộc đường tròn (O)
2. Gọi H là trực tâm của ΔAPB , I là trung điểm AB. Chứng minh H , I , K thẳng hàng
3. Khi hai tia Px và Py quay quanh P sao cho Px và Py vẫn cắt đường tròn và $\widehat{xPy}$ không đổi thì H chạy trên đường cố định nào.

Bài 59

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Điểm M di động trên trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Từ M kẻ MH $\perp$ AB và MK $\perp$ AC.

1. Chứng minh $\Delta MBC \sim \Delta MHK$
2. Gọi D là giao điểm của HK và BC. Chứng minh MD $\perp$ BC
3. Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất .

Bài 60

Cho hai điểm A và B thuộc đường tròn (O) (AB không đi qua O) và có hai điểm C và D lưu động trên cung lớn AB sao cho AD // BC (C *và D khác A và B ; AD > BC). Gọi M là giao điểm của BD và AC. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại I.*

1. *Chứng minh ba điểm I , O , M thẳng hàng*
2. *Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMCD không đổi*

Bài 61

Cho (O;R) và dây MN cố định P là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{MN}$. Lấy điểm I thuộc $\overset{\frown}{PN}$ nhỏ, kẻ tia Mx ⊥ PI tại K cắt tia NI tại E.

1. *Chứng minh IP là tia phân giác của $\widehat{MIE}$*
2. *Chứng minh E luôn chạy trên một cung tròn cố định khi I di chuyển trên cung nhỏ $\overset{\frown}{PN}$. Xác định tâm của cung tròn này.*
3. *Tia EP cắt MN tại F, cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMFG*
4. *Tính tích PF.PG theo R và $\alpha = \widehat{PMN}$*

Bài 62

Cho đường tròn (O;R) và một điểm A cố định thuộc (O). Vẽ tiếp tuyến Ax, trên tia Ax lấy điểm Q. Vẽ tiếp tuyến QB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm).

1. *Chứng minh QBOA nội tiếp và OQ ⊥ AB*
2. *Gọi E là trung điểm OQ. Tìm quỹ tích của E khi Q di chuyển trên tia Ax*
3. *Vẽ BK ⊥ Ax tại K cắt OQ tại H. Tìm quỹ tích của H*
4. *Cho AQ = 2R. Tính HK theo R*

Bài 63

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Ba đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . AH cắt (O) tại K. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M.

1. *Chứng minh MK // BC và DH = DK*
2. *Chứng minh HM đi qua trung điểm I của BC*
3. *Chứng minh :* $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1$
4. *Chứng minh* $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$

Bài 64

Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O;R). Một đường thẳng d thay đổi qua A cắt hai tiếp tuyến tại B và C của (O) ở M và N. Giả sử d cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Gọi F là giao điểm của MC và NB.

1. *Chứng minh $\Delta MBA \sim \Delta CAN$*
2. *Chứng minh tích MB.CN không đổi*
3. *Chứng minh tứ giác BMEF nội tiếp*
4. *Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua điểm cố định*

Bài 65

Cho đường tròn (O;R) và đường kính AB cố định. MN là đường kính thay đổi của (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BM và BN lần lượt tại E và F. Gọi I là trung điểm EA và K là trung điểm AF.

1. *Chứng minh tứ giác EMNF nội tiếp*
2. *Chứng minh IMNK là hình thang vuông. Tính EF theo R để IMNK là hình chữ nhật*
3. *Chứng minh tích AI.AK không đổi khi MN thay đổi*
4. *Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔIBK luôn đi qua điểm cố định (khác điểm B)*

Bài 66

Cho đường tròn (O;R) đường kính BC. Điểm M tùy ý thuộc bán kính OC . Qua M vẽ dây AE vuông góc với BC. Từ A vẽ tiếp tuyến của (O) cắt đường thẳng BC tại D.

1. *Chứng minh EC là phân giác của $\widehat{AED}$*
2. *Vẽ đường cao AK của Δ BAE . Gọi I là trung điểm của AK. Tia BI cắt đường tròn (O) tại H. Chứng minh MH ⊥ AH*
3. *Chứng minh tứ giác EMHD nội tiếp*
4. *Chứng minh đường thẳng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAHD*
5. *Khi M là trung điểm OC. Tính diện tích ΔMHC theo R*

Bài 67

Từ điểm A ngoài đường tròn (O;R) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với *đường tròn (B và C là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến AEF với đường tròn (O). Vẽ dây ED $\perp$ OB cắt BC tại M và cắt BF tại N. Gọi K là trung điểm EF.*

1. *Chứng minh tứ giác KMEC nội tiếp và* $\widehat{KCE} = \widehat{BNE}$
2. *Chứng minh tứ giác EHOF nội tiếp*
3. *Chứng minh tia FM đi qua trung điểm của AB*

Bài 68

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) (AB < AC). Ba đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H.

1. *Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp . Xác định tâm I.*
2. *Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh KF.KE = KB.KC*
3. *AK cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh MFEA nội tiếp*
4. *Chứng minh M , H , I thẳng hàng.*

Bài 69

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm C trên nửa đường tròn (CA > CB). Kẻ CH $\perp$ AB tại H. Đường tròn tâm K đường kính CH cắt AC tại D và BC tại E , cắt nửa đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

1. *Chứng minh CH = DE*
2. *Chứng minh CA.CD = CB.CE*
3. *Chứng minh ABED nội tiếp*
4. *CF cắt AB tại Q. Hỏi K là điểm đặc biệt gì của ΔOCQ.*
5. *Chứng tỏ Q là một giao điểm của DE và đường tròn ngoại tiếp ΔOKF*

Bài 70

Cho đường tròn (O, R) và dây BC . A là điểm thuộc cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ sao cho $\widehat{BAC} = 60^0$. Kẻ đường cao AH, BE , CF của ΔABC.

1. *Chứng minh BEFC nội tiếp đường tròn . Xác định tâm I*
2. *Chứng minh đường thẳng kẻ từ A và vuông góc với EF đi qua một điểm cố định khi A chạy trên $\overset{\frown}{AB}$*
3. *Gọi M và N lần lượt là trung điểm EB và FC. Chứng minh M , H, I , N cùng thuộc một đường tròn*

   d. *Nếu IA là phân giác của $\widehat{EIF}$. Tính số đo $\widehat{BCE}$*

Bài 71

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Gọi E và F là hình chiếu của A lên đường thẳng MB và MC. AH là đường cao của Δ ABC.

1. *Chứng minh 4 điểm A , E , M , F cùng thuộc một đường tròn*
2. *Chứng minh khi M thay đổi thì tỉ số $\frac{AE}{AF}$ không đổi*
3. *Chứng minh E , H , F thẳng hàng*
4. *Tìm vị trí M trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ để tổng AE.MB + AF.MC lớn nhất.*

Bài 72

Cho Δ ABC nội tiếp đường tròn (O) . D là điểm tùy ý trên $\overset{\frown}{BC}$ không chứa điểm A. Gọi (O’) là đường tròn tiếp xúc ngoài với (O) tại D. Các tia AD , BD , CD lần lượt cắt đường tròn (O’) tại A’ ; B’ ; C’.

a. *Chứng minh* $\frac{AA'}{AD} = \frac{BB'}{BD} = \frac{CC'}{CD}$

b. *Chứng minh AD.BC = AC.BD + AB.CD*

c. *Gọi AA_1 , BB_1 , CC_1 là các tiếp tuyến của (O’) lần lượt vẽ từ A , B , C (A_1 , B_1 , C_1 là các tiếp điểm). Chứng minh :*

$$AA_1.BC = BB_1.AC = CC_1.AB$$

Bài 73

Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Lấy điểm M $\in$ (O; R) sao cho MA < MB. Phân giác góc AMB cắt đường tròn tại D , cắt AB tại K.

a. *Chứng minh OD $\perp$ AB và ΔADB cân*

b. *Trên cạnh MB lấy điểm C sao cho MC = MA. Chứng minh tứ giác DKCB nội tiếp*

c. *Vẽ phân giác BI của ΔMKB. Chứng minh D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AICB*

d. *Vẽ đường kính DF của đường tròn (O;R), MF cắt AI tại N. Biết AM = R tính khoảng cách từ N đến đường thẳng AM*

Bài 74

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). (AC < AC) Tiếp tuyến tại B và tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại D. Tia OD cắt BC tại H

a. *Chứng minh tứ giác OBDC nội tiếp và OD $\perp$ BC tại H*

b. *Chứng minh HO.HD = $\dfrac{BC^2}{4}$*

c. *Vẽ cát tuyến DMN với đường tròn (O) song song với Abcắt AC tại K. Chứng minh DM.DN = DB.DC*

d. *Chứng minh OK $\perp$ MN*

e. *Cho $\widehat{BAC} = 60^0$ và $\widehat{AOB} = 90^0$. Tính diện tích ΔBKC theo R*

Bài 75

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R) (AB < AC).Phân giác của góc BAC cắt BC tại D và cắt (O;R) tại M.

a. *Chứng minh OM $\perp$ BC tại I*

b. *Tiếp tuyến tại A cắt BC tại S. Chứng minh SA = SD*

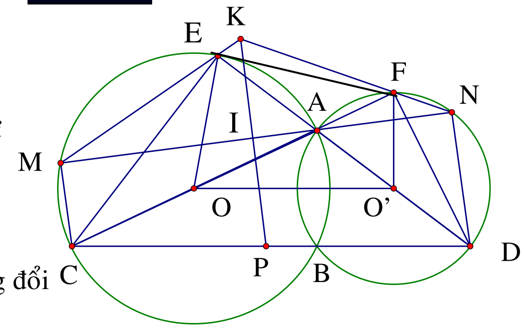
c. *Vẽ đường kính MN của (O;R) cắt AC tại F , BN cắt AM tại E. Chứng minh EF // BC*

d. *Vẽ tiếp tuyến SK của (O) (K là tiếp điểm , K $\neq$ A). Chứng minh K , N , D thẳng hàng*

e. *Cho AB = 3 , BC = 5 , AC = 6. Chứng minh ΔSAB cân*

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1



1. ***Chứng minh EFO'O nội tiếp***

cm $\widehat{EOA} = \widehat{FO'A}$

2. ***Chứng minh $\dfrac{MC}{NF}$ không đổi***

cm ΔMCE ~ ΔNFD

và ΔCEA ~ ΔDFA

$\Rightarrow \dfrac{MC}{NF} = \dfrac{EC}{DF} = \dfrac{AC}{AD}$ không đổi

3. ***Quỹ tích trung điểm I của MN***

Gọi P là trung điểm CD $\Rightarrow$ P cố định và IP là đường trung bình của hình thang CMND $\Rightarrow$ Δ PIA vuông tại I $\Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính AP cố định

4. ***Chứng minh đường thẳng KI đi qua điểm cố định***

Chứng minh ΔMKN cân $\Rightarrow$ K , I , P thẳng hàng $\Rightarrow$ KI đi qua P cố định

5. ***Khi MM // EF Chứng minh MN = BE + BF***

Trước hết cần chứng minh C , B , D thẳng hàng

MN // EF $\Rightarrow \widehat{EFA} = \widehat{FAN}$

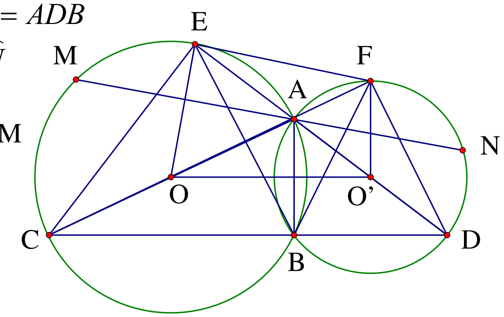
Mà $\widehat{EFA} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{FAN} = \widehat{ADB}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{FN} \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{AN}$

$\Rightarrow$ BF = AN

Tương tự chứng minh BE = AM

$\Rightarrow$ MN = BE + BF



Bài 2

1. Chứng minh $\widehat{CAF} = \widehat{CKF}$

Chứng minh AKFC nội tiếp

2. Chứng minh Δ ***KAF vuông cân***

Chú ý $\widehat{AFK} = \widehat{ACD} = 45^0$

3. Chứng minh đường thẳng BD đi qua trung điểm I của KF

Chứng minh AIBF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{AFI} = 45^0$

Mà $\widehat{ABD} = 45^0 \Rightarrow$ B , D , I thẳng hàng

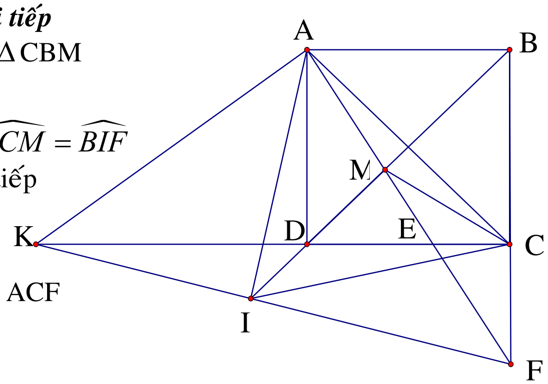
4. Chứng minh IMCF nội tiếp

Chứng minh ΔABM = ΔCBM

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BCM}$

Mà $\widehat{BAM} = \widehat{BIF} \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{BIF}$

Do đó tứ giác IMCF nội tiếp

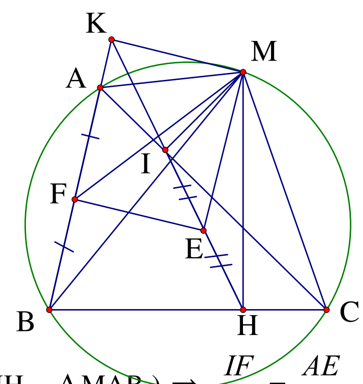


5. Tính tỉ số $\dfrac{ID}{CF}$

Chứng minh ΔADI ~ Δ ACF

$$\Rightarrow \frac{ID}{CF} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 3



1. Chứng minh $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$

Chứng minh tứ giác MIHC nội tiếp

2. Chứng minh MK $\perp$ ***BK***

Chứng minh tứ giác BHMK nội tiếp

3. Chứng minh Δ ***MIH ~*** Δ ***MAB***

Chứng minh $\widehat{IMH} = \widehat{AMB}$ $(= \widehat{ACB})$

Và $\widehat{IHM} = \widehat{ABM}$

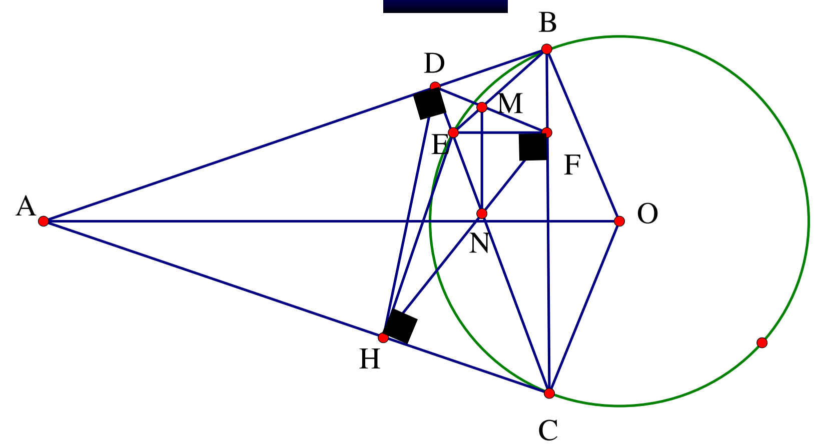
4. Chứng minh ME $\perp$ ***EF***

Ta có $\widehat{MIH} = \widehat{MAB}$ và $\dfrac{IH}{IM} = \dfrac{AB}{AM}$ (ΔMIH ~ ΔMAB) $\Rightarrow \dfrac{IF}{IM} = \dfrac{AE}{AM}$

$\Rightarrow$ ΔMAE ~ Δ MIF (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{KFM} = \widehat{KEM} \Rightarrow$ KMFE nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{MKE} = 90^0 \Rightarrow$ MF $\perp$ EF

Bài 4



1. Chứng minh EFCH và EFBD nội tiếp

Học sinh tự chứng minh

2. Chứng minh EF² = ED.EH

Chứng minh ΔEFD ~ ΔEHF (g-g)

3. Chứng minh EMFN nội tiếp

Ta có $\widehat{DEB} = \widehat{EBC} + \widehat{ECB}$ (góc ngoài ΔBEC)

Mà $\widehat{EBC} = \widehat{ECH} = \widehat{EFH}$ và $\widehat{ECB} = \widehat{DBE} = \widehat{DFE}$

Suy ra : $\widehat{DEB} = \widehat{DFE} + \widehat{EFN} = \widehat{MFN} \Rightarrow$ tứ giác EMFN nội tiếp

4. Chứng minh MN $\perp$ ***EF***

Ta có : $\widehat{ENM} = \widehat{EFM}$ (EMFN nội tiếp)

Mà : $\widehat{EFM} = \widehat{DBE} = \widehat{BEC} \Rightarrow \widehat{ENM} = \widehat{BCE}$

$\Rightarrow$ MN // BC $\Rightarrow$ MN $\perp$ EF

Bài 5

1. Chứng minh AMOI nội tiếp . Xác định tâm K của đường tròn

Học sinh tự chứng minh

2. Chứng minh CHOD nội tiếp

Chứng minh AC.AD = AH.AO (= AM^2) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AO} = \dfrac{AH}{AD}$

$\Rightarrow$ ΔAHC ~ ΔADO $\Rightarrow$ $\widehat{AHC} = \widehat{ADO}$ $\Rightarrow$ CHOD nội tiếp

3. Chứng minh CFIN nội tiếp

Ta có AM // CB (cùng $\perp$ MO) $\Rightarrow$ $\widehat{BCD} = \widehat{MAI}$

Mà $\widehat{MAI} = \widehat{MNI}$ (cùng chắn cung $\widehat{MI}$) $\Rightarrow$ $\widehat{BCD} = \widehat{MNI}$

Suy ra tứ giác CFIN nội tiếp

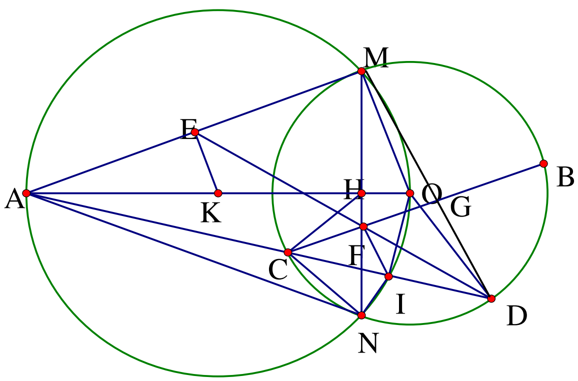
4. Chứng minh KE $\perp$ AM

MD cắt CB tại G. Ta có $\widehat{MDC} = \widehat{FIC}$ (= $\widehat{MNC}$) $\Rightarrow$ FI // MD

ΔCED có I là trung điểm CD và FI // GD $\Rightarrow$ F là trung điểm CG

Xét ΔMDA có CG // AM và F là trung điểm CG $\Rightarrow$ E là trung điểm AM

Suy ra : KE $\perp$ AM (tính chất đường kính – dây cung)



Bài 6

1. Chứng minh MAOB nội tiếp

Học sinh tự chứng minh

2. Chứng minh EB^2 = EC.EA

Chứng minh Δ EBC ~ Δ EAB $\Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{EA}{EB}$ $\Rightarrow$ EB^2 = EC. EA

3. Chứng minh E là trung điểm MB

Ta có : AD // MB $\Rightarrow$ $\widehat{ADC} = \widehat{CME}$

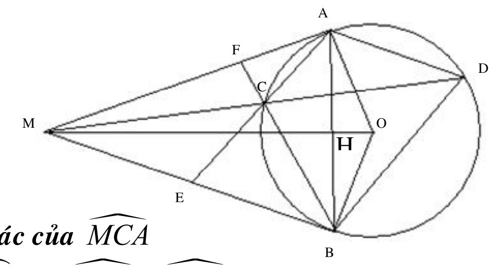
Mà $\widehat{ADC} = \widehat{MAC}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$) $\Rightarrow$ $\widehat{CME} = \widehat{MAC}$

Xét ΔMEA và ΔCEM đồng dạng $\Rightarrow$ EM^2 = EC.EA

Từ đó suy ra : EM = EB

4. Chứng minh BC.BM =MC.AB

Chứng minh ΔMCB ~ ΔBCA (g – g)



5. Chứng minh tia CF là phân giác của $\widehat{MCA}$

Ta có AD // MB $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DB}$ $\Rightarrow$ $\widehat{ADB} = \widehat{DCB}$

Mà $\widehat{FCA} = \widehat{ADB}$ (ACBD nội tiếp) và $\widehat{FCM} = \widehat{DCB}$ (đ đ)

Suy ra : $\widehat{FCM} = \widehat{FCA}$ $\Rightarrow$ tia CF là phân giác của $\widehat{MCA}$

6. Tính diện tích ΔBAD theo R

Tính diện tích ΔMAB theo R (tính MA và tính AH)

Chứng minh ΔADB ~ ΔABM với tỉ số đồng dạng k = $\dfrac{AB}{AM}$ = ?

