NGUYEN VAN RIN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG:

Đặc điểm chung của dạng hệ phương trình này là sử dụng các kỹ năng biến đổi đồng nhất. Đặc biệt, là kỹ năng phân tích nhằm đưa một phương trình trong hệ về dạng đơn giản (có thể rút theo y hoặc ngược lại) rồi thế vào phương trình còn lại trong hệ.

❶ <u>Dạng 1:</u> Trong hệ có một phương trình bậc nhất với ẩn x hoặc ẩn y. Khi đó, ta tìm cách rút y theo x hoặc ngược lại.

<u>Ví dụ 1:</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ xy + x + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$

<u>Giải:</u> Dễ thấy x=0 không thỏa mãn phương trình (2) nên từ (2) ta có:

$y + 1 = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ thay vào (1) ta được:

$$x^2.\frac{x^2-1}{x}(x+\frac{x^2-1}{x}) = 3x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2-1)(2x^2-1) = (x-1)(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^3+2x^2-x-1) = (x-1)(3x-1) \Leftrightarrow (x-1)(2x^3+2x^2-4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \quad \text{(loại)} \\ x=-2 \end{array}\right.$$

❷ <u>Dạng 2:</u> Một phương trình trong hệ có thể đưa về dạng tích của các phương trình bậc nhất hai ẩn.

<u>Ví dụ 2:</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$

<u>Giải:</u> Điều kiện: $x \ge 1; y \ge 0$.

$(1) \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 - (x+y) = 0 \quad \Leftrightarrow (x+y)(x-2y) - (x+y) = 0$ (từ ĐK ta có x+y>0)

$\Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$ thay vào phương trình (2) ta được:

$y\sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 2y + 2 \Leftrightarrow (y+1)(\sqrt{2y} - 2) = 0$ (do $y \ge 0$) $\Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$.

❸ <u>Dạng 3:</u> Đưa một phương trình trong hệ về dạng phương trình bậc hai một ẩn, ẩn còn lại là tham số.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải: Biến đổi phương trình (2) về dạng $y^2 - (4x+8)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0$

Coi phương trình trên là phương trình ẩn y tham số x ta có $\Delta' = 9x^2$ từ đó ta được nghiệm $\left[\begin{array}{ll} y = 5x+4 & (3) \\ y = 4-x & (4) \end{array}\right.$

Thay (3) vào (1) ta được: $(5x+4)^2 = (5x+4)(4-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \quad \Rightarrow y = 4 \end{array}\right.$

Thay (4) vào (1) ta được: $(4-x)^2 = (5x+4)(4-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 4 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ là: $(0;4), (4;0), (\frac{-4}{5};0)$.

II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Điểm quan trọng nhất trong hệ dạng này là phát hiện ẩn phụ $a = f(x;y), b = g(x;y)$ có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác 0.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases}$

Dễ thấy y=1 không thỏa mãn phương trình (1) nên HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + y + x = 4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(y+x-2) = 1 \end{cases}$

Đặt $a = \dfrac{x^2+1}{y}; b = y + x - 2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \end{cases}$

Giải hệ ta được a=b=1 từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 1 = y \\ x + y = 3 \end{cases}$

Hệ này bạn đọc có thể giải dễ dàng.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$

Giải: Điều kiện $x + y \neq 0$

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2+(x-y)^2+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+x-y=3 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y+\dfrac{1}{x+y}(|a|\geq 2); b=x-y$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 3a^2+b^2=13 & (1) \\ a+b=3 & (2) \end{cases}$

Giải hệ ta được a=2; b=1 (do $a\geq 2$) từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là (1;0).

III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Hệ phương trình loại này ta thường gặp ở hai dạng $f(x)=0$ (1) và $f(x)=f(y)$ (2) với f là hàm đơn điệu trên D và x, y thuộc D. Nhiều khi cần phải đánh giá ẩn x, y để x, y thuộc tập mà hàm f đơn điệu.

❶ <u>Dạng 1:</u> Một phương trình trong hệ có dạng $f(x)=f(y)$, phương trình còn lại giúp ta giới hạn x, y thuộc tập D để trên đó hàm f đơn điệu.