Suy ra : $S_{\Delta ABD} = k^2 . S_{\Delta AMB}$ = ?

Bài 7

1. Chứng minh DAEC và DBFC nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh CE.CF = CD^2

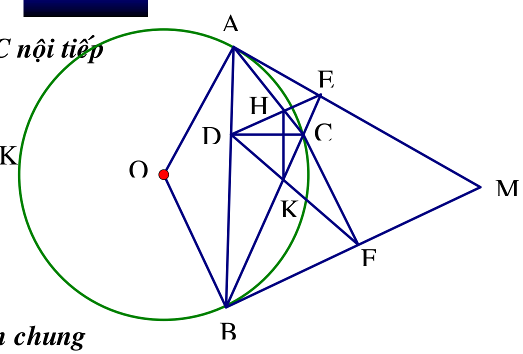
Chứng minh ΔCED ~ Δ CDK

3. Chứng minh CHDK nội tiếp

Chứng minh tương tự bài 4

4. Chứng minh HK // AB

Chứng minh tương tự bài 4



5. Chứng minh HK là tiếp tuyến chung

Chứng minh $\widehat{CHK} = \widehat{CEH}$ $\Rightarrow$ HK là tiếp tuyến của đường tròn (CEH)

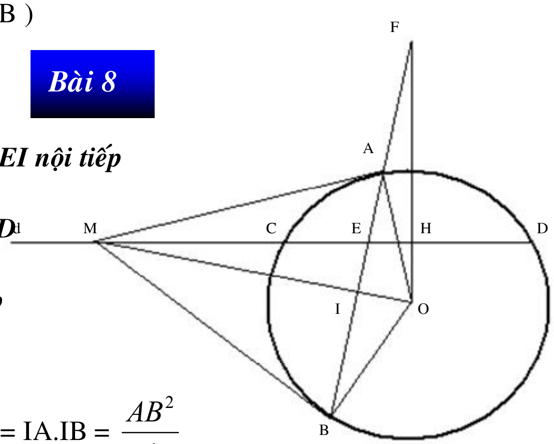
Chứng minh $\widehat{CKH} = \widehat{CFK}$ $\Rightarrow$ HK là tiếp tuyến của đường tròn (CKF)

6. Chứng minh CI đi qua trung điểm AB

Chứng minh đường thẳng CI đi qua trung điểm của HK

$\Rightarrow$ đường thẳng CI đi qua trung điểm của AB
(do AB // HK trong Δ ACB)

Bài 8



1. Chứng minh MIHF và OHEI nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$

(Học sinh tự chứng minh)

3. Chứng minh CIOD nội tiếp

Tương tự câu 2 bài 5

4. Chứng minh $4IF.IE = AB^2$

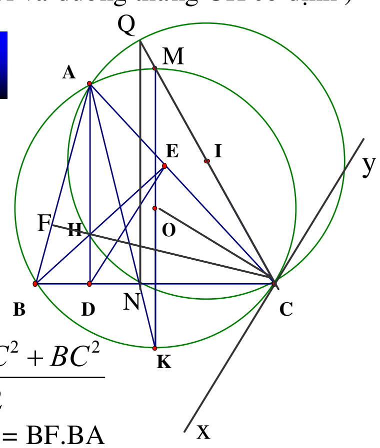
Chứng minh $IF.IE = IO.IM = IA.IB = \dfrac{AB^2}{4}$

5. Chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định

Chứng minh $OH.OF = OI.OM = OA^2 = R^2 \Rightarrow OF = \dfrac{R^2}{OH}$ không đổi

Từ đó $\Rightarrow$ F là điểm cố định (OF không đổi và đường thẳng OH cố định)

Bài 9



1. Chứng minh AEDB và CDHE nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh OC $\perp$ DE

Vẽ tiếp tuyến tại C của (O) ,
chứng minh xy // DE $\Rightarrow$ OC $\perp$ DE

3. Chứng minh

$$AH.AD + BH.BE + CH.CF = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2}$$

Chứng minh : AH.AD = AF.AB và BH.BE = BF.BA
Suy ra : $AH.AD + BH.BE = AB^2$
Tương tự chứng minh : $AH.AD + CH.CF = AC^2$ và $BH.BE + CH.CF = BC^2$
Từ đó suy ra điều phải chứng minh .

4. Chứng minh KO và CI cắt nhau tại điểm thuộc đường tròn (O)

Bài tập luyện thi vào lớp 10

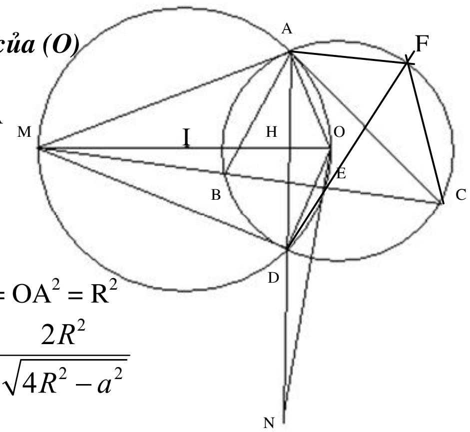
Đường thẳng CI cắt (I) tại Q , đường thẳng KO cắt CQ tại M

$\Rightarrow$ NQ $\perp$ BC $\Rightarrow$ NQ // KM $\Rightarrow$ $\widehat{KMC} = \widehat{NQC}$

Mà ta có : $\widehat{NQC} = \widehat{KAC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{NC}$ trong (I))

Suy ra : $\widehat{KAC} = \widehat{KMC}$ $\Rightarrow$ tứ giác KAMC nội tiếp $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn ngoại tiếp Δ AKC $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn (O).

Bài 10



1. Chứng minh MA là tiếp tuyến của (O) và $MA^2 = MB.MC$

Chứng minh ΔMAO vuông tại A
Chứng minh ΔMAB ~ ΔMCA

2. Chứng minh MHEN nội tiếp

Học sinh tự chứng minh

3. Tính ON theo a và R

Chứng minh $OE.ON = OH.OM = OA^2 = R^2$

$$\Rightarrow ON = \frac{R^2}{OE} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$$

4. Chứng minh ABCF là hình thang cân

$\widehat{MED} = \widehat{MAD} = \widehat{AFD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MD}$ trong (I) và chắn $\overset{\frown}{AD}$ trong (O)

$\Rightarrow$ AF // BC $\Rightarrow$ ABCF là hình thang
Mà ABCF nội tiếp (O) $\Rightarrow$ ABCF là hình thang cân

Bài 11

1. Chứng minh tứ giác ACIO nội tiếp . Suy ra số đo $\widehat{OID}$

C là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ $\Rightarrow$ CO $\perp$ AB tại O

Ta có $\widehat{AOC} = \widehat{AIC} = 90^0$ $\Rightarrow$ tứ giác ACIO nội tiếp

Suy ra : $\widehat{OID} = \widehat{ACB} = 45^0$

2. Chứng minh OI là tia phân giác của $\widehat{COM}$

Ta có $\widehat{AIO} = \widehat{ACO} = 45^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{AIO} = \widehat{OID}$ $\Rightarrow$ đpcm

3. Chứng minh $\Delta CIO \sim \Delta CMB$. Tính tỉ số $\dfrac{IO}{BM}$

Chứng minh $\widehat{OCI} = \widehat{OAI} = \widehat{MCB}$ và $\widehat{COI} = \widehat{CAM} = \widehat{CBM}$

Suy ra ΔCIO ~ ΔCMB (g-g) $\Rightarrow \dfrac{IO}{MB} = \dfrac{CO}{CB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(do ΔCOB vuông cân)

4. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{MB}$ và tính MA và MB theo R

Chứng minh G là trọng tâm của ΔABC $\Rightarrow \dfrac{GO}{OC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{OG}{OA} = \dfrac{1}{3}$

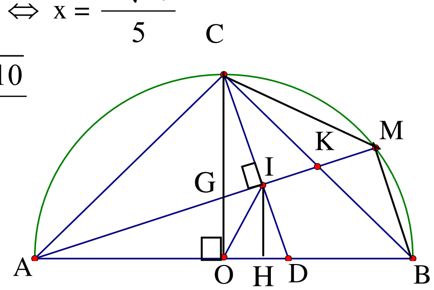
Chứng minh ΔAOG ~ ΔAMB $\Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{OG}{OA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AM}{BM} = 3$

Đặt BM = x (x > 0) .

Suy ra AM = 3x . Ta có $AM^2 + BM^2 = AB^2 = 4R^2$

$\Leftrightarrow (3x)^2 + x^2 = 4R^2 \Leftrightarrow 10x^2 = 4R^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{10}}{5}$

Vậy : MB = $\dfrac{R\sqrt{10}}{5}$ và AM = $\dfrac{3R\sqrt{10}}{5}$



5. Khi M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$.

Tính diện tích tứ giác ACIO theo R

M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow$ AI là phân giác của ΔCAD

$\Rightarrow$ ΔCAD cân tại A $\Rightarrow$ AD = AC = $R\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ OD = AD – AO = $R\sqrt{2} - R$

Ta có : $S_{\Delta ACD} = \dfrac{1}{2}CO.AD = \dfrac{1}{2}R.R\sqrt{2} = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{2}$

Kẻ đường cao IH của ΔOID $\Rightarrow$ IH = $\dfrac{1}{2}OC = \dfrac{R}{2}$

Ta có : $S_{\Delta OID} = \dfrac{1}{2}IH.OD = \dfrac{1}{2}.\dfrac{R}{2}.R(\sqrt{2}-1) = \dfrac{R^2(\sqrt{2}-1)}{4}$

$S_{ACIO} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta OID} = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{2} - \dfrac{R^2(\sqrt{2}-1)}{4} = \dfrac{R^2(\sqrt{2}+1)}{4}$

Bài 12

1. Chứng minh B , C , D thẳng hàng

Chứng minh AD ⊥ BD và AD ⊥ DC

2. Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp

(học sinh tự chứng minh)

3. So sánh DH và DE

Gọi G là giao điểm BF và CE . Chứng minh được A , D , G thẳng hàng .

Từ đó suy ra H thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác AEGF

Chứng minh : $\widehat{HDO} = \widehat{EDO}$

Vẽ OM ⊥ DE tại M , vẽ ON ⊥ DH tại N

Suy ra : OM = ON

$\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{NOD}$

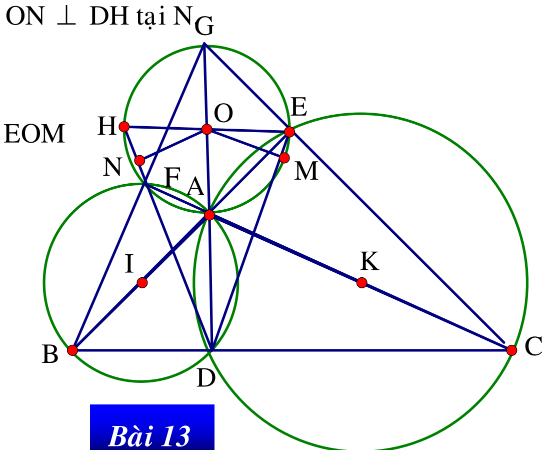
Chứng minh ΔHON = ΔEOM

$\Rightarrow \widehat{HON} = \widehat{EOM}$

$\Rightarrow \widehat{HOD} = \widehat{EOD}$

$\Rightarrow$ ΔHOD = ΔEOD

$\Rightarrow$ DH = DE



Bài 13

1. Chứng minh EDKI nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

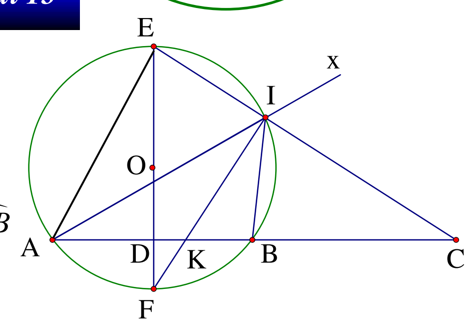
2. Chứng minh CI.CE = CK.CD

Chứng minh ΔCIK ~ ΔCDE (g-g)

3. Chứng minh IC là tia phân giác $\widehat{xIB}$

$\widehat{xIC} = \widehat{EIA}$ (đ đ)

$\widehat{CIB} = \widehat{EAB}$ (EIBA nội tiếp)



$\widehat{EIA} = \widehat{EAB}$ ($\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{EB}$)

$\Rightarrow \widehat{xIC} = \widehat{CIB}$

$\Rightarrow$ Tia IC là phân giác của $\widehat{xIB}$

4. Đường thẳng FI luôn đi qua điểm cố định

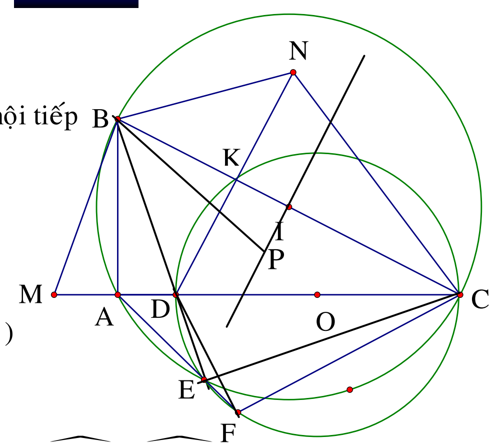
Chứng minh CK.CD = CI.CE = CB.CA $\Rightarrow$ CK = $\frac{CA.CB}{CD}$

Do D là trung điểm AB $\Rightarrow$ D cố định $\Rightarrow$ CD không đổi

$\Rightarrow$ CK không đổi $\Rightarrow$ K là điểm cố định .

Vậy đường thẳng FI luôn đi qua điểm K cố định .

Bài 14



1. Chứng minh ABCE nội tiếp

$\widehat{BAC} = \widehat{BEC} = 90^0 \Rightarrow$ ABEC nội tiếp

2. Chứng minh $\widehat{BCA} = \widehat{ACF}$

$\widehat{CED} = 90^0$; $\widehat{CEB} = 90^0$

Suy ra E ,D , B thẳng hàng

$\widehat{BCA} = \widehat{BEA}$ (chắn $\overset{\frown}{BA}$)

$\widehat{BEA} = \widehat{ACF}$ (DCFE nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACF}$

3. Chứng minh BMCN nội tiếp

Chứng minh ΔMBD cân tại B $\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BDM}$

D và N đối xứng nhau qua BC $\Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BDC}$

Suy ra $\widehat{BNC} + \widehat{BMC} = \widehat{BDM} + \widehat{BDC} = 90^0 \Rightarrow$ BMCN nội tiếp

4. Xác định vị trí của D để đường tròn (BMCN) có bán kính nhỏ nhất

Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC $\Rightarrow$ P thuộc đường trung trực của BC. Ta có BP $\geq$ BI (BI không đổi) . Vậy PB nhỏ nhất khi P trùng với I . Mà IB = IA và IB = IM $\Rightarrow$ IM = IA

$\Rightarrow$ M $\equiv$ A $\Leftrightarrow$ D $\equiv$ A

Bài 15

1. Chứng minh H $\in$ BC

Chứng minh $\widehat{AHB} = 90^0$ và $\widehat{AHC} = 90^0 \Rightarrow$ B , H , C thẳng hàng

2. Tứ giác BCNM là hình gì ? Tại sao ?

(Học sinh tự chứng minh)

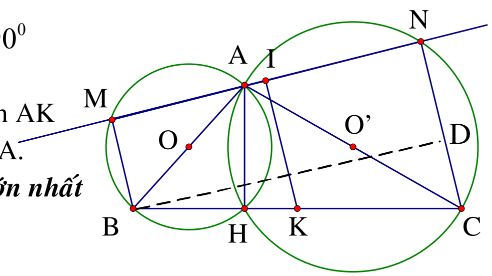
4. Chứng minh A , H , I , K cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra quỹ tích của I

Chứng minh $\widehat{AHK} = \widehat{AIK} = 90^0$

$\Rightarrow$ AHKI nội tiếp

$\Rightarrow$ I $\in$ đường tròn đường kính AK cố định khi d quay quanh A.



4. Xác định vị trí của d để MN lớn nhất

Vẽ BD $\perp$ NC tại D.

Suy ra MN = BD $\leq$ BC .

Vậy MN lớn nhất khi khi MN = BC .

Khi đó D $\equiv$ C $\Leftrightarrow$ MN // BC hay d // BC

Bài 16

1. Chứng minh AE = AF

Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau trong hai đường tròn bằng nhau

2. Chứng minh AEKF và ACKD nội tiếp

AB $\perp$ CD $\Rightarrow$ AC và AD là hai đường kính của (O) và (O')

Suy ra : $\widehat{AEK} = \widehat{AFK} = 90^0 \Rightarrow$ AEKF nội tiếp

Do AE = AF $\Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF} \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ADF} \Rightarrow$ ACKD nội tiếp

3. Chứng minh ΔEKF cân

$\widehat{FEK} = \widehat{CAB}$ (ABEC nội tiếp)

$\widehat{EFK} = \widehat{DAB}$ (ABDF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEK} = \widehat{EFK} \Rightarrow \Delta$EKF cân tại K

4. Chứng minh I , A , K thẳng hàng

ΔEAF cân $\Rightarrow$ AI $\perp$ EF và ΔEKF cân

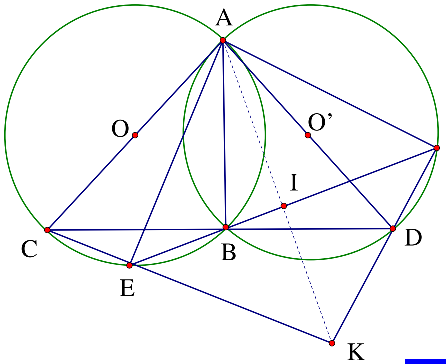
$\Rightarrow$ KI $\perp$ EF .

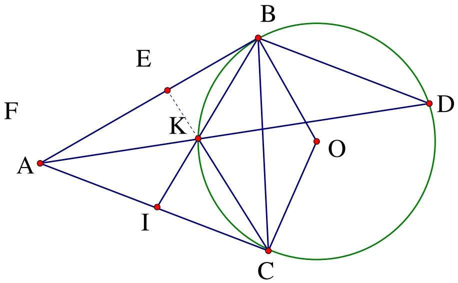
Suy ra A , I , K thẳng hàng

5. Khi EF quay quanh B thì I và K di chuyển trên đường nào ?

ΔAIB vuông tại I $\Rightarrow$ I $\in$ đường tròn đường kính AB

ACKD nội tiếp $\Rightarrow$ K $\in$ đường tròn ngoại tiếp ΔACD cố định.





Bài 17

1. Chứng minh $IC^2 = IK.IB$

Chứng minh ΔIKC ~ ΔICB

2. Chứng minh ΔBAI ~ ΔAKI

BD // AC $\Rightarrow$ $\widehat{KAI} = \widehat{BDK}$

Mà $\widehat{BDK} = \widehat{ABI}$ (chắn $\overset{\frown}{BK}$) $\Rightarrow$ $\widehat{ABK} = \widehat{KAI}$

Và $\widehat{AIK}$ chung $\Rightarrow$ ΔAKI ~ ΔBAI

3. Chứng minh I là trung điểm AC

Chứng minh $AI^2 = IK.IB$ và $IC^2 = IK.IB$ (cmt) $\Rightarrow$ AI = IC

4. Tìm vị trí của A để CK $\perp$ AB

Giả sử CK $\perp$ AB tại E $\Rightarrow$ $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = 90^0$

Mà $\widehat{ECB} = \widehat{BDK} = \widehat{DAC}$ và $\widehat{EBC} = \widehat{BCA}$ $\Rightarrow$ $\widehat{DAC} + \widehat{BCA} = 90^0$

Suy ra : AD $\perp$ BC $\Rightarrow$ K là trực tâm ΔABC $\Rightarrow$ BI $\perp$ AC

Mà I là trung điểm AC $\Rightarrow$ ΔABC cân tại B $\Rightarrow$ ΔABC đều

$\Rightarrow$ AO = $R\sqrt{3}$. Vậy để CK $\perp$ AB thì OA = $R\sqrt{3}$

Bài 18

1. Chứng minh OI.OA = OB.OC. Suy ra O là điểm cố định

Chứng minh ΔAOB ~ ΔCOI $\Rightarrow$ OI.OA = OC.OB

$\Rightarrow$ OI = $\dfrac{OB.OC}{OA} = \dfrac{R}{2}$. Do đường thẳng OA cố định , A cố định

mà I $\in$ đường thẳng OA và OI không đổi suy ra I cố định.