✍**<u>Ví dụ 6:</u> Giải hệ phương trình** $\begin{cases} x^3-5x=y^3-5y & (1) \\ x^8+y^4=1 & (2) \end{cases}$

<u>Giải:</u> Từ PT (2) ta có $\begin{cases} x^8\leq 1 \\ y^4\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\leq 1 \\ |y|\leq 1 \end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=t^3-5t; t\in[-1;1]$

Ta có $f'(t)=3t^2-5<0; \forall t\in[-1;1]$ do đó $f(t)$ nghịch biến trên khoảng (-1;1)

Từ đó $(1)\Leftrightarrow x=y$ thay vào PT (2) ta được PT $x^8+x^4-1=0$

Đặt $a=x^4\geq 0$ và giải phương trình ta được $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=y=\pm\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

❷ <u>Dạng 2:</u> Là dạng hệ đối xứng loại hai mà thường khi giải thường dẫn đến cả hai trường hợp (1) và (2).

✍**<u>Ví dụ 7:</u> Giải hệ phương trình** $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$

<u>Giải:</u> Đặt $a=x-1; b=y-1$ ta được hệ $\begin{cases} a+\sqrt{a^2+1}=3^b & (1) \\ b+\sqrt{b^2+1}=3^a & (2) \end{cases}$

(1)-(2) vế theo vế ta có $a+\sqrt{a^2+1}+3^a=b+\sqrt{b^2+1}+3^b \quad (3)$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}+3^t$

$$f'(t)=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}+3^t\ln 3$$

Vì $\sqrt{t^2+1}>\sqrt{t^2}\geq -t\Rightarrow \sqrt{t^2}+t>0\Rightarrow f'(t)>0,\forall t$

Do đó, hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên PT $(3)\Leftrightarrow a=b$ thay vào phương trình (1) ta được $a+\sqrt{a^2+1}=3^a$ (4).

Theo nhận xét trên thì $a+\sqrt{a^2+1}>0$ nên PT $(4)\Leftrightarrow \ln(a+\sqrt{a^2+1})-a\ln 3=0$ (lấy ln hai vế).

Xét hàm số $g(a)=\ln(a+\sqrt{a^2+1})-a\ln 3$

$$g'(a)=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}-\ln 3<1-\ln 3<0,\forall a\in\mathbb{R}.$$

Do đó, g(a) nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và do PT(4) có nghiệm a=0 nên phương trình (4) có nghiệm duy nhất a=0.

Vậy nghiệm của hệ phương trình ban đầu là $(x;y)=(1;1)$.

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Phương pháp này cần lưu ý các biểu thức không âm và nắm vững các bất đẳng thức cơ bản.

✍ **Ví dụ 8: Giải hệ phương trình** $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y & (1)\\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x & (2)\end{cases}$

Giải: Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2 \quad (3)$$

Ta có $\sqrt[3]{x^2-2x+9}=\sqrt[3]{(x-1)^2+8}\geq 2\Rightarrow \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}\leq\dfrac{2|xy|}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}\leq\dfrac{2|xy|}{2}=|xy|$

Tương tự $\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\leq|xy|$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $x^2;y^2$ ta có $x^2+y^2\geq 2|xy|$.

Nên $VT(3)\leq VP(3)$.

Do đó, dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} x=y=1\\ x=y=0\end{array}\right.$.

Thử lại, ta được nghiệm của hệ phương trình là $(0;0),(1;1)$.

✍**Ví dụ 9: Giải hệ phương trình** $\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases}$

Giải: $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = -(x^3 - 3x - 2) \\ x - 2 = 2(y^3 - 3y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = -(x+1)^2(x-2) \quad (1) \\ x - 2 = 2(y+1)^2(y-2) \quad (2) \end{cases}$

Nếu x>2 thì từ (1) suy ra y-2<0 điều này mâu thuẫn với PT(2) có x-2 và y-2 cùng dấu.
Tương tự với x<2 ta cũng suy ra điều vô lý.
Vậy nghiệm của hệ phương trình là x=y=2.
Hy vọng một số ví dụ trên sẽ giúp bạn đọc phần nào kỹ năng giải hệ phương trình.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8 \\ x(y^3 - 2) = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x-3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y+1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{y} + \sqrt{y+2} + \sqrt{y+4} \\ x + y + x^2 + y^2 = 44 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} e^x = 2011 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ e^y = 2011 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 6y - 12x + 13 = 0 \end{cases}$

MỘT SỐ CHÚ Ý
KHI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán 1: (KHỐI A-2008) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Giải: $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow x^2+y+xy(x^2+y)=(x^2+y)^2 \Leftrightarrow (x^2+y)(x^2+y-1-xy)=0$.

i. $(x^2+y)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$ (I)

Hệ (I) có nghiệm $(x;y)=(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}})$.

ii. $x^2+y-1-xy=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (II)

Hệ (II) có nghiệm $(x;y)=(1;-\dfrac{3}{2})$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}),(1;-\dfrac{3}{2})$.

Bài toán 2: (Khối B-2009) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$

Giải: y=0 thì hệ đã cho vô nghiệm.

Do đó, $y \neq 0$. Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=7 \\ x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=7 \\ (x+\dfrac{1}{y})^2-\dfrac{x}{y}=13 \end{cases}$$

Suy ra $(x+\frac{1}{y})^2+(x+\frac{1}{y})-20=0$

i. $x+\frac{1}{y}=-5 \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}=-5 \\ x=12y \end{cases}$. Hệ này vô nghiệm.

ii. $x+\frac{1}{y}=4 \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}=4 \\ x=3y \end{cases}$.

Trường hợp này hệ có hai nghiệm $(x;y)=(1;\frac{1}{3})$ và $(x;y)=(3;1)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)=(1;\frac{1}{3})$ và $(x;y)=(3;1)$.

☞***Nhận xét:*** **Qua hai ví dụ đề thi tuyển sinh ĐH nêu trên, chúng ta có thể thấy rằng đôi khi chỉ cần biến đổi cơ bản , dựa vào các hằng đẳng thức là có thể thu được kết quả .**

Sau đây, ta xét tiếp các ví dụ đòi hỏi các phép biến đổi phức tạp hơn.

✍**Bài toán 3: Giải hệ phương trình** $\begin{cases} (1-\frac{12}{y+3x})\sqrt{x}=2 \\ (1+\frac{12}{y+x})\sqrt{y}=6 \end{cases}$

Giải: Điều kiện $x>0, y>0, y+3x\neq 0$.

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\frac{12}{y+3x}=\frac{2}{\sqrt{x}} \\ 1+\frac{12}{y+3x}=\frac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{y}}=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{y}}=-\frac{12}{y+3x} \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{1}{x}-\frac{9}{y}=-\frac{12}{y+3x} \Rightarrow y^2+6xy-27x^2=0 \Rightarrow (\frac{y}{x})^2+6(\frac{y}{x})-27=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x}=3 \\ \frac{y}{x}=-9 \text{ (loai)} \end{cases}$$

Với $\frac{y}{x}=3$ ta được $x=(1+\sqrt{3})^2; y=3(1+\sqrt{3})^2$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x=(1+\sqrt{3})^2; y=3(1+\sqrt{3})^2$.

Bài toán 4: (Dự bị D-2008) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 36x^2y - 60x^2 + 25y = 0 \\ 36y^2z - 60y^2 + 25z = 0 \\ 36z^2x - 60z^2 + 25x = 0 \end{cases}$

Giải: $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{60x^2}{36x^2+25} \\ z = \dfrac{60y^2}{36y^2+25} \\ x = \dfrac{60z^2}{36z^2+25} \end{cases}$

Hiển nhiên hệ này có nghiệm $(x;y;z) = (0;0;0)$.

Dưới đây ta xét $(x;y;z) \neq (0;0;0)$.

Từ hệ trên ta thấy $x > 0; y > 0; z > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$y = \frac{60x^2}{36x^2+25} \leq \frac{60x^2}{2\sqrt{36x^2.25}} = \frac{60x^2}{60x} = x.$$

Tương tự ta được $y \leq x \leq z \leq y$. Suy ra $x = y = z$.