2. a. Chứng minh KECI nội tiếp

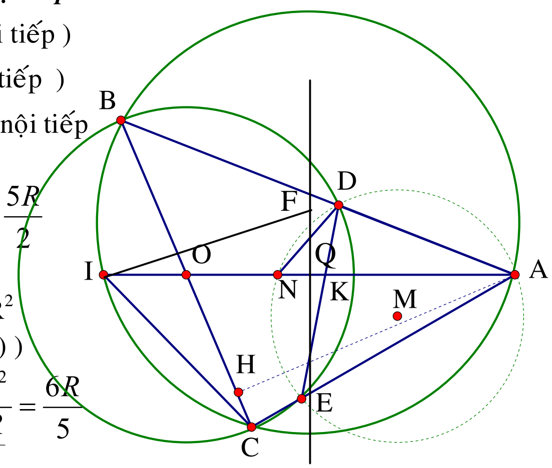
$\widehat{DEA} = \widehat{DBC}$ (BDEC nội tiếp)

$\widehat{DBC} = \widehat{AIC}$ (BACI nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{DEA} = \widehat{AIC}$ $\Rightarrow$ KECI nội tiếp

b. Tính AK theo R

AI = AO + OI = 2R + $\dfrac{R}{2} = \dfrac{5R}{2}$



Chứng minh :

$AK.AI = AE.AD = OA^2 - R^2$

(vẽ tiếp tuyến từ A của (O))

$\Rightarrow$ AK = $\dfrac{OA^2 - R^2}{AI} = \dfrac{3R^2}{\frac{5R}{2}} = \dfrac{6R}{5}$

c. Chứng minh BOND nội tiếp. Suy ra N là điểm cố định

$\widehat{DNA} = \widehat{DEA}$ (ADNE nội tiếp) và $\widehat{DEA} = \widehat{ABC}$ (DBCE nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{DNA} = \widehat{DBC}$ $\Rightarrow$ BOND nội tiếp

Chứng minh : ΔAND ~ ΔAOB (g-g)

$\Rightarrow$ $AN.AO = AD.AB = OA^2 - R^2 = 3R^2$ $\Rightarrow$ AN = $\dfrac{3R}{2}$ $\Rightarrow$ N cố định

3. Tìm vị trí của BC để diện tích ΔABC lớn nhất

Kẻ AH $\perp$ BC tại H. Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC$ = R.AH

Do đó $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH = OA $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ O

$\Leftrightarrow$ BC $\perp$ OA

4. Tìm vị trí BC để bán kính đường tròn (ABC) nhỏ nhất

Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và Q là trung điểm AI

Ta có IQ = $\dfrac{1}{2}$AI = $\dfrac{5R}{4}$

Bán kính đường tròn (ABC) là IF $\geq$ IQ . $\Rightarrow$ IF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IF = IQ

$\Leftrightarrow$ F $\equiv$ Q . Mà F $\in$ trung trực của BC $\Rightarrow$ OF $\perp$ BC hay OQ $\perp$ BC

$\Leftrightarrow$ OA $\perp$ BC . Vậy để bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC nhỏ nhất thì BC phải vuông góc với AO.

Bài 19

1. Chứng minh tứ giác FKHC nội tiếp. Suy ra K là trực tâm của ΔMBC

Tứ giác AMKB nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{HKB} = \widehat{MAB}$

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$ (ABCM là hình bình hành)

Suy ra : $\widehat{HKB} = \widehat{MCB}$ $\Rightarrow$ FKHC là tứ giác nội tiếp

Ta lại có : $\widehat{CHK} = 90^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{CFK} = 90^0$ $\Rightarrow$ BF $\perp$ MC tại F

$\Rightarrow$ K là trực tâm của ΔMBC

2. Chứng minh ΔAMB cân. Suy ra N thuộc một cung tròn cố định

Ta có : AM // BN

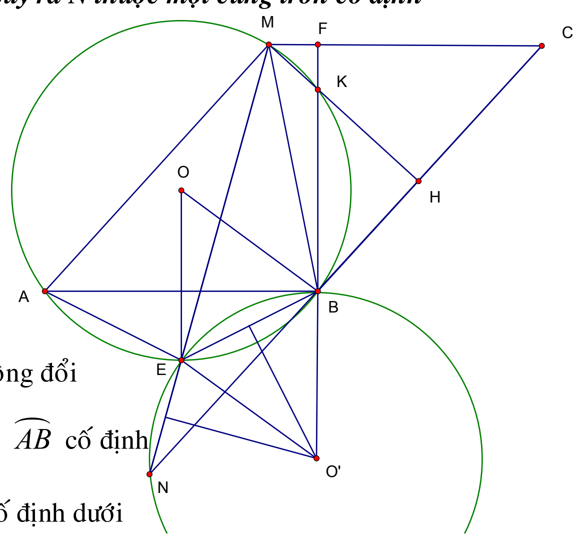
$\Rightarrow$ $\widehat{AMN} = \widehat{MNB}$

Do MN là phân giác $\widehat{AMB}$

Nên : $\widehat{AMN} = \widehat{BMN}$

Từ đó : $\widehat{BMN} = \widehat{MNB}$

$\Rightarrow$ ΔMBN cân tại B



Suy ra : $\widehat{MNB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMB}$ không đổi

Ta lại có E là điểm chính giữa $\widehat{AB}$ cố định nên E cố định. $\Rightarrow$ EB cố định

Từ đó ta có N nhìn đoạn EB cố định dưới một góc không đổi bằng $\dfrac{1}{2}\widehat{AMB}$

Vậy N thuộc cung chứa góc $\alpha = \dfrac{1}{2}\widehat{AMB}$ dựng trên đoạn EB cố định .

3. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Ta có : $\widehat{ENB} = \dfrac{1}{2}\widehat{EO'B}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\widehat{BMN} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOE}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung)

Suy ra : $\widehat{BOE} = \widehat{BO'E}$ $\Rightarrow$ $\widehat{EBO'} = \widehat{OEB}$ (do hai tam giác cân có hai góc ở đỉnh bằng nhau)

Suy ra : OE // O'B . Mà OE $\perp$ AB (t/c đường kính – dây- cung)

Nên : AB $\perp$ O'B $\Rightarrow$ AB là tiếp tuyến của (O').

4. Khi AB = $R\sqrt{3}$. Tính diện tích tứ giác OEO'B theo R

AB = R$\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ sđ $\widehat{AB} = 120^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{EOB} = 60^0$ và EB = R

$\Rightarrow$ $\widehat{EO'B} = 60^0$ $\Rightarrow$ ΔEO'B đều $\Rightarrow$ O'B = O'E = R

Từ đó ta có $S_{EOBO'} = 2S_{\Delta EOB} = 2.\dfrac{1}{2}.R.R\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Bài 20

1. Chứng minh $IA^2 = IP.IM$

Chứng minh ΔIAN ~ ΔIMA

2. Chứng minh ANBP là hình bình hành

Ta có $\widehat{AMP} = \widehat{PAB}$ (chắn $\widehat{AP}$ trong (O'))

$\widehat{AMP} = \widehat{ABN}$ (chắn $\widehat{BN}$ trong (O)) $\Rightarrow$ $\widehat{PAB} = \widehat{ABN}$ $\Rightarrow$ AP // BN

Chứng minh ΔAPI = ΔBNI (g-c-g) $\Rightarrow$ AP = BN $\Rightarrow$ APBN là hình bình hành

3. Chứng minh IB là tiếp tuyến của đường tròn (MBP)

Chứng minh $IB^2 = IP.IM$

$\Rightarrow$ ΔIBP ~ ΔIMB $\Rightarrow$ $\widehat{IBP} = \widehat{IMB}$

Vẽ đường kính BD của đường tròn (K) ngoại tiếp ΔMPB

Ta có $\widehat{IMB} = \widehat{PDB}$ và $\widehat{PBD} + \widehat{PBD} = 90^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{IBP} + \widehat{PBD} = 90^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{IBD} = 90^0$

$\Rightarrow$ IB là tiếp tuyến của (K)

4. Chứng minh P chạy trên một đường cố định

Ta có $\widehat{APB} = \widehat{ANB}$ (hình bình hành)

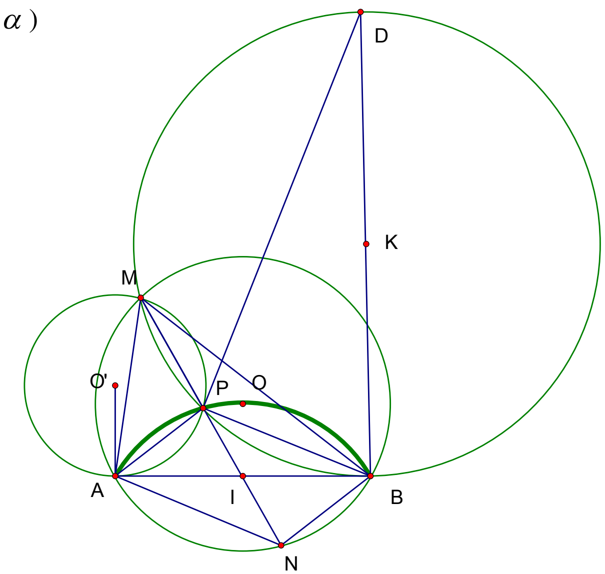
Mà $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{APB} = 180^0 - \widehat{AMB}$ (= α)

$\Rightarrow \widehat{APB}$ không đổi

Do AB cố định

$\Rightarrow$ P $\in$ cung chứa góc α dựng trên đoạn AB cố định .



Bài 21

1. Chứng minh H $\in$ BC và BCNM là hình thang vuông

Chứng minh AH $\perp$ HB và AH $\perp$ HC

$\Rightarrow$ C , B , H thẳng hàng

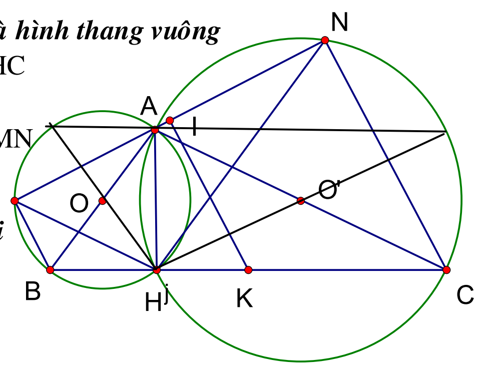
Chứng minh BM $\perp$ MN và CN $\perp$ MN

$\Rightarrow$ BCNM là hình thang vuông

2. Chứng minh tỉ số $\frac{HM}{HN}$ không đổi

Chứng minh ΔMHN ~ ΔBAC

$\Rightarrow \frac{MH}{NH} = \frac{AB}{AC}$ không đổi



3. Chứng minh A , H , I , K cùng thuộc một đường tròn . Suy ra I di chuyển trên một đường cố định.

IK là đường trung bình của hình thang BCNM $\Rightarrow$ IK $\perp$ MN

Suy ra tứ giác AIKH nội tiếp .

Ta có $\widehat{AIK} = 90^0$ mà K và A cố định $\Rightarrow$ I $\in$ đường tròn đường kính AK.

4. Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích ΔMNH lớn nhất

Ta có $S_{\Delta MNH} = \frac{1}{2} HM.HN.\sin\widehat{MHN} = \frac{1}{2} HM.HN.\sin\widehat{BAC}$

Vậy $S_{\Delta MHN}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ HM.HN lớn nhất $\Leftrightarrow$ HM và HN là đường kính

Thật vậy : Vẽ đường kính HM' của (O) và đường kính HN' của (O') ta chứng minh được M'AN' thẳng hàng . Do đó Khi MH lớn nhất thì NH cũng lớn nhất . Suy ra khi đó diện tích ΔMHN lớn nhất.

Bài 22

1. Chứng minh ΔAOM ~ ΔBON và ΔMON vuông

Từ giả thiết AM.BN = a^2 $\Rightarrow$ AM.BN = OA.OB

$\Rightarrow \Delta$AOM ~ ΔBON (c-g-c)

Suy ra : $\widehat{MOA} = \widehat{ONB} \Rightarrow \widehat{MOA} + \widehat{NOB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MON} = 90^0$

2. Chứng minh MN tiếp xúc với nửa đường tròn cố định tại H

Chứng minh $\widehat{MNO} = \widehat{ABH}$ và $\widehat{NMO} = \widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{MON} = 90^0$

Suy ra H $\in$ đường tròn đường kính AB cố định . Mà MN $\perp$ OH tại H

$\Rightarrow$ MN tiếp xúc với nửa đường tròn (O) đường kính AB cố định.

3. Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔMON thuộc tia cố định

Gọi I là trung điểm MN , ta chứng minh OI $\perp$ AB tại O.

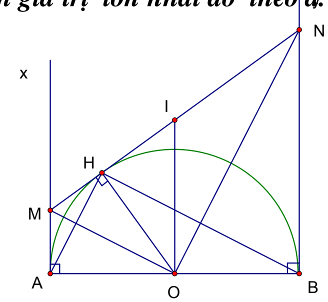
Ta có OI = $\frac{1}{2}(BN + AM)$ (OI là đường trung bình hình thang ABNM)

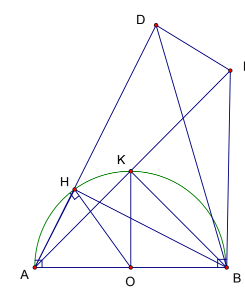
Mà NH = NB và MH = MA (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra OI = $\frac{1}{2}MN$ hay IO = IM = IN $\Rightarrow$ I là tâm đường tròn (MON)

Vậy I $\in$ tia OI cố định

4. Tìm vị trí đường thẳng d sao cho chu vi ΔAHB lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo a.





Trên tia AH lấy D sao cho HD = HB . Gọi E là điểm đối xứng với A qua điểm chính giữa K của $\overset{\frown}{AB}$. Ta có ΔDHB vuông cân $\Rightarrow$ $\widehat{ADB} = 45^0$ và ΔEKB vuông cân $\Rightarrow$ $\widehat{AEB} = 45^0$. Từ đó suy ra tứ giác ADEB nội tiếp .
Ta lại có ΔABE vuông (hs tự chứng minh) $\Rightarrow$ AE là đường kính của đường tròn (ADEB) $\Rightarrow$ AD $\le$ AE $\Rightarrow$ AD lớn nhất khi AD = AE $\Leftrightarrow$ D$\equiv$E $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ K

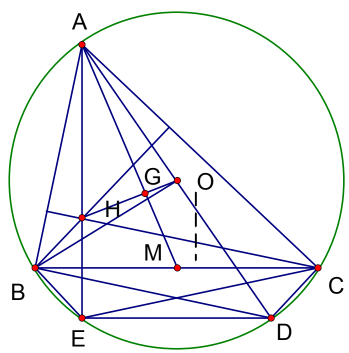
Mà AD = AH + HD = AH + HB .

Vậy chu vi ΔABH = AH + HB + AB = AD + AB lớn nhất khi AD lớn nhất (do AB không đổi) $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ K $\Leftrightarrow$ H là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ $\Leftrightarrow$ đường thẳng d // AB.

Bài 23

1. Chứng minh A , B , C , D , E cùng thuộc một đường tròn

Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \widehat{AED} = 90^0$
Suy ra tứ giác A, B, C, D, E cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AD.



2. Chứng minh $\widehat{BAE} = \widehat{OAC}$ và BE = CD

Tứ giác BEDC là hình thang nội tiếp (O)
$\Rightarrow$ BEDC là hình thang cân $\Rightarrow$ BE = CD
$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CD}$ $\Rightarrow$ $\widehat{BAE} = \widehat{OAC}$

3. Chứng minh G là trọng tâm của ΔABC

Chứng minh AH = 2 OM

Chứng minh OM // AH $\Rightarrow$ $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{AH}{OM} = 2$ $\Rightarrow$ $\dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3}$

Vậy G là trọng tâm của ΔABC

Bài 24

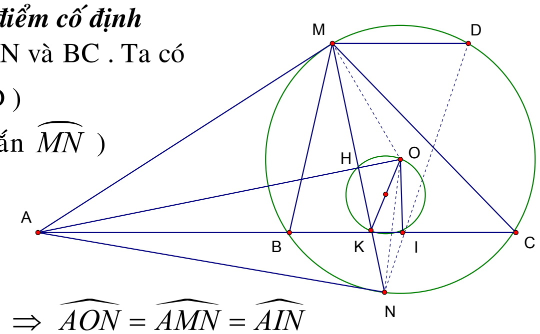
1. Chứng minh M , N di động trên một đường tròn cố định

Chứng minh AM^2 = AN^2 = AB.AC (không đổi)

Suy ra M và N thuộc đường tròn tâm A bán kính r = AB.AC

2. Chứng minh DN đi qua điểm cố định

Gọi I là giao điểm của DN và BC . Ta có



$\widehat{AIN} = \widehat{MDN}$ (AI // MD)

Mà $\widehat{AMN} = \widehat{MDN}$ (chắn $\overset{\frown}{MN}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{AIN} = \widehat{AMN}$

Ta có : $\widehat{AON} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$

Và $\widehat{AMN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$ $\Rightarrow$ $\widehat{AON} = \widehat{AMN} = \widehat{AIN}$

$\Rightarrow$ A, M , O , I , N cùng thuộc một đường tròn đường kính OA
$\Rightarrow$ OI $\perp$ BC $\Rightarrow$ I là trung điểm BC $\Rightarrow$ I là điểm cố định
Vậy đường thẳng DN luôn đi qua điểm I cố định

3. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔOHI luôn đi qua 2 điểm cố định

Chứng minh tứ giác HOIK nội tiếp $\Rightarrow$ đường tròn (OHI) đi qua I cố định
Ta chứng minh thêm điểm K cố định :
Ta có AK.AI = AH.AO = AM^2 = AB.AC (hs tự chứng minh)

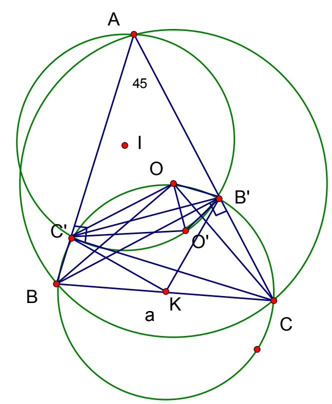
$\Rightarrow$ AK = $\dfrac{AB.AC}{AI}$ (không đổi , do I là điểm cố định)

$\Rightarrow$ K là điểm cố định .

Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔHIO đi qua 2 điểm cố định là I và K.

Bài 25

1. Chứng minh A , B' , C' , O' cùng thuộc một đường tròn



Chứng minh 5 điểm B , C , B' , C' , O cùng thuộc đường tròn (K) đường kính BC

ΔAC'C vuông tại C' có $\widehat{CAC'} = 45^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{B'CC'} = 45^0$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{B'C'}$ nhỏ của (K) có số đo 90^0

$\Rightarrow$ số đo $\overset{\frown}{B'C'}$ lớn là 270^0

$\Rightarrow$ $\widehat{C'OB'} = 135^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{C'O'B'} = 135^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{C'O'B'} + \widehat{C'AB'} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác AC'O'B' nội tiếp đường tròn có tâm là I .