Do đó, hệ có một nghiệm nữa là $x = y = z = \dfrac{5}{6}$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y;z) = (0;0;0)$ và $(x;y;z) = (\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6})$.

Bài toán 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 & (1) \\ (x-1)^4 = y & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện $x \geq 1; y \geq 0$.

Thế y từ phương trình (2) vào phương trình (1) ta có:

$\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8 - x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 9 \quad (3)$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 9 \quad (x \geq 1)$

$f'(x) = -3x^2 + 2x - 2 < 0, \forall x \geq 1$

Do đó, $f(x)$ nghịch biến với $x \geq 1$.

Mặt khác, hàm số $g(x) = \sqrt{x-1}$ luôn nghịch biến khi $x \geq 1$.

Suy ra, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (2;1)$.

Nhận xét: *Đối với bài toán trên, dùng công cụ đạo hàm để giải quyết là rất hay. Tuy nhiên, ta cũng có thể tránh được đạo hàm bằng cách biến đổi khéo léo như sau:*

$$pt(3) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1) - \left[(x-1)^2 - 1\right] + x^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - x(x-2) + (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + x^2 + x + 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \left(vì \ \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + x^2 + x + 4 > 0, \forall x \geq 1 \right).$$

Dưới đây, xin nêu một bài toán trong đề thi tuyển sinh Đại Học mà nếu không dùng đến công cụ đạo hàm thì khó có thể giải được.

Bài toán 7: **(KHỐI A-2010) Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện $x \leq \frac{3}{4}; y \leq \frac{5}{2}$.

$PT(1) \Leftrightarrow (4x^2+1)2x = (5-2y+1)\sqrt{5-2y}$

Đặt $\begin{cases} 2x = u \\ \sqrt{5-2y} = v \end{cases} \Rightarrow (u^2+1)u = (v^2+1)v$

Hàm $f(t) = (t^2+1)t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, $u = v \Rightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}$.

Thế y vào PT(2) ta được $4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 0$ (3)

Dễ thấy, $x = 0$ và x=$\frac{3}{4}$ không phải là nghiệm của PT(3).

Xét hàm số

$g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x}$ trên $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

$g'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2-3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Suy ra, $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Nhận thấy $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ nên PT(3) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

Với $x = \frac{1}{2}$ thì $y = 2$.

Vậy hệ đã cho có một nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

✍**Bài toán 8: Giải hệ phương trình** $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2) \end{cases}$

Giải: Dễ thấy y=0 không là nghiệm của hệ phương trình.

Chia hai vế của PT(1) cho $y^5\neq 0$ ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^5+\left(\frac{x}{y}\right)=y^5+y$

Xét hàm số $f(t)=t^5+t$ có $f'(t)=5t^4+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $\frac{x}{y}=y\Leftrightarrow x=y^2$. Thế $x=y^2$ vào PT(2) ta được $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6$.

Giải hệ này ta được $x=1$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(1;1)$ và $(x;y)=(1;-1)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2=1 \\ x^3y-x^2+xy=-1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2+6y=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x \\ 2^{x+y}-2^{x-y}=x-y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-12xy+20y^2=0 \\ \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+xy+\frac{3}{2}=2^y \\ \left(x^2y+2x\right)^2-2x^2y-4x+1=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x^2y+y^{\ 3}=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^3-3x^2=y^3-3y-2 \\ \log_y\left(\frac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\frac{y-1}{x-2}\right)=(x-2)^3 \end{cases}$.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Dạng 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Dạng tổng quát: $\begin{cases} a_1X + b_1Y = c_1 \\ a_2X + b_2Y = c_2 \end{cases} \quad (*)$

Phương pháp: Thông thường có **3 phương pháp** để giải hệ phương trình dạng (*).

☆ **Cách 1:** Giải bằng *phương pháp thế.*
☆ **Cách 2:** Giải bằng *phương pháp cộng đại số.*
☆ **Cách 3:** Giải bằng *phương pháp dùng định thức.*

Kí hiệu: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$, $D_X = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$, $D_Y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$.