2. Tính B'C' theo a

Trong (K) có $\widehat{C'KB'} = 90^0$ (sđ $\widehat{B'C'} = 90^0$) $\Rightarrow$ ΔB'KC' vuông cân

$\Rightarrow$ C'B' = KC' $\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

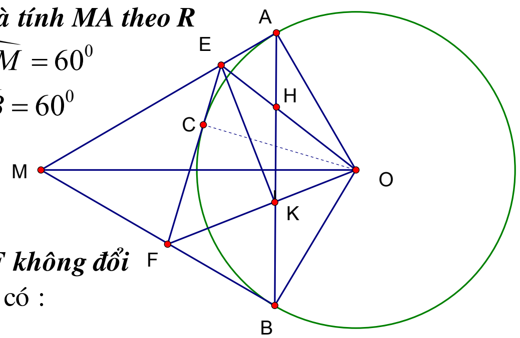
3. Tính bán kính đường tròn (I) theo a

Ta có $\widehat{B'IC'} = 90^0$ ($\widehat{B'AC'} = 45^0$) $\Rightarrow$ ΔB'IC' vuông cân

Mà B'C' = a$\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ IB' = a

Bài 26

1. Chứng minh ΔAMB đều và tính MA theo R



OA = R , OM = 2R $\Rightarrow$ $\widehat{AOM} = 60^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{AOB} = 120^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{AMB} = 60^0$

Mà ΔAMB cân tại A

$\Rightarrow$ ΔAMB là tam giác đều

Tính được AM = $R\sqrt{3}$

2. Chứng minh chu vi ΔMEF không đổi

Gọi p là chu vi ΔMEF , ta có :

p = ME + EF + MF

= ME + EC + CF + MF

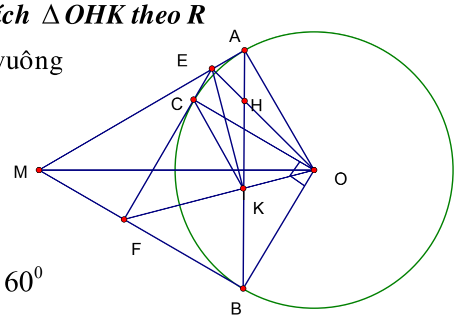
= ME + EA + FB + MF = MA + MB = 2 MA = 2 $R\sqrt{3}$ (không đổi)

3. Chứng minh EK $\perp$ OF

Ta có $\widehat{EAK} = 60^0$. Ta chứng minh : $\widehat{EOF} = 60^0$ $\Rightarrow$ EAOK nội tiếp

Mà $\widehat{EAO} = 90^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{EKO} = 90^0$ $\Rightarrow$ EK $\perp$ OE

4. Khi sđ $\widehat{BC}$ = 90^0 . Tính EF và diện tích ΔOHK theo R



Khi sđ $\widehat{BC} = 90^0$ $\Rightarrow$ COBF là hình vuông

$\Rightarrow$ BF = R $\Rightarrow$ MF = MB – FB

= $R\sqrt{3} - R = R(\sqrt{3}-1)$

ΔMFE vuông tại F có $\widehat{EMF} = 60^0$

$\Rightarrow$ EF = MF. $\sqrt{3}$ = R $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

- Ta có ΔEOK vuông tại K có $\widehat{EOF} = 60^0$

$\Rightarrow$ OE = 2 OK

Ta có SΔ OEF = $\frac{1}{2}OC.EF = R.R\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = R^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

Chứng minh ΔOHK ~ ΔOFE với tỉ số đồng dạng k = $\frac{OK}{OE} = \frac{1}{2}$

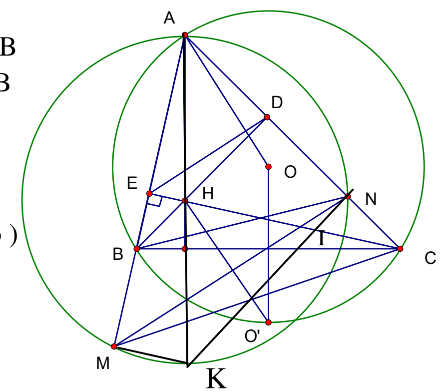
Suy ra : $\frac{S_{\Delta OHK}}{S_{\Delta OFE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ SΔ OHK = $= \frac{1}{4}S_{\Delta OEF} = \frac{1}{4}.R^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

Bài 27

1. Chứng minh BEDC nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh MN // DE và B , C M , N cùng thuộc đường tròn



Vẽ đường kính AK của (H)

Ta có KN $\perp$ AC và KM $\perp$ AB

Mà HD $\perp$ AC và HE $\perp$ AB

$\Rightarrow$ KN // HD và KM // HE

$\Rightarrow$ $\frac{AD}{AN} = \frac{AH}{AK} = \frac{AE}{AM}$

$\Rightarrow$ MN // ED (đl Thales đảo)

$\Rightarrow$ $\widehat{AMN} = \widehat{AED}$

Mà $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ tứ giác MBNC nội tiếp

3. Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ A đi qua điểm cố định

Chứng minh AO $\perp$ ED (học sinh tự chứng minh) $\Rightarrow$ OA $\perp$ MN

Hay đường thẳng qua A vuông góc với MN đi qua O cố định .

4. Chứng minh đường thẳng kẻ từ H , vuông góc với M đi qua điểm cố định

Gọi O' là điểm đối xứng với O qua BC .

Ta chứng minh AOO'H là hình bình hành . $\Rightarrow$ HO' $\perp$ MN

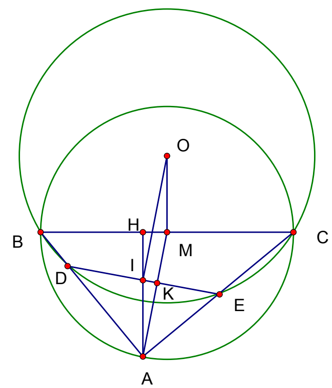
Suy ra điều phải chứng minh

5. Tìm độ dài BC để O' thuộc đường tròn (O)

Để O' $\in$ (O) thì OO' = R $\Rightarrow$ OI = $\dfrac{R}{2}$ (I là trung điểm OO')

Suy ra : BI = $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ BC = $R\sqrt{3}$

Bài 28



1. Chứng minh AD.AB = AE.AC

Chứng minh ΔAED ~ ΔABC (g-g)

2. Chứng minh I là trung điểm DE

Ta có BA $\perp$ CA và AH $\perp$ BC

$\Rightarrow$ $\widehat{HCA} = \widehat{HAB}$

Mà $\widehat{EDA} = \widehat{HCA}$ (BDEC nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{EDA} = \widehat{HAB}$ $\Rightarrow$ ΔDIA cân tại I

Tương tự chứng minh ΔAIE cân tại I

$\Rightarrow$ ID = IA = IE $\Rightarrow$ I là trung điểm ED

3. Chứng minh IKMH nội tiếp

Chứng minh MA $\perp$ DE tại K $\Rightarrow$ HMKI nội tiếp

4. Tính DE theo R và tỉ số $\dfrac{AH}{AK}$

Ta có OI $\perp$ DE (I là trung điểm DE) và AM $\perp$ DE (cmt) $\Rightarrow$ OI // MA

Ta có OM $\perp$ BC và AH $\perp$ BC $\Rightarrow$ IA // OM $\Rightarrow$ OIAM là hình bình hành

Suy ra : AI = OM . Mà BC = $R\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ OM = $\dfrac{R}{2}$ $\Rightarrow$ IA = $\dfrac{R}{2}$ $\Rightarrow$ DE = R

Chứng minh ΔAKE ~ ΔAHB $\Rightarrow$ $\dfrac{AH}{AK} = \dfrac{AB}{AE}$

Mà $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3}$. Vậy $\dfrac{AH}{AK} = \sqrt{3}$

5. Tìm vị trí điểm A để diện tích ΔADE lớn nhất

Ta có : $\dfrac{AH}{AK} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ AK = $\dfrac{AH}{\sqrt{3}}$

Do đó : S$_{\Delta ADE}$ = $\dfrac{1}{2}DE.AK = \dfrac{1}{2}R.\dfrac{AH}{\sqrt{3}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất

$\Leftrightarrow$ H $\equiv$ M $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

Bài 29

1. Chứng minh A , B , Q , K cùng thuộc một đường tròn

$\left.\begin{array}{l}\widehat{QPD} = \widehat{QBD} \text{ (chắn } \overset{\frown}{BD} \text{ trong (O'))} \\ \widehat{QPD} = \widehat{PAQ} \text{ (chắn } \overset{\frown}{PQ} \text{ trong (O))}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{QAK} = \widehat{QPK}$

Suy ra tứ giác ABKQ nội tiếp

2. Chứng minh ΔBPK cân

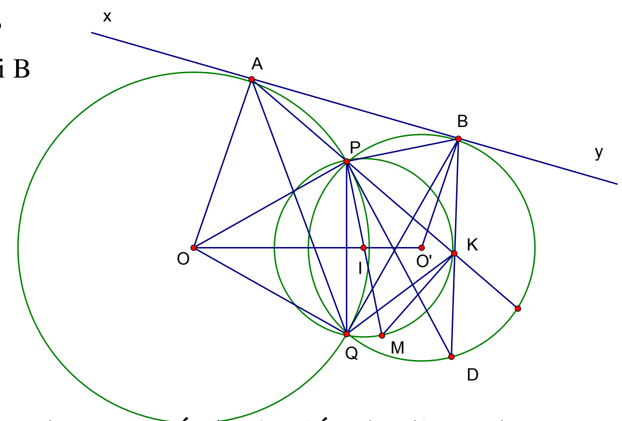
$\widehat{BPK} = \widehat{BAP} + \widehat{ABP}$ (góc ngoài Δ)

Mà $\widehat{BAP} = \widehat{AQP}$ và $\widehat{ABP} = \widehat{PQB}$ $\Rightarrow$ $\widehat{BPK} = \widehat{AQB}$

Mà $\widehat{AQB} = \widehat{BKP}$ (ABKQ nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{BPK} = \widehat{BKP}$

$\Rightarrow$ ΔPBK cân tại B



3. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔPQK tiếp xúc với PB và KB

Chứng minh $\widehat{BPK} = \widehat{PQK}$ (hs tự chứng minh)

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPQK . vẽ đường kính PM của (I)

Ta có $\widehat{PMK} = \widehat{PQK}$ $\Rightarrow$ $\widehat{PMK} = \widehat{BPK}$

Mà $\widehat{PMK} + \widehat{MPK} = 90^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{BPK} + \widehat{MPK} = 90^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{BPM} = 90^0$

Suy ra PB $\perp$ PM $\Rightarrow$ BP là tiếp tuyến của (I)

Tương tự chứng minh BK là tiếp tuyến của (I)

Bài 30

1. Chứng minh AE ⊥ CD

Ta có : $\widehat{ADC} = \widehat{AND}$ (chắn cung $\overset{\frown}{AD}$)

$\widehat{AND} = \widehat{CDE}$ (đv) $\Rightarrow$ $\widehat{ADC} = \widehat{CDE}$

Tương tự ta chứng minh được : $\widehat{ACD} = \widehat{DCE}$

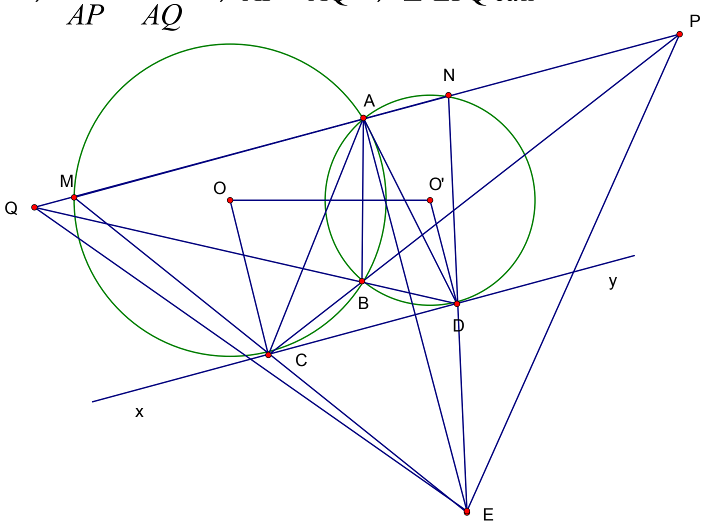
$\Rightarrow$ Δ ADC = Δ EDC (g - c - g)

$\Rightarrow$ CD là trung trực của AE $\Rightarrow$ CD ⊥ AE

b. Chứng minh Δ EPQ cân

Chứng minh : $ID^2 = IB.IA$ và $IC^2 = IB.IA$ $\Rightarrow$ IC = ID

PQ // CD $\Rightarrow \dfrac{IC}{AP} = \dfrac{ID}{AQ} \Rightarrow$ AP = AQ $\Rightarrow$ Δ EPQ cân



Bài 31

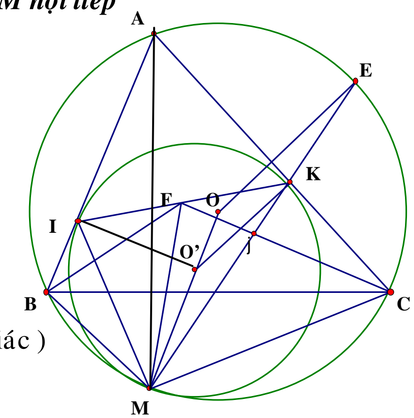
1. Chứng minh ME là tia phân giác $\widehat{AMC}$

Chứng minh OE // O'K (hai góc đồng vị bằng nhau) $\Rightarrow$ OE ⊥ AC

$\Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC}$ $\Rightarrow$ ME là phân giác $\widehat{AMC}$

Bài tập luyện thi vào lớp 10

2. Chứng minh tứ giác FKCM và FIBM nội tiếp



Tứ giác AIO'K nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IAK} + \widehat{IO'K} = 180^0$

Tứ giác ABMC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IAK} + \widehat{BMC} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{IO'K} = \widehat{BMC}$

Mà $\widehat{AKI} = \dfrac{1}{2}\widehat{IO'K}$

Và $\widehat{FMC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BMC}$ (MF là phân giác)

$\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{FMC}$ $\Rightarrow$ FKCM nội tiếp

Tương tự ta chứng minh được tứ giác IFMB nội tiếp

3. Chứng minh Δ BIF ~ Δ FKC

Ta có $\widehat{AKI} = \widehat{IMK}$ (chắn cung $\overset{\frown}{IK}$ trong (O'))

Mà $\widehat{AKI} = \widehat{KFC} + \widehat{KCF}$ (góc ngoài Δ)

Và $\widehat{KCF} = \widehat{FMK}$ (tứ giác FKCM nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{KFC} = \widehat{IMF}$

Mà $\widehat{IMF} = \widehat{IBF}$ (tứ giác IFMB nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{IBF} = \widehat{KFC}$

Ta có $\widehat{BIF} = \widehat{FKC}$ (do $\widehat{AIK} = \widehat{AKI}$). Vậy Δ BIF ~ Δ FKC (g – g)

4. Chứng minh FM^2 = MB.MC

Ta có $\widehat{KFM} = \widehat{IBM}$ (tứ giác IFMB nội tiếp)

$\widehat{IBF} = \widehat{KFC}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{FBM} = \widehat{CFM}$

Mà $\widehat{BMF} = \widehat{CMF}$ (MF là phân giác $\widehat{BMC}$)

Suy ra : Δ BFM ~ Δ FCM (g-g) $\Rightarrow$ MF^2 = BM.CM

5. Chứng minh CF là phân giác của $\widehat{ACB}$

Ta có : $\widehat{KFC} = \widehat{KMC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$ và $\widehat{AKF} = 90^0 - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

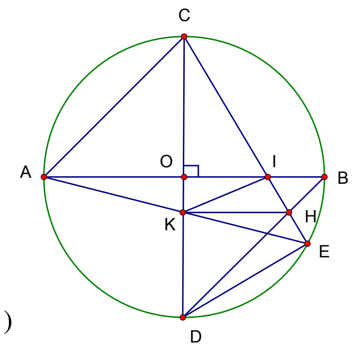
Suy ra : $\widehat{KCF} = \widehat{AKF} - \widehat{KFC} = 90^0 - \dfrac{\widehat{BAC}}{2} - \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \dfrac{\widehat{BCA}}{2}$

Vậy CF là phân giác của $\widehat{ACB}$

Bài 32

1. Chứng minh tứ giác OIED nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)



2. Chứng minh CI.CE = 2R²

Chứng minh $\Delta COI \sim \Delta CED$

$\Rightarrow CI.CE = CO.CD = 2R^2$

3. Chứng minh KH // AB

Chứng minh tứ giác KHED nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KHD} = \widehat{KED}$

Mà $\widehat{KED} = \widehat{ABD}$ (chắn cung $\widehat{AD}$)

$\Rightarrow \widehat{KHD} = \widehat{ABD} \Rightarrow$ HK // AB

4. Chứng minh diện tích tứ giác ACIK không đổi

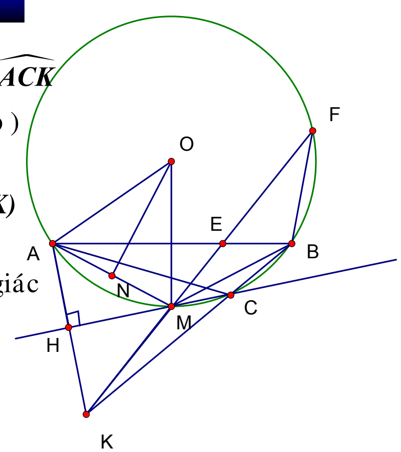
Xét ΔCAK và ΔAIC ta có : $\widehat{ACK} = \widehat{CAI} = 45^0$

và $\widehat{CIA} = \widehat{CAK}$ (sđ $\widehat{AC}$ + sđ $\widehat{BE}$ = sđ $\widehat{BC}$ + sđ $\widehat{BE}$)

Suy ra $\Delta CAK \sim \Delta AIC \Rightarrow AI.CK = AC^2 = 2R^2$

Mà $S_{AKCI} = \dfrac{1}{2}AI.CK = R^2$ không đổi

Bài 33



1. Chứng minh CM là tia phân giác của $\widehat{ACK}$

Ta có : $\widehat{KCM} = \widehat{MAB}$ (ABCM nội tiếp)

$\widehat{ACM} = \widehat{ABM} = \widehat{MAB}$ ($\widehat{MA} = \widehat{MB}$)

2. Chứng minh M là tâm đường tròn (ABK) và sđ $\widehat{AKB}$ không đổi

ΔACK có CH là đường cao và là phân giác

$\Rightarrow \Delta ACK$ cân tại C

$\Rightarrow$ CH là trung trực của AK

$\Rightarrow$ MA = MK (M $\in$ CH)

Mà MA = MB

$\Rightarrow$ MA = MB = MK $\Rightarrow$ M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABK

3. Chứng minh tích ME.MF không đổi. Tính tích đó theo R và $\widehat{MAB} = a$

Chứng minh $\Delta MEB \sim \Delta MBF$ (g-g) $\Rightarrow ME.MF = MB^2 = MA^2$

Vẽ đường cao ON của ΔAOM ta có $\widehat{AON} = \widehat{ABM} = \alpha$ ($= \dfrac{1}{2}\widehat{AOM}$)

$\Rightarrow AM = 2AN = 2OA.\sin\widehat{AON} = 2R.\sin\alpha \Rightarrow ME.MF = 4R^2\sin^2\alpha$

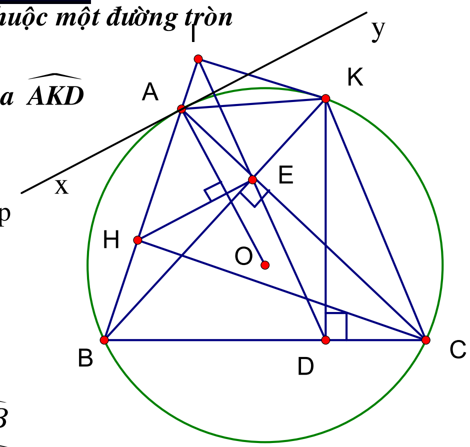
Bài 34

(Xem bài 26)

Bài 35

1. Chứng minh K , E , D , C cùng thuộc một đường tròn

(học sinh tự chứng minh)



2. Chứng minh KB là phân giác của $\widehat{AKD}$

$\widehat{AKB} = \widehat{ACB} = \widehat{BKD}$

3. Chứng minh KI ⊥ AB

Chứng minh tứ giác BDKI nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BIK} = 90^0 \Rightarrow BI \perp IK$

4. Chứng minh CH // KI

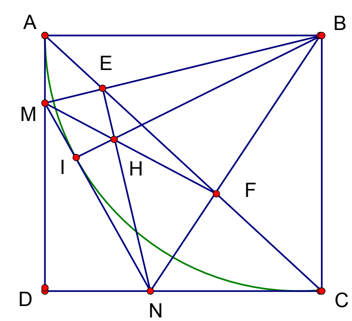
Vẽ tiếp tuyến xy tại A của (O)

$\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{AHE}$ (xy // HE)

Mà $\widehat{xAB} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ tứ giác HECB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0 \Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow$ CH // IK

Bài 36



1. Chứng minh NE ⊥ BM

$\widehat{MBN} = \widehat{NCE} = 45^0 \Rightarrow$ NEBC nội tiếp

Mà BC ⊥ NC $\Rightarrow$ NE ⊥ MB

2. Chứng minh HF.HM = HE.HN

Chứng minh MF ⊥ BN

$\Rightarrow$ MEFN nội tiếp $\Rightarrow \Delta HNF \sim \Delta HME$

$\Rightarrow$ đpcm

3. Tính BI. Suy ra MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

$\widehat{ABM} = \widehat{AFM}$; $\widehat{AFM} = \widehat{ENM}$; $\widehat{ENM} = \widehat{MBI}$ $\Rightarrow$ $\widehat{ABM} = \widehat{MBI}$

Ta có BI ⊥ MN (H là trực tâm của ΔMBN)

Chứng minh ΔABM = ΔIBM (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow$ BI = BA = a

Từ đó suy ra I thuộc cung tròn (B; a) cố định .

4. Tính EF biết a = 5 và AM = 2

Ta có DM = AD – AM = 5 – 2 = 3 ; IM = AM = 2

Đặt DN = x (0 < x < 5). Ta có NC = 5 – x $\Rightarrow$ IN = 5 – x

Suy ra MN = IN + IM = 5 – x + 2 = 7 – x

Áp dụng đl Pitago trong ΔMDN ta có :

$MN^2 = DM^2 + DN^2 \Leftrightarrow (7-x)^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow 14x = 40 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{7}$

Suy ra $MN = 7 - x = 7 - \dfrac{20}{7} = \dfrac{29}{7}$

Ta chứng minh ΔBEF ~ ΔBNM $\Rightarrow \dfrac{EF}{MN} = \dfrac{EB}{NB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow EF = MN.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{29}{7}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{29\sqrt{2}}{14}$ (thõa mãn điều kiện)

Bài 37

1. Chứng minh E ∈ (O;R)

Chứng minh tứ giác IEFD nội tiếp. Suy ra $\widehat{BEI} = \widehat{BDC}$

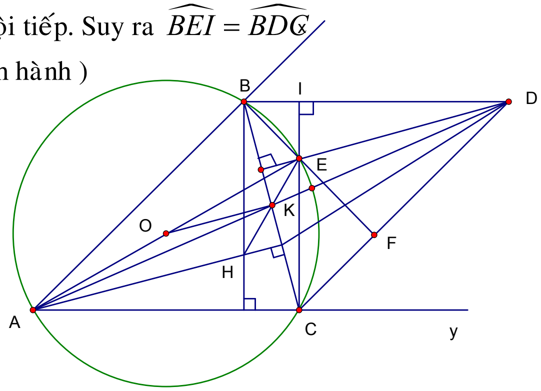
Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (hình bình hành)

$\Rightarrow$ $\widehat{BEI} = \widehat{BAC}$

$\Rightarrow$ tứ giác BACE nội tiếp

Mà A, B , C ∈ (O)

$\Rightarrow$ E ∈ (O)



2. Chứng minh EH , BC , AD đồng quy

Ta có ABDC là hình bình hành . Gọi K là giao điểm của AD và BC

Suy ra K là trung điểm của BC và AD.

Chứng minh BECH là hình bình hành . Mà K là trung điểm BC

$\Rightarrow$ K là trung điểm của HE

Vậy BC , AD và HE đồng quy tại K

3. Khi góc $\widehat{xAy}$ quay quanh A sao cho sđ $\widehat{xAy}$ không đổi và Ax và Ay vẫn cắt đường tròn (O) thì H di chuyển trê đường cố định nào ?

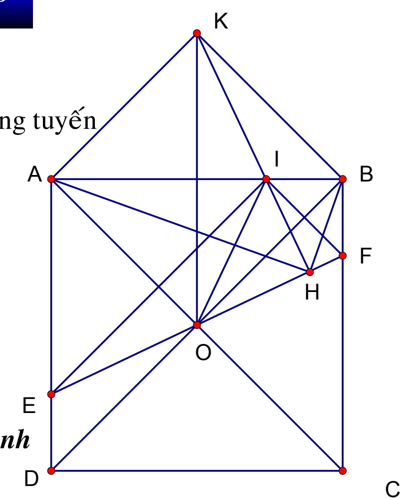
Ta có OK là đường trung bình của ΔEAH $\Rightarrow$ AH = 2OK

Mà sđ $\widehat{xAy}$ không đổi $\Rightarrow$ sđ $\widehat{AB}$ không đổi $\Rightarrow$ AB không đổi

$\Rightarrow$ BK không đổi $\Rightarrow$ OK = $\sqrt{R^2 - BK^2}$ không đổi $\Rightarrow$ AH không đổi

Vậy H di chuyển trên đường tròn (A ; AH) cố định.

Bài 38



1. Chứng minh A, I , B thẳng hàng

Chứng minh ΔEIF vuông có IO là trung tuyến

$\Rightarrow$ ΔIOF cân tại O . Mà OB ⊥ IF

$\Rightarrow$ OB là trung trực của IF $\Rightarrow$ IB = IF

$\Rightarrow$ ΔIBF cân $\Rightarrow$ $\widehat{FIB} = \widehat{BFI} = 45^0$

Tương tự chứng minh $\widehat{AIE} = 45^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{AIE} + \widehat{EIF} + \widehat{FIB} = 180^0$

$\Rightarrow$ A , I , B thẳng hàng

2. Chứng minh H thuộc đường tròn cố định

Chứng minh IBFH và IAEH nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{IHB} = \widehat{IFB} = 45^0$ và $\widehat{IHA} = \widehat{IEA} = 45^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{AHB} = 90^0$ $\Rightarrow$ H ∈ đường tròn đường kính AB cố định

3. Chứng minh tứ giác AKBH nội tiếp . Suy ra K là điểm cố định

Chứng minh AOHK nội tiếp ($\widehat{AOK} = \widehat{AHK} = 45^0$)

Chứng minh AOHB nội tiếp ($\widehat{AOB} = \widehat{AHB} = 90^0$)

Suy ra AKBH nội tiếp $\Rightarrow$ K ∈ đường tròn đường kính AB .

Mà KA = KB $\Rightarrow$ K là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ $\Rightarrow$ K cố định .

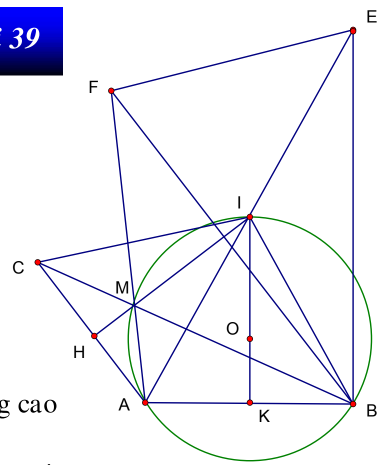
4. Tìm vị trí đường thẳng d để diện tích tứ giác AKBH lớn nhất

Ta có dt AKBH = dt ΔAKB + dt ΔAHB . Mà dt ΔAKB không đổi

Dó đó dt AKBH lớn nhất $\Leftrightarrow$ dt ΔAHB lớn nhất $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ O

Khi đó đường thẳng d $\perp$ OK $\Leftrightarrow$ đường thẳng d // AB .

Bài 39



1. Chứng minh AHIK nội tiếp

(học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh ΔAMC cân

Ta có : $\overset{\frown}{CMH} = \overset{\frown}{IMB}$ (đ đ)

$\overset{\frown}{IMB} = \overset{\frown}{IAB} = \overset{\frown}{IBA}$ ($\overset{\frown}{IA} = \overset{\frown}{IB}$)

$\overset{\frown}{AHM} = \overset{\frown}{IBA}$ (AMIB nội tiếp)

Suy ra : $\overset{\frown}{CMH} = \overset{\frown}{AMH}$

Suy ra MH là phân giác vừa là đường cao của ΔCMA $\Rightarrow$ ΔCMA cân tại M.

3. Chứng minh C luôn thuộc một đường cố định

Ta có $\overset{\frown}{ACB} = 90^0 - \overset{\frown}{CMH} = 90^0 - \overset{\frown}{IBA}$ không đổi

$\Rightarrow$ C $\in$ cung chứa góc $\alpha = 90^0 - \overset{\frown}{IBA}$ dựng trên đoạn AB cố định

4. Chứng minh tứ giác AFEB nội tiếp

ΔFMB cân tại M (t/ c đối xứng) $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AMB} = 2\overset{\frown}{AFB}$ (góc ngoài Δ)

ΔAEB có IB = IA = IE $\Rightarrow$ ΔIBE cân tại I

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AIB} = 2\overset{\frown}{AEB}$ (góc ngoài Δ)

Mà $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{AIB}$ $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AFB} = \overset{\frown}{AEB}$ $\Rightarrow$ tứ giác AFEB nội tiếp .

5. Tìm vị trí M để chu vi ΔAMB lớn nhất

ΔABE vuông tại B (đường trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng)

$\Rightarrow$ tứ giác AFEB nội tiếp đường tròn (I) đường kính AE

$\Rightarrow$ dây AF $\le$ AE $\Leftrightarrow$ AM + MF $\le$ AE $\Leftrightarrow$ AM + MB $\le$ AE

Dấu = xảy ra khi F $\equiv$ E $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ I . Vậy AM + MB lớn nhất khi M $\equiv$ I

Chu vi ΔAMB = AM + MB + AB lớn nhất khi AM + MB lớn nhất

(vì AB không đổi) tức là khi M $\equiv$ I là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$)

6. Tìm vị trí M để chu vi ΔACM lớn nhất

Ta có chu vi ΔACM = CM + MA + AC = 2(MA + HA)

Mà ΔAHM vuông tại H $\Rightarrow$ HA = MA.sin $\overset{\frown}{HMA} = MA.\sin \overset{\frown}{AMB}$

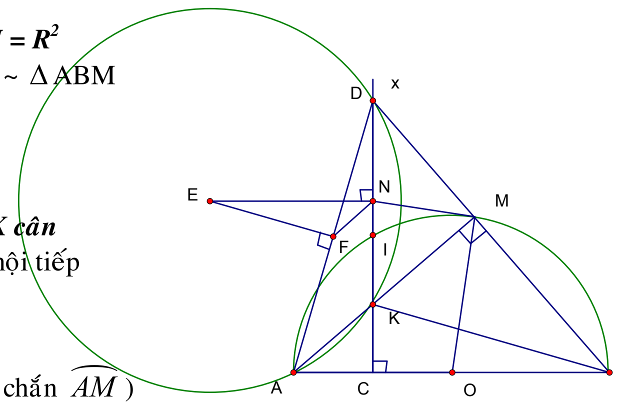
$\Rightarrow$ Chu vi ΔACM = 2(MA + MA.sin $\overset{\frown}{AMB}$) = 2MA.(1 + sin $\overset{\frown}{AMB}$)

Do $\overset{\frown}{AMB}$ không đổi nên chu vi ΔACM lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM lớn nhất

$\Leftrightarrow$ AM là đường kính của đường tròn (O)

$\Leftrightarrow$ M là điểm đối xứng của A qua O.

Bài 40



1. Chứng minh AK.AM = R^2

Chứng minh ΔAKC ~ ΔABM

$\Rightarrow$ AK.AM = AC.AB

$= \frac{R}{2}.2R = R^2$

2. Chứng minh ΔNMK cân

Chứng minh CKMB nội tiếp

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{NKM} = \overset{\frown}{MBA}$

Mà $\overset{\frown}{KMN} = \overset{\frown}{MBA}$ (chắn $\overset{\frown}{AM}$)

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{NMK} = \overset{\frown}{NKM}$

$\Rightarrow$ ΔKNM cân tại N

3. Khi K là trung điểm CI .Tính diện tích ΔABD theo R

Ta có CK = $\frac{1}{2}CI = \frac{1}{2}\sqrt{OI^2 - OC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$

Chứng minh CK.CD = CA.CB $\Leftrightarrow$ CD = $\frac{CA.CB}{CK} = \frac{\frac{R}{2}.\frac{3R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{4}} = R\sqrt{3}$

S$_{\Delta ABD}$ = $\frac{1}{2}CD.AB = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.2R = R^2\sqrt{3}$

4. Chứng minh khi K di động trên đoạn CI thì tâm đường tròn (ADK) thuộc một đường cố định

Gọi E là tâm đường tròn (ADK) ta có EN // AB (cùng $\perp$ CD)

FN // AK (FN là đường trung bình của ΔDAK

EF // BK (cùng $\perp$ AD)

Suy ra ΔENF ~ ΔBAK $\Rightarrow \dfrac{EN}{AB} = \dfrac{FN}{AK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ EN = $\dfrac{1}{2}AB = R$

Do đó E thuộc đường thẳng d song song với đường thẳng CD cố định và cách đường thẳng này một khoảng bằng R.Vậy E luôn thuộc đường thẳng cố định.

Bài 41

1. Chứng minh tứ giác IKMB nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh đường thẳng AC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔCMK

Vẽ đường kính CE của đường tròn (F) ngoại tiếp ΔCMK.

Ta có : $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC}$ (đường kính AB $\perp$ dây CD).

$\Rightarrow \widehat{CMK} = \widehat{ACD}$

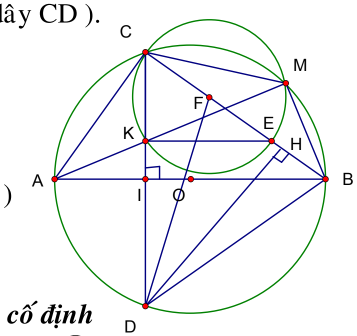
Mà $\widehat{CMK} = \widehat{CEK}$ (chắn $\overset{\frown}{CK}$)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CEK}$

Mà $\widehat{CEK} + \widehat{KCE} = 90^0$ (ΔCKE vuông)

$\Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{KCE} = 90^0 \Rightarrow$ AC $\perp$ CE

$\Rightarrow$ AC tiếp xúc với (F) tại C



3. Chứng minh F luôn thuộc đường thẳng cố định

Ta có KE // AB (cùng $\perp$ DC) $\Rightarrow \widehat{MKE} = \widehat{MAB}$ (đv)

Mà $\widehat{MCE} = \widehat{MKE}$ (chắn $\overset{\frown}{ME}$ trong (F))

và $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$ (chắn $\overset{\frown}{MB}$ trong (O))

$\Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MCB} \Rightarrow$ C, B , E thẳng hàng

$\Rightarrow$ F $\in$ đường thẳng CB cố định

4. Tính khoảng cách nhỏ nhất của đoạn DF

Ta có : CI = $\sqrt{CO^2 - IO^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{9}} = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$ CD = $\dfrac{4R\sqrt{2}}{3}$

$$CB^2 = BI.BA = \frac{4R}{3}.2R = \frac{8R^2}{3} \Rightarrow CB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

Vẽ DH $\perp$ CB tại H $\Rightarrow$ DH không đổi .

Ta có : DF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ DF = DH .

Ta chứng minh DH.CB = BI.CD

$$\Rightarrow DH = \frac{BI.CD}{CB} = \frac{\frac{4R}{3}.\frac{4R\sqrt{2}}{3}}{\frac{2R\sqrt{6}}{3}} = \frac{8R\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{8R\sqrt{3}}{9}$$

Bài 42

1. Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{ACM}$

Ta có : $\widehat{AMB} = \widehat{ADC} + \widehat{MBC}$ (góc ngoài ΔBMD)

Mà $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$ ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$)

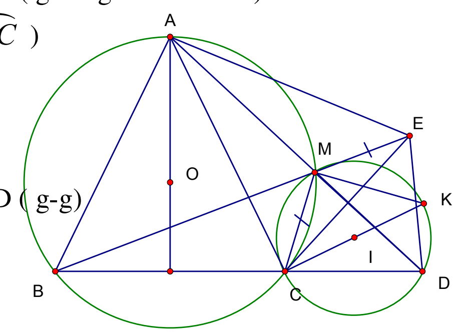
$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ABM} + \widehat{MBC}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABM} = \widehat{ACM}$

2. Chứng minh $AC^2 = AM.AD$

Chứng minh ΔAMC ~ ΔACD (g-g)

$\Rightarrow$ AC^2 = AM.AD



3. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMCD

Gọi I là tâm đường tròn (MCD) . Vẽ đường kính CK của đường tròn (I)

Chứng minh CK $\perp$ AC (tương tự câu 2 bài 41)

4. Chứng minh tứ giác ABDE nội tiếp. Suy ra E và D luôn thuộc một cung tròn cố định.

Ta có $\widehat{EMD} = \widehat{AMB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{CMD}$ (hs tự chứng minh)

$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{AMC} \Rightarrow \Delta AME = \Delta AMC \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACM} = \widehat{ADB}$

$\Rightarrow$ tứ giác ABDE nội tiếp

5. Chứng minh E thuộc cung tròn cố định . Xác định tâm cung tròn này.

Chứng minh AE = AB = AC $\Rightarrow$ E $\in$ cung tròn tâm A , bán kính AB

Bài 43

1. Chứng minh MAOH nội tiếp

(hs tự chứng minh)

2. Chứng minh IH.IO =IA.IB

Chứng minh AMBO nội tiếp

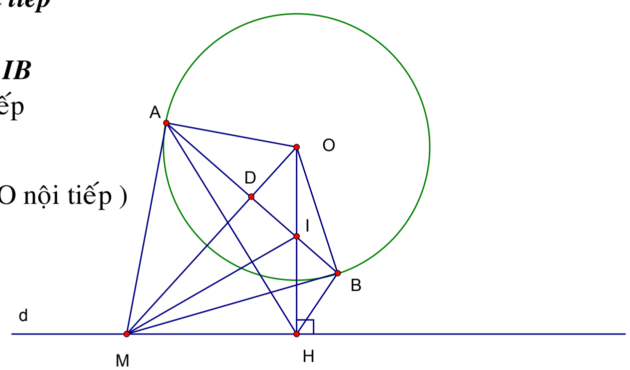
$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OMA}$

Mà $\widehat{OHA} = \widehat{OMA}$ (AMHO nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{OBA}$

$\Rightarrow \Delta$ AIH ~ Δ OIB (g-g)

$\Rightarrow$ IO.IH = IA.IB



3. Chứng minh I là điểm cố địnhkhi M chạy trên đường thẳng d

Gọi D là giao điểm của OM và AB . Ta chứng minh DMHI nội tiếp

Suy ra OI.OH = OD.OM = OA^2 = R^2 $\Rightarrow$ OI = $\dfrac{R^2}{OH}$ không đổi

Mà O cố định và I $\in$ OH cố định $\Rightarrow$ I là điểm cố định.

4. Cho OH = a, OM = 2R. Tính diện tích ΔIAM theo a và R.

Khi OM = 2R ta tính được : MA = AB = $R\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ AD = $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Và MD = $\sqrt{MA^2 - AD^2} = \sqrt{3R^2 - \dfrac{3R^2}{4}} = \dfrac{3R}{2}$

Ta có : MH = $\sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{4R^2 - a^2}$

Ta có : ΔODI ~ ΔOHM $\Rightarrow \dfrac{DI}{MH} = \dfrac{OI}{OM}$

$$\Rightarrow DI = \frac{OI.MH}{OM} = \frac{\frac{R^2}{a}.\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R} = \frac{R\sqrt{4R^2 - a^2}}{2a}$$

$$\Rightarrow AI = AD + DI = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{4R^2 - a^2}}{2a} = \frac{R(a\sqrt{3} + \sqrt{4R^2 - a^2})}{2a}$$

$$S_{\Delta IMA} = \frac{1}{2}AI.MD$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{R(a\sqrt{3} + \sqrt{4R^2 - a^2})}{2a}.\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}(a\sqrt{3} + \sqrt{4R^2 - a^2})}{8a}$$

Bài 44

1. Chứng minh M , C , O , A cùng thuộc một đường tròn

(học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh M , E , O , D cùng thuộc một đường tròn

Chứng minh $\widehat{BCO} = \widehat{BEO}$

Mà $\widehat{BCO} = \widehat{OMD}$ $\Rightarrow$ $\widehat{BEO} = \widehat{OMD}$

$\Rightarrow$ MDOE nội tiếp

3. Chứng minh A là trung điểm MD

Ta có :

$\widehat{DBA} = \widehat{DOA}$ (BOAD nội tiếp)

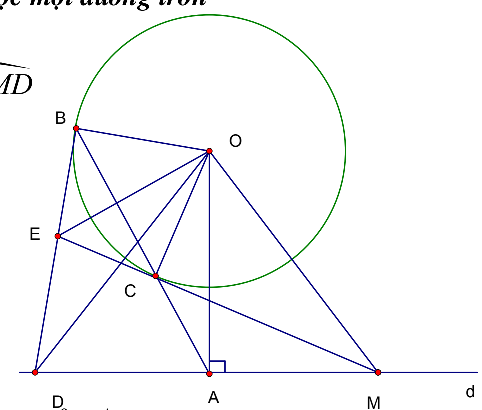
$\widehat{DBA} = \widehat{ECB}$ (EB = EC)

$\widehat{ECB} = \widehat{ACM}$ (đ đ)

$\widehat{ACM} = \widehat{AOM}$ (ACOM nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{DOA} = \widehat{MOA}$ $\Rightarrow$ OA là phân giác của ΔDOM

Mà OA là đường cao $\Rightarrow$ ΔDOM cân tại A $\Rightarrow$ A là trung điểm DM.