TH1: $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} X = \dfrac{D_X}{D} \\ Y = \dfrac{D_Y}{D} \end{cases}$.

TH2: $D = 0$: Và $D_X = D_Y = 0$: Hệ có vô số nghiệm dạng $\left\{ \left(X_0, Y_0 \right) \middle| a_1X_0 + b_1Y_0 = c_1 \right\}$.

TH3: $D = 0$: Hoặc $D_X \neq 0$ hoặc $D_Y \neq 0$: Hệ vô nghiệm.

***Bài tập:* Giải các hệ phương trình sau:**

1. $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y} = 3 \\ \dfrac{9}{x} - \dfrac{10}{y} = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{6}{x-2y} + \dfrac{2}{x+2y} = 3 \\ \dfrac{3}{x-2y} + \dfrac{4}{x+2y} = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{6x-3}{y-1} - \dfrac{2y}{x+1} = 5 \\ \dfrac{4x-2}{y-1} - \dfrac{4y}{x+1} = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x^2 + 2x - \sqrt{y-1} = 3 \\ x^2 + x + 2\sqrt{y-1} = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{3x-6}{y+1} - \dfrac{x}{y-2} = 1 \\ \dfrac{x-2}{y+1} + \dfrac{3x}{y-2} = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{y+7}{y+3} = 5 \\ \dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{3y+1}{y+3} = 5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3(x+y)+2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)=6 \\ 3(x-y)+2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y-1}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y-1}=4 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} \dfrac{3(x+y)}{x-y}=-7 \\ \dfrac{5x-y}{y-x}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{y}=17 \\ 7x-3y=xy \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x^2+3y=11 \\ 2x^2-7y=15 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2\left(4-x^2\right)+\dfrac{5}{\sqrt{y}}=2 \\ 4-x^2+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} |x-1|+y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1 \\ |x-1|+y=3 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x+2y=2 \\ |2x-3y|=1 \end{cases}$.

Dạng 2: *HỆ GỒM MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT*

Dạng tổng quát: $\begin{cases} ax^2+by^2+cxy+dx+fy+e=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$

Phương pháp: **Từ phương trình bậc nhất, rút một ẩn theo ẩn còn lại và thay vào phương trình bậc hai.**

Bài tập: **Giải các phương trình sau:**

1. $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ y^2-x^2+2x+2y+4=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x+9y=6 \\ 3x^2+6xy-x+3y=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2+x+y+1=0 \\ x^2+12x+2y+10=0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (x+2y+1)(x+2y+2)=0 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2=7x+12y-1 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} (2x+3y-2)(x-5y-3)=0 \\ x-3y=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+11=5y^2 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 9x^2+4y^2+6xy+42x-40y+135=0 \\ 3x-2y+9=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x^2+9y^2-12xy+5x+3y+5=0 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6 \\ x-2y=3 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2+xy+x=10 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x-1} - \dfrac{x-y}{2y} = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{1}{4y^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x+y)^4 + 4(x+y)^2 - 117 = 0 \\ x - y = 25 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} (18x^2 + 18x + 18y - 17)(12x^2 - 12xy - 1) = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 45 \\ x + y = 5 \end{cases}$.

Dạng 3: HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI I

Dạng tổng quát: $\begin{cases} f(X;Y) = 0 \\ g(X;Y) = 0 \end{cases} \quad (*)$

Trong đó, hoán vị giữa X, Y thì biểu thức $f(X;Y); g(X;Y)$ không thay đổi.

Phương pháp: ➯ Đặt $\begin{cases} S = X + Y \\ P = X.Y \end{cases}$. Thay vào hệ (*) ta tìm được S, P.

➯ Khi đó, X, Y là nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$ (1).

Nhận xét:

➢ Do tính đối xứng của X, Y nên nếu phương trình (1) có các nghiệm $t_1;\ t_2$ thì hệ (*) có nghiệm $(t_1;\ t_2),(t_2;t_1)$.

➢ Cũng do tính đối xứng nên để hệ (*) có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là X=Y (thay vào hệ tìm tham số, sau đó thay vào hệ (*) để tìm điều kiện đủ).