4. Chứng minh ΔEOD ~ ΔCOA

(Học sinh tự chứng minh)

5. Cho OM = 2R và OA = a. Tính DE theo a và R.

Chứng minh ΔOBE ~ ΔOAM $\Rightarrow \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OE}{OM} \Rightarrow OE = \dfrac{OB.OM}{OA} = \dfrac{2R^2}{a}$

ΔOBE vuông $\Rightarrow$ EB = $\sqrt{OE^2 - OB^2} = \sqrt{\dfrac{4R^2}{a^2} - R^2} = \dfrac{R}{a}\sqrt{4 - a^2}$

ΔOBD vuông $\Rightarrow$ DB = $\sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$

Suy ra ED = BD – BE = $R\sqrt{3} - \dfrac{R}{a}\sqrt{4 - a^2} = \dfrac{R(a\sqrt{3} - \sqrt{4 - a^2})}{a}$

Bài 45

1. Chứng minh AE là phân giác của $\widehat{AHD}$

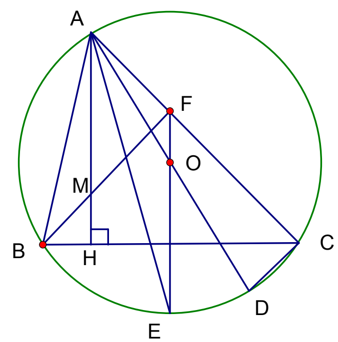
Ta có : OE ⊥ BC (dk – dc)

$\Rightarrow$ OE // AH $\Rightarrow$ $\widehat{AEO} = \widehat{EAH}$

Mà $\widehat{AEO} = \widehat{DAE}$ (do Δ AEO cân)

$\Rightarrow$ $\widehat{HAE} = \widehat{EAD}$

$\Rightarrow$ AE là phân giác của $\widehat{AHD}$



2. Chứng minh AB.AC = AH.AD

Chứng minh Δ AHB ~ Δ ACD (g – g)

3. Chứng minh $\widehat{HAD} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$

Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$; $\widehat{BAH} = \widehat{DAC}$ (Δ AHB ~ Δ ACD)

$\widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{BAH}$

$\widehat{ACB} = 90^0 - \widehat{HAC} = 90^0 - (\widehat{HAD} + \widehat{DAC})$

$\Rightarrow \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = (90^0 - \widehat{BAH}) - 90^0 + (\widehat{HAD} + \widehat{DAC}) = \widehat{HAD}$

4. Chứng minh Δ AFM cân

$\widehat{EFC} = \widehat{HAC}$ (đ v) và $\widehat{MFE} = \widehat{FMA}$ (slt)

Mà $\widehat{BFE} = \widehat{CFE}$ (F ∈ trung trực của BC)

Suy ra : $\widehat{FAM} = \widehat{AMF}$ $\Rightarrow$ Δ AMF cân tại F

5. Cho AB = 4 , AC = 5 ; R = 3. Tính BC (lấy 1 chữ số thập phân)

Ta có AH = $\dfrac{AB.AC}{AD} = \dfrac{4.5}{2.3} = \dfrac{10}{3}$

HC = $\sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{125}{9}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

BH = $\sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{16 - \dfrac{100}{9}} = \dfrac{2\sqrt{11}}{3}$

$\Rightarrow$ BC = BH + HC = $\dfrac{2\sqrt{11}}{3} + \dfrac{5\sqrt{5}}{3} = \dfrac{(2\sqrt{11} + 5\sqrt{5})}{3} = 5,9$

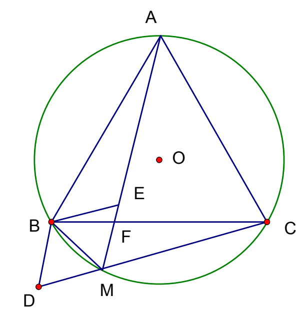
Bài 46

1. Chứng minh Δ MBE đều

Ta có MB = ME (gt) $\Rightarrow$ Δ MBE cân

Mà $\widehat{BME} = \widehat{ACB} = 60^0$ (chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow$ Δ MBE là tam giác đều



2. Chứng minh Δ CBM = Δ ABE

Ta có : $\widehat{MBC} = \widehat{EBM} - \widehat{EBC} = 60^0 - \widehat{EBC}$

$\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{EBC} = 60^0 - \widehat{EBC}$

Do đó : $\widehat{MBC} = \widehat{ABE}$

Từ đó chứng minh : Δ ABE = Δ CBM (c-g-c)

3. Tìm vị trí M để tổng MA + MB + MC lớn nhất

Từ Δ ABE = Δ CBM $\Rightarrow$ AE = MC và ME = MB

Suy ra : MA + MB + MC = MA + ME + EA = MA + MA = 2MA

Vậy tổng MA + MB + MC lớn nhất ⇔ MA lớn nhất

⇔ AM là đường kính ⇔ M là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$

4. Khi M chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ thì E chạy trên đường cố định nào ?

Tính được $\widehat{BEA} = 120^0$ $\Rightarrow$ E thuộc cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn AC cố định

5. Chứng minh $\dfrac{1}{MF} = \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$

Ta có : $\dfrac{1}{\text{MF}} = \dfrac{1}{\text{MB}} + \dfrac{1}{\text{MC}} \Leftrightarrow \dfrac{MF}{MB} + \dfrac{MF}{MC} = 1$

Ta chứng minh : $\dfrac{MF}{MB} = \dfrac{FC}{AB} = \dfrac{FC}{BC}$ (Δ MFC ~ Δ MBA)

$\dfrac{MF}{MC} = \dfrac{BF}{AB} = \dfrac{BF}{BC}$ (Δ MFC ~ Δ BFA)

Suy ra : $\dfrac{MF}{MB} + \dfrac{MF}{MC} = \dfrac{FB}{BC} + \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1$ $\Rightarrow$ đpcm

6. Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

Trên tia đối của tia MC lấy điểm D sao cho MD = MB. $\Rightarrow$ MA = CD

Ta chứng minh được ΔBMD đều $\Rightarrow \widehat{BDM} = 60^0$

Ta có $(MB + MC)^2 = MA^2 \Leftrightarrow -MB.MC = \dfrac{MB^2 + MC^2 - MA^2}{2}$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔBDC ta có :

$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2DB.DC.\cos\widehat{BDC}$

$\Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM.MA.\cos 60^0$

$\Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM.MA.\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - BM.AM$

$\Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - BM(BM + MC)$

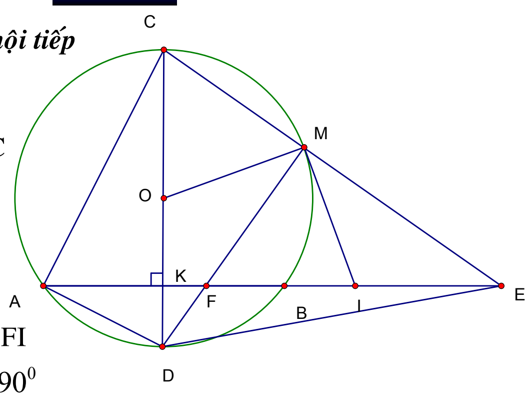
$\Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - BM^2 - BM.MC$

$\Leftrightarrow 3R^2 = AM^2 + \dfrac{MB^2 + MC^2 - MA^2}{2}$

$\Leftrightarrow 6R^2 = 2AM^2 + MB^2 + MC^2 - MA^2$

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

Bài 47



1. Chứng minh tứ giác CKFM nội tiếp

(học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh DF.DM = AD²

Chứng minh DF.DM = DK.DC

và DK.DC = AD^2

Suy ra : DF.DM = AD^2

3. Chứng minh IE = IF

Ta có : $\widehat{MFI} = \widehat{DCM} = \widehat{DMI}$

$\Rightarrow \Delta$MIF cân tại I $\Rightarrow$ MI = FI

Ta có $\widehat{IME} + \widehat{IMF} = \widehat{EMF} = 90^0$

$\widehat{MFI} + \widehat{MEI} = 90^0$ (ΔFME vuông tại M)

Mà : $\widehat{IMF} = \widehat{MFI}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{IME} = \widehat{IEM} \Rightarrow \Delta$MIE cân tại I

$\Rightarrow$ IE = IM . Vậy IF = IE .

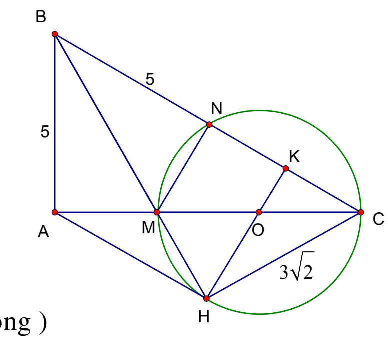
4. Chứng minh $\dfrac{FB}{EB} = \dfrac{KF}{KA}$

Ta có : F là trực tâm của ΔCDE $\Rightarrow$ KE.KF = KC.KD = KB^2

$\Leftrightarrow$ (KB + BE)KF = KC.KD $\Leftrightarrow$ KF.EB = KB^2 – KF.KB

$\Leftrightarrow$ KF. EB = KB.(KB – KF) $\Leftrightarrow$ KF.EB = KA. BF $\Leftrightarrow \dfrac{FB}{EB} = \dfrac{KF}{KA}$

Bài 48



1. Chứng minh tứ giác BAHC nội tiếp

(học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh HC² = HM.HB

Chm ΔHMC ~ ΔHCB (g-g)

3. Chứng minh K là trung điểm NC

Ta có : $\widehat{MCH} = \widehat{MBC}$ (= $\widehat{MBA}$)

Mà : $\widehat{MCH} = \widehat{KHC}$ (ΔHOC cân)

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{KHC}$

Do : $\widehat{MBC} + \widehat{BCH} = 90^0$ (ΔBHC vuông)

$\Rightarrow \widehat{KHC} + \widehat{BCH} = 90^0 \Rightarrow \Delta$HKC vuông tại K $\Rightarrow$ HK $\perp$ NC

$\Rightarrow$ K là trung điểm NC (tính chất đường kính – dây cung)

4. Cho AB = 5 cm , HC = 3$\sqrt{2}$ cm . Tính độ dài cạnh BC.

Chứng minh BN = AB = 5 cm (ΔBAM = ΔBNM)

Ta có BN.BC = BM. BH (hs tự chứng minh)

5.BC = (BH – MH).BH $\Leftrightarrow$ 5BC = BH^2 – BH.MH

$\Leftrightarrow$ 5BC = $BH^2 - HC^2 \Leftrightarrow$ 5BC = $BC^2 - HC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow$ 5BC = $BC^2 - 2HC^2 \Leftrightarrow BC^2$ – 5BC – 36 = 0 (HC = $3\sqrt{2}$)

Giải ra ta được : BC = 9 cm

Bài 49

1. Chứng minh ΔNOBE nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh AN.AE = 2R²

Chứng minh AN.AE = AO.AB = R.2R = $2R^2$

3. Chứng minh ΔANC ~ ΔMCA

Ta có : $\overset{\frown}{EAC} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{EB}$ + sđ $\overset{\frown}{BC}$) và $\overset{\frown}{AMC} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{EB}$ + sđ $\overset{\frown}{AC}$)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mà : } \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{EAC} = \overset{\frown}{AMC} \\ \text{Ta lại có : } \overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{BAC} \ (\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}\ )\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ANC \sim \Delta MCA \ (g-g)$$

$\Rightarrow$ AM.NC = $AC^2 = 2R^2 \Rightarrow S_{ANMC} = R^2$

$S_{\Delta ENM} = S_{\Delta EAC} - S_{ANMC} = S_{\Delta EAC} - R^2$

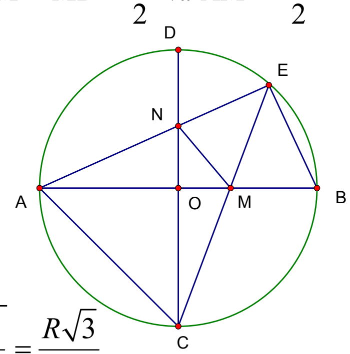
Do đó :

$S_{\Delta ENM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $S_{\Delta EAC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ E là điểm chính giữa $\overset{\frown}{DB}$

4. Biết AM = 3BM. Tính DN và EB theo R

Từ AM = 3BM và AM + BM = 2R $\Rightarrow$ AM = $MB = \frac{R}{2}$ và AM = $\frac{3R}{2}$

Ta có : NC.MA = $AC^2 = 2R^2$ (cmt)



$$\Rightarrow NC = \frac{2R^2}{MA} = \frac{2R^2}{\frac{3R}{2}} = \frac{4R}{3}$$

$$\Rightarrow DN = 2R - \frac{4R}{3} = \frac{2R}{3}$$

$$MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Ta có : $\Delta MBE \sim \Delta MCA \Rightarrow EB = \dfrac{MB.MC}{AC} = \dfrac{\frac{R}{2}.\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R\sqrt{2}} = \dfrac{R\sqrt{6}}{8}$

Bài 50

1. Chứng minh tứ giác MAKO nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh MA² = MB.MC

(Học sinh tự chứng minh)

3. Chứng minh MA = ME

Chứng minh : $\overset{\frown}{MEA} = \overset{\frown}{MAE} \Rightarrow \Delta AME$ cân tại M $\Rightarrow$ MA = ME

4. Chứng minh đường thẳng FE và đường thẳng DO cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O)

Ta có : ΔEMF cân tại M $\Rightarrow \overset{\frown}{MEF} = \overset{\frown}{MFE}$

$\overset{\frown}{BCF} = \overset{\frown}{BFM}$ (chắn $\overset{\frown}{BF}$)

Mà : $\overset{\frown}{EFC} = \overset{\frown}{MEF} - \overset{\frown}{BCF}$ (góc ngoài ΔEFC)

$\overset{\frown}{EFB} = \overset{\frown}{EFM} - \overset{\frown}{BFM}$ Do đó : $\overset{\frown}{EFC} = \overset{\frown}{EFB}$

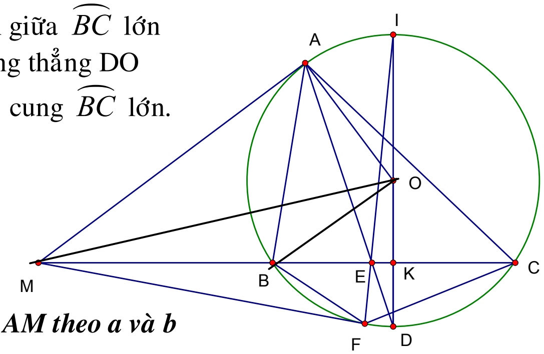
$\Rightarrow$ Tia FE là phân giác $\overset{\frown}{BFC}$

$\Rightarrow$ Tia FE đi qua điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ lớn

Mặt khác : D là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ

$\Rightarrow$ tia DO đi qua điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ lớn

Vậy đường thẳng FE và đường thẳng DO cắt nhau tại điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ lớn.



5. Cho BE = a và EC = b. Tính AM theo a và b

Đặt MA = x $\Rightarrow$ ME = x

MB = ME – EB = x – a và MC = ME + EC = x + b

Ta có : MA^2 = MB.MC $\Leftrightarrow x^2 = (x-a)(x+b) \Leftrightarrow x^2 = x^2 + (b-a)x - ab$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{ab}{b-a}$ (do AB < AC $\Rightarrow$ a < b). Vậy MA = $\dfrac{ab}{b-a}$

Bài 51

1. Chứng minh tứ giác AKDM nội tiếp và KM ⊥ AE

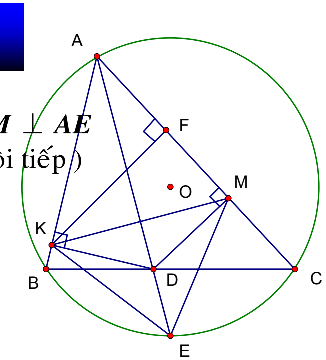
(học sinh tự chứng minh tứ giác AKDM nội tiếp)

Ta có AD là phân giác của $\overset{\frown}{BAC}$

Mà DK ⊥ AB và DM ⊥ AC

$\Rightarrow \Delta AKD = \Delta AMD$

$\Rightarrow$ DK = DM và AK = AM



$\Rightarrow$ AD là trung trực của KM $\Rightarrow$ AE $\perp$ KM

2. Chứng minh AD.AE = AB.AC

Chứng minh ΔABD ~ ΔAEC (g-g)

3. Chứng minh MK = AD .sin $\widehat{BAC}$

Vẽ KF $\perp$ AC tại F. Chứng minh ΔKFM ~ ΔAKD (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{KF}{AK} = \dfrac{KM}{AD} \Rightarrow$ MK = AD. $\dfrac{KF}{AK}$ = AD. sin $\widehat{BAC}$

4. So sánh diện tích tứ giác AKEM và diện tích ΔABC

Ta có : $2S_{\Delta ABC}$ = AB.AC.sin $\widehat{BAC}$ (hs tự chứng minh)

và $2S_{AKEM}$ = AE.MK = AE.AD.sin $\widehat{BAC}$ (MK = AD.sin $\widehat{BAC}$)

Mà AE.AD = AB.AC (cmt) $\Rightarrow 2S_{AKEM}$ = AB.AC.sin $\widehat{BAC}$ = $2S_{\Delta ABC}$

Vậy $S_{AKEM} = S_{\Delta ABC}$

Bài 52

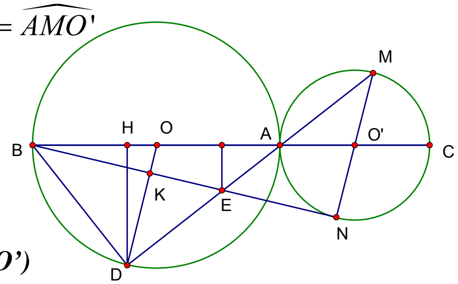
1. Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc nhau

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh OD // MN và tính OK theo R

Chứng minh $\widehat{ODA} = \widehat{OAD} = \widehat{MAO'} = \widehat{AMO'}$

$\Rightarrow$ OD // MN



Ta có : OK // O'N $\Rightarrow \dfrac{OK}{O'N} = \dfrac{BO}{BO'}$

$\Rightarrow$ OK = $\dfrac{BO.O'N}{O'B} = \dfrac{R.0,5R}{2,5R} = \dfrac{R}{5}$

3. Chứng minh BN là tiếp tuyến của (O')

Chứng minh ΔBOK = ΔDOH (c- g- c)

$\Rightarrow \widehat{OKB} = 90^0 \Rightarrow$ BN $\perp$ O'N $\Rightarrow$ BN là tiếp tuyến của (O')

4. Tính diện tích Δ BEA theo R

Tính BK = DH = $\dfrac{2R\sqrt{6}}{5}$ và BD = $\dfrac{2R\sqrt{10}}{5}$

Ta có : ΔADB vuông tại D $\Rightarrow$ DB^2 = BK.BE

$$\Rightarrow BE = \frac{BD^2}{BK} = \frac{\frac{40R^2}{25}}{\frac{2R\sqrt{6}}{5}} = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

Ta có DK = BH = $\dfrac{4R}{5}$ (hs tự chứng minh)

$$S_{\Delta BDE} = \frac{1}{2}BE.DK = \frac{1}{2}.\frac{2R\sqrt{6}}{3}.\frac{4R}{5} = \frac{4R^2\sqrt{6}}{15}$$

$$S_{\Delta BDA} = \frac{1}{2}AB.DH = \frac{1}{2}.2R.\frac{2R\sqrt{6}}{5} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{5}$$

$$S_{\Delta BAE} = S_{\Delta BDA} - S_{\Delta BDE} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{5} - \frac{4R^2\sqrt{6}}{15} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{15}$$

Bài 53

1. Chứng minh A $\in$ (C) và B $\in$ (D)

Chứng minh ΔACM và ΔBDM cân

$\Rightarrow$ CA = CM $\Rightarrow$ A $\in$ (C)

DB = DM $\Rightarrow$ B $\in$ (D)

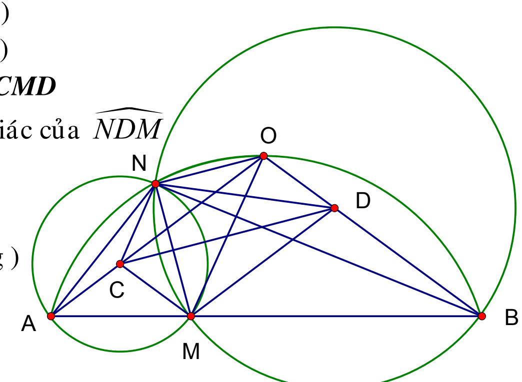
2. Chứng minh ΔANB ~ ΔCMD

Chứng minh DC là phân giác của $\widehat{NDM}$

$\Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{CDM}$

Tương tự : $\widehat{NAM} = \widehat{DCM}$

$\Rightarrow$ ΔANB ~ ΔCMD (g-g)



3. Chứng minh khi M di động trên AB thì N chạy trên một đường cố định

Ta có : $\widehat{CMD} = \widehat{AOB}$ (hình bình hành)

$\widehat{CMD} = \widehat{ANB}$ (ΔANB ~ ΔCMD)

$\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AOB}$ không đổi , mà A , B cố định nên

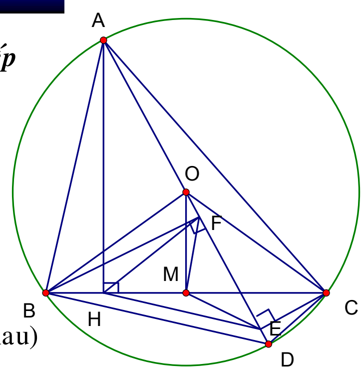
$\Rightarrow$ N $\in$ cung chứa góc $\widehat{AOB}$ dựng trên đoạn AB cố định

4. Chứng minh Δ ONM vuông

Chứng minh : $\widehat{NOC} = \widehat{NBA} = \widehat{MDC} = \widehat{OCD}$ $\Rightarrow$ ON // CD

Mà CD $\perp$ MN $\Rightarrow$ ON $\perp$ MN $\Rightarrow$ ΔONM vuông tại N.

Bài 54



1. Chứng minh ABHF và BMFO nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh HE // BD

Chứng minh tứ giác AHEC nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{CHE} = \widehat{CAD}$

Mà $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (chắn $\overset{\frown}{CD}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{CHE} = \widehat{CBD}$

$\Rightarrow$ HE // DB (2 góc đồng vị bằng nhau)

3. Chứng minh $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

Ta chứng minh : ΔABH ~ ΔADC (g-g) $\Rightarrow$ $AH = \dfrac{AB.AC}{AD}$

Ta có : $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AB.AC}{AD}.BC = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

4. Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔEFH

Ta cần chứng minh ME = MF = MH

Ta có tứ giác OM $\perp$ BC (M là trung điểm BC)

$\Rightarrow$ OMEC nội tiếp (hs tự chứng minh) $\Rightarrow$ $\widehat{OEM} = \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$

Mà BOFM nội tiếp (cmt) $\Rightarrow$ $\widehat{OBC} = \widehat{MFE}$ $\Rightarrow$ $\widehat{MFE} = \widehat{OEM}$

$\Rightarrow$ ΔEMF cân tại M $\Rightarrow$ ME = MF (1)

Ta lại có $\widehat{FMC} = \widehat{MFH} + \widehat{MHF}$ (góc ngoài ΔMFH)

Mà $\widehat{FMC} = \widehat{BOD}$ (tứ giác BOFM nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{BOD} = \widehat{MFH} + \widehat{MHF}$

Do : $\widehat{MHF} = \widehat{BAO}$ (tứ giác ABHF nội tiếp)

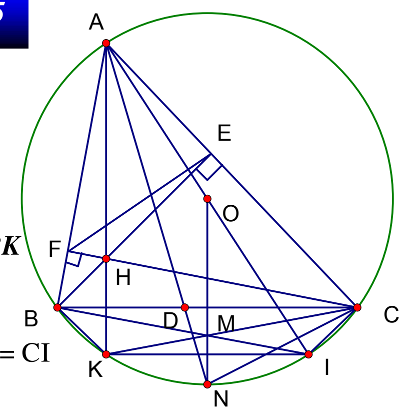
Và ΔAOB cân $\Rightarrow$ $\widehat{BOD} = 2\widehat{BAO}$ $\Rightarrow$ $2\widehat{BAO} = \widehat{MFH} + \widehat{BAO}$

$\Rightarrow$ $\widehat{MFH} = \widehat{BAO}$ $\Rightarrow$ $\widehat{MFH} = \widehat{MHF}$ $\Rightarrow$ ΔMHF cân tại M

$\Rightarrow$ MH = MF (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh .

Bài 55



1. Chứng minh $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp

2. Chứng minh AB.NC = AN.BD

Chứng minh ΔABD ~ ΔANC (g-g)

3. Chứng minh BC.AK = AB.CK + AC.BK

Vẽ đường kính AI của (O).

Chứng minh BKIC là hình thang cân

$\Rightarrow$ $S_{\Delta BKC} = S_{\Delta BCI}$ và BI = CK ; BK = CI

Mà $S_{ABKC} = S_{\Delta ABC} + \Delta_{BKC}$

$S_{ABIC} = S_{\Delta ABC} + \Delta_{BCI}$

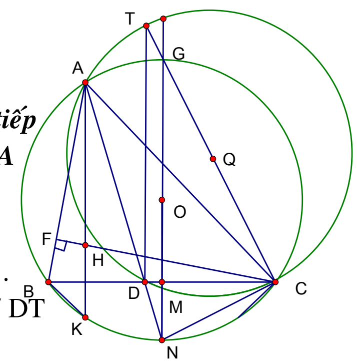
$\Rightarrow$ $S_{ABKC} = S_{ABIC}$

$2S_{ABKC} = 2S_{ABI} + 2S_{ACI}$

$\Leftrightarrow$ AK.BC = AB.BI + AC.CI

$\Leftrightarrow$ AK.BC = AB.KC + AC.BK đpcm

4. Chứng minh tâm Q của đường tròn ngoại tiếp ΔADC luôn thuộc một đường cố định khi A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$



Gọi Q là tâm đường tròn (ADC) .

Vẽ đường kính CT của (Q) cắt tia NO tại G .

Ta có : TD $\perp$ DC mà NO $\perp$ DC $\Rightarrow$ NG // DT

$\Rightarrow$ $\widehat{DTC} = \widehat{NGC}$

Mà $\widehat{DTC} = \widehat{DAC}$ (chắn $\overset{\frown}{DC}$ trong (Q))

$\Rightarrow$ $\widehat{NGC} = \widehat{NAC}$ $\Rightarrow$ tứ giác NAGC nội tiếp $\Rightarrow$ G $\in$ (O)

Mà NG $\perp$ BC $\Rightarrow$ G là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ của (O) $\Rightarrow$ G cố định, Do đó Q $\in$ đường thẳng CG cố định khi A chạy trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$.

Bài 56

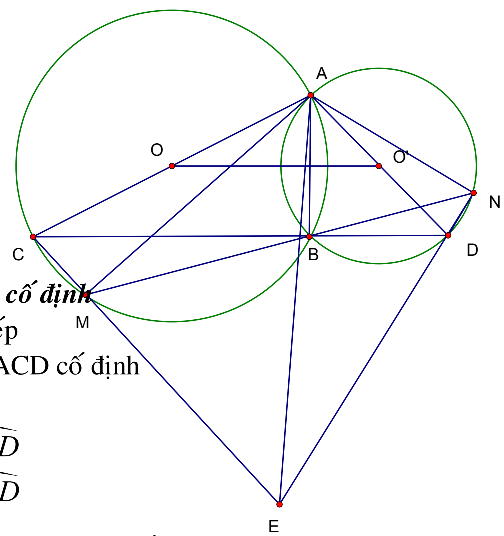
1. Chứng minh C , B , D thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{AN}{AM}$ theo R và r

Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$

$\Rightarrow$ C , D , B thẳng hàng

Chứng minh Δ ACM ~ Δ AND

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{r}{R}$



2. Chứng minh AMEN nội tiếp

(hs tự chứng minh)

3. Chứng minh điểm E thuộc đường cố định

Chứng minh tứ giác ACED nội tiếp

$\Rightarrow$ E $\in$ đường tròn ngoại tiếp Δ ACD cố định

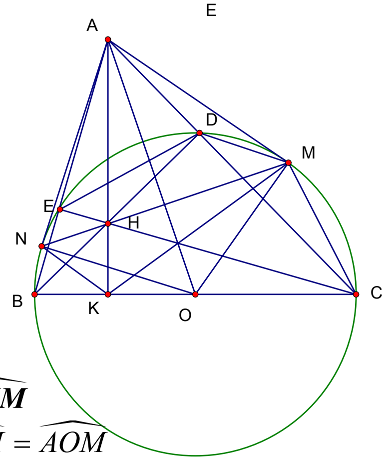
4. Chứng minh ΔAMB ~ ΔAED

Chứng minh $\widehat{MAB} = \widehat{BCM} = \widehat{EAD}$

$\widehat{AMB} = \widehat{ACD} = \widehat{AED}$

Từ đó $\Rightarrow$ Δ AMB ~ Δ AED

Bài 57



1. Chứng minh AD.AC = AE.AB

Chứng minh Δ ABD ~ Δ ACE

2. Chứng minh $\widehat{BHK} = \widehat{AED}$

Chứng minh tứ giác AEHD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AHD} = \widehat{BHK}$

3. Chứng minh KA là phân giác của $\widehat{NKM}$

Chứng minh AKOM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{AOM}$

Chứng minh AOKN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{AKN}$

Mà $\widehat{AOM} = \widehat{AON} \Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{AKM}$. Do đó KA là phân giác $\widehat{MKN}$

4. Chứng minh M , N , H thẳng hàng

Chứng minh KHDC nội tiếp $\Rightarrow$ AD.AC = AH.AK

Chứng minh AM^2 = AD.AC $\Rightarrow$ AM^2 = AH.AK

$\Rightarrow$ Δ AHM ~ Δ AMK (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{AMH}$

Mà $\widehat{AKM} = \widehat{AOM} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON} \Rightarrow \widehat{AMH} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$

Mặt khác : $\widehat{AMN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON} \Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{AMN}$

$\Rightarrow$ M , H , N thẳng hàng

Bài 58

1. Chứng minh K thuộc đường tròn (O)

Chứng minh EKFM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{AMB}$

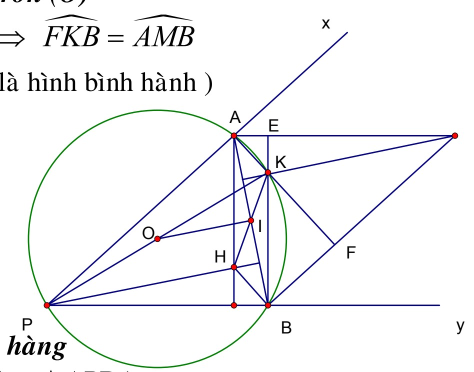
Mà : $\widehat{AMB} = \widehat{APB}$ (PAMB là hình bình hành)

$\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{APB}$

$\Rightarrow$ APBK nội tiếp

$\Rightarrow$ K $\in$ đường tròn (APB)

Hay K $\in$ (O)



2. Chứng minh H , I , K , thẳng hàng

Ta có BH $\perp$ AP (H là trực tâm Δ APB)

AK $\perp$ BM (K là trực tâm Δ AMB)

Mà : AP // BM $\Rightarrow$ BH // AK

Ta chứng minh : AH // BK (cùng $\perp$ Ay)

Suy ra : AKBH là hình bình hành . Mà I là trung điểm AB

$\Rightarrow$ I là trung điểm HK $\Rightarrow$ K , H , I thẳng hàng .

3. Chứng minh H thuộc một đường cố định

Ta có BK $\perp$ PB $\Rightarrow$ PK là đường kính của (O) $\Rightarrow$ O là trung điểm PK

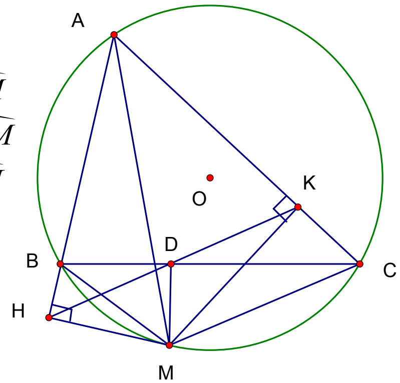
Mà I là trung điểm KH $\Rightarrow$ OI là đường trung bình của ΔKPH

$\Rightarrow$ PH = 2OI

Do $\widehat{APB}$ không đổi $\Rightarrow$ AB không đổi $\Rightarrow$ OI không đổi $\Rightarrow$ PH không đổi

Vậy H chạy trên đường tròn tâm P cố định có bán kính PH không đổi .

Bài 59



1. Chứng minh $\Delta BMC \sim \Delta HMK$

Chứng minh AKMH nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{HAM}$ và $\widehat{KHM} = \widehat{KAM}$

Mà : $\widehat{HAM} = \widehat{BCM}$ và $\widehat{KAM} = \widehat{CBM}$

$\Rightarrow \widehat{KHM} = \widehat{CBM}$ và $\widehat{HKM} = \widehat{BCM}$

Do đó ΔBCM ~ ΔHKM (g-g)

2. Chứng minh MD $\perp$ BC

Học sinh tự chứng minh

3. Tìm vị trí M để KH lớn nhất

Ta có : $\dfrac{HK}{BC} = \dfrac{HM}{BM} = \sin\widehat{HBM}$ $\Rightarrow$ HK = BC.sin$\widehat{HBM}$

Do BC cố định $\Rightarrow$ HK lớn nhất $\Leftrightarrow$ sin$\widehat{HBM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\widehat{HBM}$ = 90^0

$\Leftrightarrow$ $\widehat{ACM} = 90^0$ $\Leftrightarrow$ AM là đường kính của (O)

Bài 60

1. Chứng minh I , O , M thẳng hàng

Tứ giác ABCD là hình thang nội tiếp (O) $\Rightarrow$ ABCD là thẳng hàng cân

M là giao điểm hai đường chéo $\Rightarrow$ MA = MD

Mà IA = ID (hai tiếp tuyến cắt nhau)

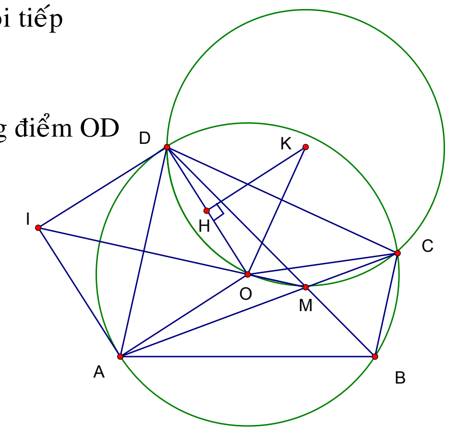
Và OA = OD (bán kính)

$\Rightarrow$ M , O , I thuộc đường trung trực của AD $\Rightarrow$ M , I , O thẳng hàng

2. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔDMC không đổi

Ta có : $\widehat{DOI} = \dfrac{1}{2}\widehat{DOA}$ và $\widehat{DCM} = \dfrac{1}{2}\widehat{DOA}$

$\Rightarrow \widehat{DOI} = \widehat{DCM}$ $\Rightarrow$ DOMC nội tiếp



Gọi K là tâm đường tròn (DCM)

$\Rightarrow$ K là tâm đường tròn (DOC)

Vẽ KH $\perp$ OD tại H $\Rightarrow$ H là trung điểm OD

Ta có DO = R $\Rightarrow$ HO = $\dfrac{R}{2}$

Lại có CD = AB không đổi

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ của (K) không đổi

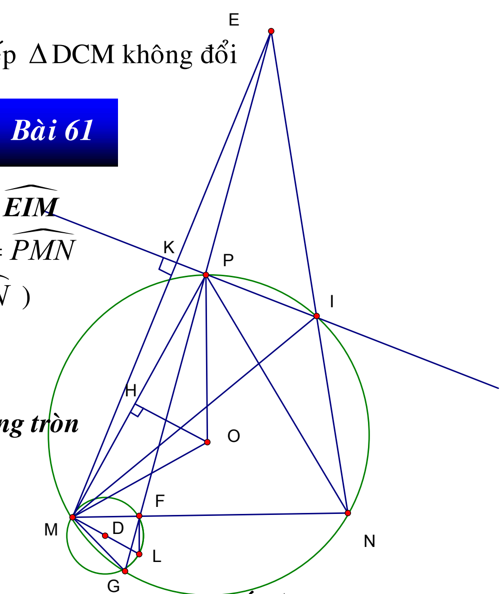
$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DO}$ = $\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ không đổi

$\Rightarrow$ $\widehat{HKO}$ không đổi

$\Rightarrow$ KO = $\dfrac{HO}{\sin\widehat{HKO}}$ không đổi .

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔDCM không đổi

Bài 61



1. Chứng minh IP là phân giác của $\widehat{EIM}$

Tứ giác MPIN nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{EIP} = \widehat{PMN}$

Mà $\widehat{PMN} = \widehat{PIM}$ (do $\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PN}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{EIP} = \widehat{PIM}$

$\Rightarrow$ IP là phân giác của $\widehat{EIM}$

2. Chứng minh E luôn thuộc một cung tròn cố định

Chứng minh PI = PM = PM

$\Rightarrow$ E thuộc cung tròn tâm P có bán kính là PM

3. Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMFG

Chứng minh $\widehat{PMF} = \widehat{PGM}$

Vẽ đường kính ML của đường tròn (MFG)

Chứng minh PM $\perp$ ML

$\Rightarrow$ PM là tiếp tuyến của đường tròn (MFG)

4. Tính tích PF.PG theo R và $\alpha = \widehat{PMN}$

Chứng minh ΔPMF ~ ΔPGM (g-g) $\Rightarrow$ PF.PG = PM^2

Vẽ OH $\perp$ PM $\Rightarrow$ $\widehat{POH} = \widehat{PNM} = \alpha$ $\Rightarrow$ PH = OP.sinα = R.sinα

$\Rightarrow$ PM = 2R.sinα $\Rightarrow$ PF.PG = 4R^2.sin$^2\alpha$

Bài 62

1. Chứng minh QBOA nội tiếp và OQ $\perp$ AB

(Học sinh tự chứng minh)

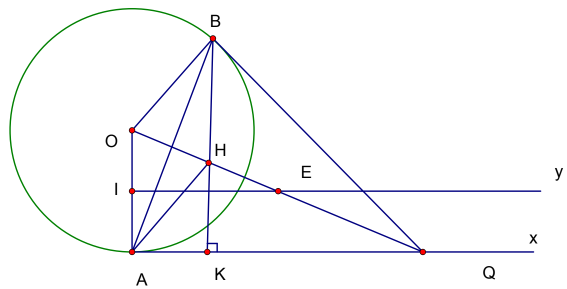
2. Tìm quỹ tích của E khi Q di chuyển trên tia Ax

Gọi I là trung điểm OA

$\Rightarrow$ I cố định và IA = $\dfrac{R}{2}$

Ta có IE // Ax

(đường trung bình)



Vậy E chạy trên tia Ay // Ax cố định và cách tia Ax một đoạn bằng $\dfrac{R}{2}$

3. Tìm quỹ tích của H

Chứng minh AH // OB và BH // OA $\Rightarrow$ BOAH là hình bình hành

Mà OA = OB $\Rightarrow$ BOAH là hình thoi $\Rightarrow$ AH = OA = R

Vậy H di chuiyển trên đường tròn tâm A cố định và có bán kính R

4. Cho AQ = 2R. Tính KH theo R

ΔOAQ có KH // OA $\Rightarrow$ $\dfrac{KQ}{HK} = \dfrac{AQ}{AO} = \dfrac{2R}{R} = 2$ $\Rightarrow$ KQ = 2HK

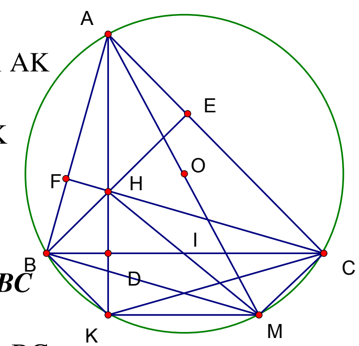
Đặt : HK = x ($0 < x < R$ vì HK < AH = R) .