➢ Do X, Y là nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$ nên điều kiện cần và đủ để hệ (*) có nghiệm là: Phương trình (1) có nghiệm trên tập giá trị của X, Y.

Bài tập: ***Giải các hệ phương trình sau:***

1. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + xy - y = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4-x^2y^2+y^4=13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=12 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=9 \end{cases}$

7.* $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x+y=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18 \\ x+y=12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+zx=-4 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$

12.* $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz-xz=7 \\ x^2+y^2+z^2=14 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2+x+y^2+y=18 \\ x(x+1)y(y+1)=72 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (x+y)(8+xy)=2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y+xy=\dfrac{7}{2} \\ x^2y+xy^2=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9 \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-y+\dfrac{x}{y}=3 \\ \dfrac{(x-y)x}{y}=2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x+xy+y=-7 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2+3(x+y)+y^2=28 \end{cases}$

22. $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x(x+2)(2x+y)=9 \\ x^2+4x+y=6 \end{cases}$

24. $\begin{cases} (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=49 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}+xy=11 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^5+y^5=1 \\ x^9+y^9=x^4+y^4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3xy-(x^2+y^2)=5 \\ 7x^2y^2-(x^4+y^4)=155 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$ 29. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y - \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$.

Dạng 3: HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI II

Hệ phương trình được gọi là đối xứng loại II khi thay X bởi Y hoặc thay Y bởi X thì hệ phương trình không thay đổi.

Dạng tổng quát: $\begin{cases} f(X;Y) = 0 \\ f(Y;X) = 0 \end{cases}$ (*)

Phương pháp: Nếu $f(X;Y)$ là đa thức thì thông thường hệ (*) được giải như sau:

Biến đổi (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(X;Y) - f(Y;X) = 0 \\ f(X;Y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X-Y)g(X;Y) = 0 \\ f(X;Y) = 0 \end{cases}$.

Bài tập: **Giải các hệ phương trình sau:**

1. $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x - 3y = \dfrac{4y}{x} \\ y - 3x = \dfrac{4x}{y} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^3 + 4x = y + \dfrac{3}{2} \\ y^3 + 4y = x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 5y + 4 \\ y^2 - 2x^2 = 5x + 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ 2y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 = x + 2y + 4 \\ y^2 = y + 2x + 4 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 \\ 2y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2 = x + y \\ y^2 = y + x \end{cases}$

13. $\begin{cases} xy + x^2 = 1 - y \\ yx + y^2 = 1 - x \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$ 15. $\begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases}$

Dạng 4: *HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP*

Hệ phương trình đại số đẳng cấp bậc hai theo x, y .

Dạng tổng quát: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$ (*)

Phương pháp:

Giải hệ khi x=0.

Khi $x \neq 0$, đặt $y = tx$ thế vào hệ (*), khử x được phương trình theo t.

Giải t, rồi tìm x, y.

Biến đổi: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x(tx) + c_1(tx)^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2x(tx) + c_2(tx)^2 = d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(a_1 + b_1t + c_1t^2) = d_1 \ (1) \\ x^2(a_2 + b_2t + c_2t^2) = d_2 \ (2) \end{cases}$.

Lập tỉ: $\dfrac{(1)}{(2)}$.

Bài tập: **Giải các hệ phương trình sau:**

1. $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x - y) = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 5 \\ \dfrac{y}{x} - \dfrac{2x}{y} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{xy} \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^3 - xy^2 + y^3 = 1 \\ 2x^3 - x^2y + y^3 = 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ x|x| + y|y| = -2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 5y^2 = 37 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 - 4xy + 2y^2 = 1 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^3 + 3x^2y + xy^2 + y^3 = 6 \\ 3y^3 + x^2y - 2xy^2 = 2 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 2x^2 + xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = -2 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$
12. $\begin{cases} y^3 - x^3 = 7 \\ 2x^2y + 3xy^2 = 16 \end{cases}$
13. $\begin{cases} y^3 - x^3 = 7 \\ 2x^2y + 3xy^2 = 16 \end{cases}$
14. $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 \\ 9x^2 + 11xy - 8y^2 = 13 \end{cases}$
15. $\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \end{cases}$