$\Rightarrow$ QK = 2x $\Rightarrow$ AK = 2(R – x)

ΔAHK vuông tại K $\Rightarrow$ AH^2 = HK^2 + AK^2 $\Leftrightarrow$ R^2 = x^2 + 4(R – x)^2

$\Leftrightarrow$ 5x^2 – 8Rx + 3R^2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = R (loại) và x = $\dfrac{3R}{5}$. Vậy HK = $\dfrac{3R}{5}$

Bài 63



1. Chứng minh MK // BC và DH = DK

Chứng minh MK và BC cùng vuông góc với AK

$\Rightarrow$ MK // BC

Chứng minh CB là tia phân giác của ΔHCK

$\Rightarrow$ ΔHCK cân tại C

$\Rightarrow$ CB là trung trực của HK

$\Rightarrow$ DH = DK

2. Chứng minh HM đi qua trung điểm I của BC

Chứng minh BHCM là hình bình hành

$\Rightarrow$ HM và BC cắt nhau tại trung điểm I của BC

3. Chứng minh $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = 1$

2S$_{\Delta BHC}$ = HD.BC ; 2S$_{\Delta AHC}$ = HE.AC ; 2S$_{\Delta AHB}$ = HF.AB ;

2S$_{\Delta ABC}$ = AD.BC = BE.AC = CF.AB

Từ đó ta có : 2S$_{\Delta BHC}$ + 2S$_{\Delta AHC}$ + 2S$_{\Delta AHB}$ = 2S$_{\Delta ABC}$

$$\Leftrightarrow \frac{2S_{\Delta BHC}}{2S_{\Delta ABC}} + \frac{2S_{\Delta AHC}}{2S_{\Delta ABC}} + \frac{2S_{\Delta AHB}}{2S_{\Delta ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$$

4. Chứng minh $\dfrac{AD}{HD} + \dfrac{BE}{HE} + \dfrac{CF}{HF} \geq 9$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức :

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \quad (\text{ với } x\,;\ y\,;z \geq 0)$$

Thật vậy theo BĐT Cauchy ta có : $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

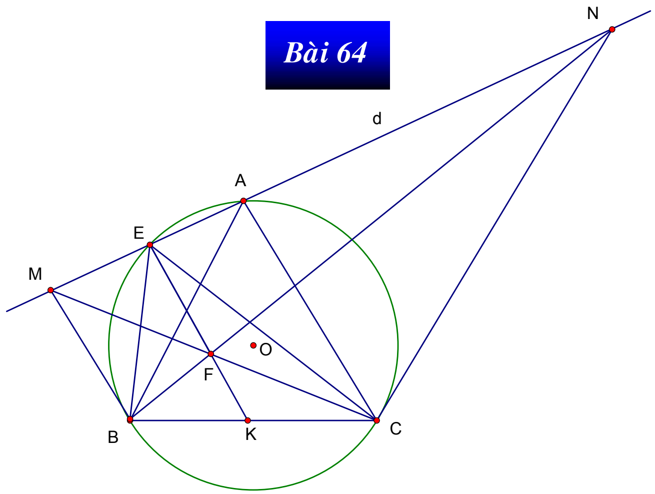
$$\text{Và : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

Nhân hai BĐT trên theo từng vế ta có : $(x + y + z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

Áp dụng ta có : $\left(\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}\right)\left(\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\right) \geq 9$

Mà : $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1 \Rightarrow \frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF} \geq 9$

Bài 64



1. Chứng minh $\Delta MBA \sim \Delta ACN$

Ta có : $\widehat{MBA}=\widehat{ACN}$ (do $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$)

Ta có : $\widehat{ACN}=\widehat{BAC}=60^0 \Rightarrow AB // CN \Rightarrow \widehat{MAB}=\widehat{ANC}$ (đv)

Do đó : $\Delta MBA \sim \Delta ACN$ (g-g)

2. Chứng minh tích MB.CN không đổi

Từ $\Delta MBA \sim \Delta ACN \Rightarrow \frac{MB}{AB}=\frac{AC}{CN} \Leftrightarrow \frac{MB}{BC}=\frac{BC}{CN}$

$\Rightarrow MB.CN = BC^2$ không đổi

3. Chứng minh tứ giác BMEF nội tiếp

Ta chứng minh : $\widehat{MBC}=\widehat{BCN}=120^0$ và $\frac{MB}{BC}=\frac{BC}{CN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MBC \sim \Delta BCN \Rightarrow \widehat{FBC}=\widehat{FMB}$

Mà $\widehat{FCB}+\widehat{FMB}=180^0-\widehat{MBC}=60^0 \Rightarrow \widehat{FBC}+\widehat{FCB}=60^0$

Do $\widehat{MFB}=\widehat{FBC}+\widehat{FCB}$ (góc ngoài ΔFBC) $\Rightarrow \widehat{MFB}=60^0$

Ta có $\widehat{MEB}=\widehat{ACB}=60^0$ (BEAC nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{MFB}=\widehat{MEB}=60^0$

$\Rightarrow$ tứ giác BMEF nội tiếp

4. Chứng minh đường thẳng EF đi qua điểm cố định

Ta có : $\widehat{BEK}=\widehat{BMF}=\widehat{FBK}$ và $\widehat{EKB}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta EBK \sim \Delta BFK \Rightarrow KB^2 = KF.KE$ (1)

Tương tự ta có : $\widehat{FKC}=\widehat{EFM}=\widehat{MBE}=\widehat{ECB}$ và $\widehat{EKC}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta FKC \sim \Delta CKE \Rightarrow CK^2 = CF.CE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KC = KB \Rightarrow$ K là trung điểm BC .

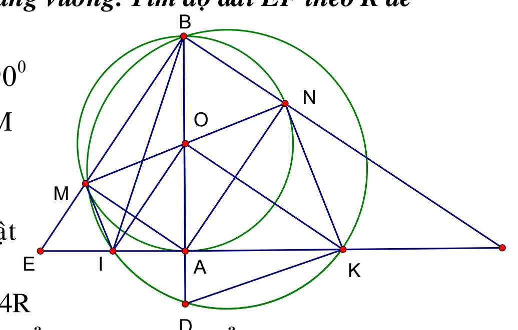
Vậy đường thẳng EF luôn đi qua trung điểm K của BC cố định.

Bài 65

1. Chứng minh tứ giác EMNF nội tiếp

Chứng minh $\widehat{BMN}=\widehat{BFA}$

2. Chứng minh IMNA là hình thang vuông. Tìm độ dài EF theo R để IMNA là hình chữ nhật



Chứng minh $\widehat{BNM}+\widehat{KNF}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{MNK}=90^0 \Rightarrow KN \perp NM$

Tương tự : $IM \perp MN$

$\Rightarrow$ IMNA là hình thang vuông

❖ Để IMNA là hình chữ nhật thì IK = MN

$\Leftrightarrow EF = 2MN \Leftrightarrow EF = 4R$

3. Chứng minh tích AI.AK không đổi khi MN thay đổi

Chứng minh KO // BF và IO // BE $\Rightarrow IO \perp OK \Rightarrow \Delta IOK$ vuông

Mà OA là đường cao $\Rightarrow AI.AK = OA^2 = R^2$

4. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔIBK đi qua điểm cố định khác B

Gọi D là giao điểm của đường tròn (BIK) và đường thẳng BA ($D \neq B$)

Ta chứng minh $AB.AD = AI.AK = R^2 \Rightarrow AD = \frac{R}{2}$.

Vậy D là điểm cố định (vì $D \in$ đường thẳng AB cố định và $AD = \frac{R}{2}$)

Bài 66

1. ***Chứng minh DE là tiếp tuyến của (O)*** (hs tự chứng minh)
2. ***Chứng minh EC là phân giác của $\widehat{AED}$*** (hs tự chứng minh)
3. ***Chứng minh MH $\perp$ AH***

Ta có M là trung điểm AE ; I là trung điểm AK $\Rightarrow$ IM // BE

$\Rightarrow \widehat{IMA} = \widehat{BEA}$

Mà $\widehat{BEA} = \widehat{AHI}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$) $\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IMA}$

Suy ra tứ giác IMHA nội tiếp .

Ta lại có : IM $\perp$ AK (do IM // BE và AK $\perp$ BE) $\Rightarrow$ AH $\perp$ MH

4. ***Chứng minh tứ giác EMHD nội tiếp***

Ta có : $\widehat{AMH} = \widehat{AIH} = \widehat{BIK}$ (tứ giác IMHA nội tiếp)

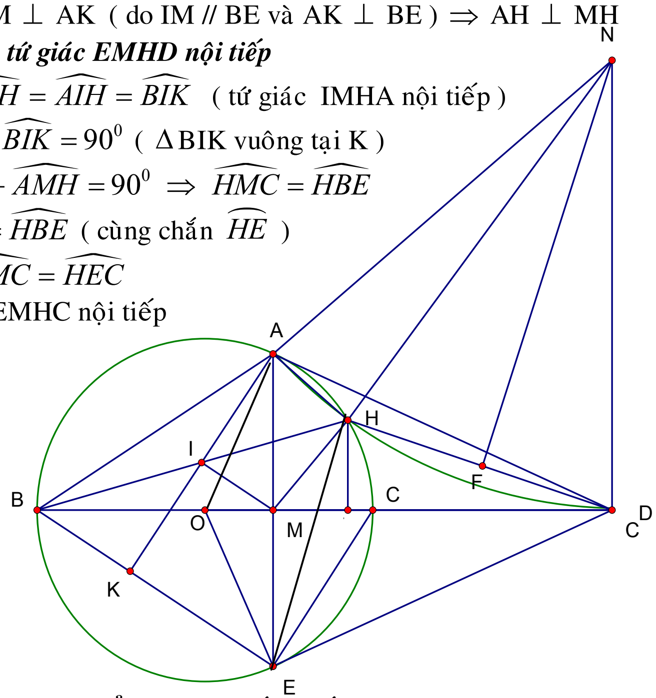
Do : $\widehat{HBE} + \widehat{BIK} = 90^0$ (ΔBIK vuông tại K)

Và : $\widehat{HMC} + \widehat{AMH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HMC} = \widehat{HBE}$

mà $\widehat{HEC} = \widehat{HBE}$ (cùng chắn $\widehat{HE}$)

suy ra : $\widehat{HMC} = \widehat{HEC}$

$\Rightarrow$ tứ giác EMHC nội tiếp



5. ***Chứng minh đường thẳng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAHD***

Gọi N là tâm đường tròn (AHD) $\Rightarrow$ Δ NHD cân tại N

Vẽ đường cao NF của ΔNHD $\Rightarrow$ NF là phân giác của $\widehat{HND}$

$\Rightarrow \widehat{FND} = \dfrac{1}{2}\widehat{HND}$

Mà $\widehat{DAH} = \dfrac{1}{2}\widehat{HND}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của đường tròn (N))

$\Rightarrow \widehat{FND} = \widehat{DAH}$

Ta lại có : $\widehat{DAH} = \widehat{AEH}$ (cùng chắn cung AH trong (O))

Và : $\widehat{AEH} = \widehat{HDM}$ (tứ giác EMHD nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{FND} = \widehat{HDM}$

Mà $\widehat{FND} + \widehat{FDN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HDM} + \widehat{FDN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MDN} = 90^0$

Suy ra : BD $\perp$ ND tại D $\Rightarrow$ BD là tiếp tuyến của đường tròn (AHD)

6. ***Khi M là trung điểm OC. Tính diện tích ΔMHC theo R***

Khi M là trung điểm OC. Chứng minh được ΔABE đều cạnh là R$\sqrt{3}$

Chứng minh AK đi qua O và KE = BK = $\dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ IM = $\dfrac{R\sqrt{3}}{4}$

Ta lại có : AK = BM = $\dfrac{3R}{2} \Rightarrow$ IK = $\dfrac{3R}{4}$

BI = $\sqrt{IK^2 + BK^2} = \sqrt{\dfrac{9R^2}{16} + \dfrac{3R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{21}}{4}$

Chứng minh ΔBIM ~ ΔBMH (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{IM}{MH} = \dfrac{BI}{BM} \Rightarrow MH = \dfrac{IM.BM}{BI} = \dfrac{3R}{2\sqrt{7}}$

Chứng minh ΔAHM ~ ΔMGH (HG là đường cao của ΔMHD)

$\Rightarrow$ MH^2 = GH.AM $\Rightarrow$ HG = $\dfrac{MH^2}{AM} = \dfrac{9R}{14\sqrt{3}}$

Vậy diện tích ΔMHD = $\dfrac{1}{2}GH.MD = \dfrac{9R^2\sqrt{3}}{56}$

Bài 67

1. Chứng minh tứ giác KMEC nội tiếp và $\widehat{KCE} = \widehat{BNE}$

Chứng minh 5 điểm O , B , A , E , K cùng thuộc một đường tròn đường kính OA $\Rightarrow \widehat{CKE} = \widehat{CBA}$

Mà ME // AB (cùng $\perp$ OB) $\Rightarrow \widehat{CME} = \widehat{CBA}$

$\Rightarrow \widehat{CKE} = \widehat{CME} \Rightarrow$ tứ giác CKME nội tiếp

Ta có $\widehat{BNE} = \widehat{BFE} + \widehat{DEF}$ (góc ngoài tam giác FEN)

$= \widehat{BCE} + \widehat{MCK}$ (vì $\widehat{BCE} = \widehat{BFE}$ và $\widehat{DEF} = \widehat{MCK}$)

$= \widehat{KCE}$

2. Chứng minh tứ giác EHOF nội tiếp

Chứng minh AE.AF = AH.AO = $AB^2 \Rightarrow \dfrac{AE}{AH} = \dfrac{AO}{AF}$

Với $\widehat{EAH}$ là góc chung $\Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta AOF \Rightarrow \widehat{EHA} = \widehat{AFO}$

Suy ra tứ giác EHOF nội tiếp (góc ngoài bằng góc đối diện góc trong)

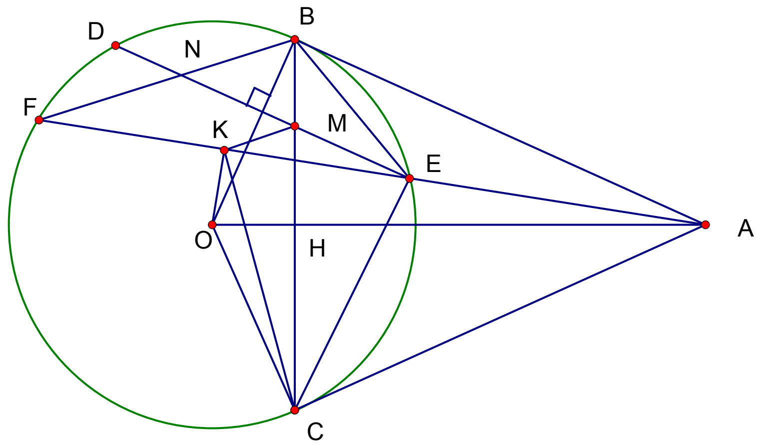
3. Chứng minh tia FM đi qua trung điểm của AB

Ta có $\widehat{KCE} = \widehat{BNE}$ *(cmt)*

Mà $\widehat{DMK} = \widehat{KCE}$ (tứ giác KMEC nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{DMK} = \widehat{BNE}$

Suy ra : KM // FB

ΔFEN có K là trung điểm EF và KM // FN $\Rightarrow$ M là trung điểm EN



Bài 68

1. Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp. Xác định tâm I.

(học sinh tự chứng minh)

2. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại K.

Chứng minh KF.KE = KB.KC (Học sinh tự chứng minh)

3. AK cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh MFEA nội tiếp

Chứng minh KM.KA = KB. KC $\Rightarrow$ KM. KA = KF. KE

Chứng minh ΔKFA ~ ΔKME (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{MAF} = \widehat{MEF}$

Suy ra tứ giác AMFE nội tiếp

4. Chứng minh M , H , I thẳng hàng.

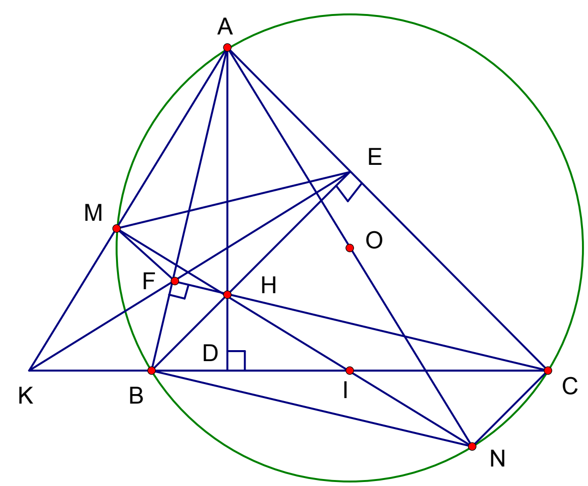
Chứng minh 5 điểm A , M , F , H , E cùng thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow$ HM $\perp$ AM (1)

Vẽ đường kính AN của (O) $\Rightarrow$ NM $\perp$ AM (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ N , H , M thẳng hàng (3)

Chứng minh BHCN là hình bình hành $\Rightarrow$ H , I , N thẳng hàng (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ M , H , I thẳng hàng



Bài 69

1. ***Chứng minh CH = DE*** (học sinh tự chứng minh)
2. ***Chứng minh CA.CD = CB.CE*** (học sinh tự chứng minh)
3. ***Chứng minh ABED nội tiếp*** (học sinh tự chứng minh)
4. ***CF cắt AB tại Q. Hỏi K là điểm đặc biệt gì của ΔOCQ.***

Ta có (O) và (K) cắt nhau tại hai điểm C và F ⇒ OK ⊥ CF tại trung điểm I của CF *(tính chất hai đường tròn cắt nhau)*

⇒ OI và AH là hai đường cao của ΔOCQ

⇒ K là trực tâm của Δ OCQ

5. ***Chứng tỏ Q là một giao điểm của DE và đường tròn (OKF)***

Ta cần chứng minh Q , D , E thẳng hàng và tứ giác OKFQ nội tiếp

Vẽ tiếp tuyến xy của (O) tại C , ta chứng minh được xy // DE

⇒ DE ⊥ OC

mà OK ⊥ OC nên Q , D , E thẳng hàng (chú ý K ∈ DE)

Hay Q thuộc đường thẳng DE (1)

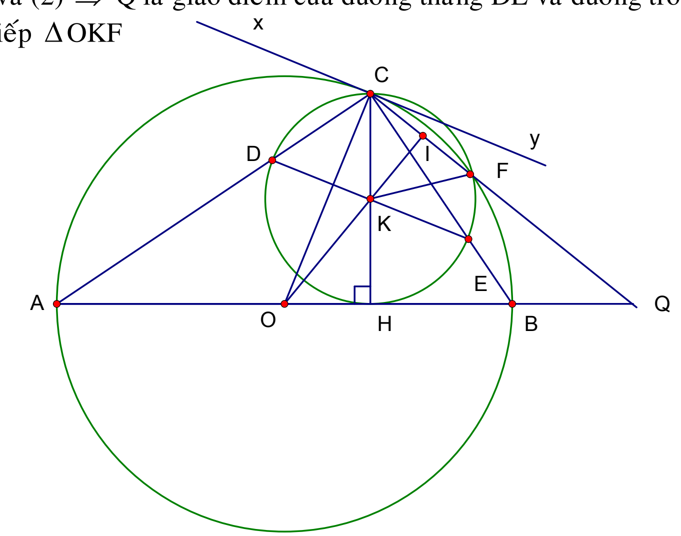
Ta có KI là phân giác của $\widehat{CKF}$ ⇒ $\widehat{IKF}=\widehat{IKC}=\widehat{OKH}$

Chứng minh HKIQ nội tiếp ⇒ $\widehat{OKH}=\widehat{FQH}$

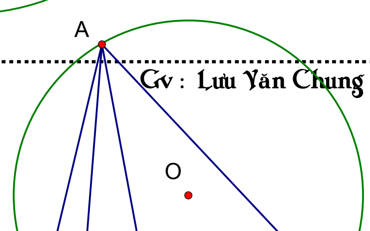
Từ đó ⇒ $\widehat{OKH}=\widehat{FQH}$ ⇒ tứ giác OKFQ nội tiếp

Hay là Q thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔOKF (2)

Từ (1) và (2) ⇒ Q là giao điểm của đường thẳng DE và đường tròn ngoại tiếp ΔOKF



Bài 70



a. ***Chứng minh*** $\frac{AA'}{AD}=\frac{BB'}{BD}=\frac{CC'}{CD}$

Vẽ tiếp tuyến chung trong xy của hai đường tròn . Ta có :

$\widehat{BAD}=\widehat{BDx}=\widehat{B'Dy}=\widehat{DA'B'}$

⇒ AB // A'B'

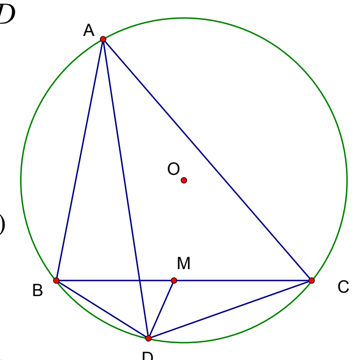
$\Rightarrow \frac{A'D}{AD}=\frac{B'D}{BD}$

$\Rightarrow \frac{A'D+AD}{AD}=\frac{B'D+BD}{BD}$

$\Rightarrow \frac{AA'}{AD}=\frac{BB'}{BD}$

Tương tự ta chứng minh : $\frac{AA'}{AD}=\frac{CC'}{CD}$ ⇒ $\frac{AA'}{AD}=\frac{BB'}{BD}=\frac{CC'}{CD}$

b. *Chứng minh AD.BC = AC.BD + AB.CD*



Trên BC lấy điểm M sao cho $\widehat{BMD}=\widehat{ACD}$

Ta chứng minh : ΔBMD ~ ΔACD (g-g)

⇒ BM.AD = AC.BC (1)

Ta lại có : $\widehat{BMD}+\widehat{DMC}=180^0$ (kề bù)

$\widehat{ACD}+\widehat{ABD}=180^0$ (ABDC nội tiếp)

⇒ $\widehat{DMC}=\widehat{ABD}$ (vì $\widehat{BMD}=\widehat{ACD}$)

⇒ ΔDMC ~ ΔDBA (g-g)

⇒ MC.AD = AB.DC (2)

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta có :

AD.BC = AC.BD + AB.CD

c. *Chứng minh : $AA_1.BC = BB_1.AC = CC_1.AB$*

Ta chứng minh được :

$AA_1^2 = AD.AA'$; $BB_1^2 = BD.BB'$; $CC_1^2 = CD.CC'$

Từ : $\frac{AA'}{AD}=\frac{BB'}{BD}=\frac{CC'}{CD}$ ⇒ $\frac{AA'.AD}{AD^2}=\frac{BB'.BD}{BD^2}=\frac{CC'.CD}{CD^2}$

$$\Rightarrow \frac{AA_1^2}{AD^2} = \frac{BB_1^2}{BD^2} = \frac{CC_1^2}{CD^2} \Rightarrow \frac{AA_1}{AD} = \frac{BB_1}{BD} = \frac{CC_1}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{AA_1.BC}{AD.BC} = \frac{BB_1.AC}{BD.AC} = \frac{CC_1.AB}{CD.AB} = \frac{BB_1.AC + CC_1.AB}{BD.AC + CD.AB}$$

Mà : $AD.BC = AC.BD + AB.CD \Rightarrow AA_1.BC = BB_1.AC = CC_1.AB$