# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

*( trong đề thi và thi thử đại học)*

Bài viết được chia là các phần nhỏ sau :

**Phần 1:** Khái quát 3 câu bất đẳng thức trong đề thi năm 2013

**Phần 2:** Các bài toán 2 biết đối xứng và không đối xứng

**Phần 3:** Các bài toán 3 biến đối xứng 2 biến, 3 biến dồn về 1 biến rồi sử dụng đạo hàm – các bài toán tổng hợp, UCT

Bây giờ mình xin bắt đầu với một số ví dụ sau :

**VD1:** Cho $a,b,c \in [1,3], a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

Tìm GTLN của $P = (1 - \frac{b}{a})(2 + \frac{c}{a})$

**VD2:** Cho $a,b > 0$ và $a + 18b^2 = a^2 + 16b^3$

Tìm GTNN của $P = a + b + \frac{6}{ab}$

**VD3:** Cho $a,b,c > 0$ và $a^4 + b^4 + c^4 = 3$

Chứng minh rằng : $(ab)^5+(bc)^5+(ca)^5\le 3$

**VD4:** Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$

Tìm GTLN của $P=\dfrac{1}{1-ab}+\dfrac{1}{1-bc}+\dfrac{1}{1-ac}$

Hai ví dụ đầu tiên được lấy từ đề thi thử của trang web www.onluyentoan.vn và hai bài sau là những bất đẳng thức hết sức quen thuộc. Chúng ta hãy thôi bàn về độ khó của từng bài mà các cần quan tâm là hứng thú của mọi người khi bắt tay vào giải quyết chúng. Và phần lớn người ta sẽ thấy hứng thú hơn khi làm VD3 và VD4 hơn là hai bài đầu, đơn giản đó là những bài toán được phát biểu đơn giản, các biến đối xứng nhau, còn ở VD2 thậm chí ta còn không tìm được ngay đẳng thức xảy ra khi nào ???

**Phần I :** Chúng ta hãy điểm lại 3 câu trong đề thi 2013, trước hết là đề khối A

**VD5:** Cho $a,b,c>0,$ và $(a+c)(b+c)=4c$

Tìm GTNN của $P=\dfrac{32a^3}{(b+3c)^3}+\dfrac{32b^3}{(a+3c)^3}-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Bài làm :

Nhìn qua biểu thức và giả thiết thấy đây là biểu thức đối xứng giữa $a,b$ nên có 2 hướng đi, sẽ dồn về theo $c$ hoặc sử dụng bất đẳng thức cổ điển, dự đoán luôn đẳng thức khi $a=b=c$

Thấy biểu thức và giả thiết đồng bậc nên nếu ta chia cả tử và mẫu cho $c$, đặt $\dfrac{a}{c}=x,\dfrac{b}{c}=y$ ta sẽ được biểu thức 2 biến đối xứng , khi đó bài toán có vẻ đơn giản đi khá nhiều. Ta bắt tay vào làm

Từ giả thiết $\Rightarrow(\dfrac{a}{c}+1)(\dfrac{b}{c}+1)=4\Rightarrow x+y+xy=3$

Và $P=\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$

Áp dụng $u^3+v^3\ge\dfrac{(u+v)^3}{4}\Rightarrow P\ge 8(\dfrac{x}{y+3}+\dfrac{y}{x+3})^3-\sqrt{x^2+y^2}$

Nhận thấy $x,y$ nên khi ta đặt $\begin{cases}S=x+y\\ Q=xy\end{cases}$ thì $\begin{cases}S+Q=3\\ P\ge(S-1)^3-\sqrt{S^2+2S-6}\end{cases}$

Bây giờ ta chỉ cần đi tìm miền giá trị của $S$ rồi khảo sát hàm số đã cho

Từ giả thiết, áp dụng AM-GM ta có $3 = x + y + xy \le x + y + \dfrac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow S = x + y \ge 2$

Khảo sát $f(S)$ trên $[2,+\infty)$ ta có được $f(S) \ge f(2) = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow P \ge 1 - \sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c > 0$

Cùng ý tưởng trên ta có thể có nhiều bài toán tương tự trên như sau :

**VD6:**

Cho $a,b,c > 0$ và $a^2 + b^2 + 6c^2 = 4c(a+b)$

Tìm GTNN của $P = \dfrac{a^3}{b(a+c)^2} + \dfrac{b^3}{a(b+c)^3} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Bài làm:

Ý tưởng không có gì khác, $P_{\min} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c > 0$

**VD7**

Cho $a,b,c \in [1,2]$.

Tìm GTNN của $P = \dfrac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$

Bài làm

Trước hết ta dự đoán $P_{\min} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = b = 1 \end{cases}$ do $a,b$ đối xứng và mẫu số có đại lượng $c$, khi đó nếu chia cả tử và mẫu cho $c$, đặt $\dfrac{a}{c} = x, \dfrac{b}{c} = y$

$$\Rightarrow P = \frac{(x+y)^2}{1 + 4(x+y+xy)}, x, y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $6(x+y)^2 \ge 1 + 4(xy + x + y)$

Vì đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{2}$ nên ta có thể nhóm dễ dàng như sau

$$2(x+y)^2 + 2 \ge 4(x+y) \Rightarrow 2(x+y)^2 + 3 \ge 4(x+y) + 1$$

Do đó chỉ cần chứng minh $6(x+y)^2+8xy \ge 2(x+y)^2+3$, luôn đúng do $x,y \ge \frac{1}{2}$

**VD8: Đề B-2013**

Cho $a,b,c>0$. Tìm GTLN của $P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$

Bài làm : Sử dụng AM-GM ta có được $P \le \frac{4}{\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{3}+4}}-\frac{9}{\frac{2(a+b+c)^2}{3}}$

Đến đây khảo sát $f(t), t=\frac{(a+b+c)^2}{3}$ ta có đpcm

Những bài toán kiểu thế ta sẽ xét ở phần sau

**VD9: Đề D-2013**

Cho $x,y>0$ thỏa mãn $xy \le y-1$

Tìm GTLN của $P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}$

Bài làm

Nhận thấy $P$ là biểu thức đồng bậc và khi nhìn $P$ ta cũng khó có thể dung bất đẳng thức gì để đánh giá được, cũng khó dự đoán luôn đẳng thức xảy ra

Chia cả tử và mẫu cho $y$, đặt $t=\frac{x}{y} \Rightarrow P=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$

Bây giờ sử dụng giả thiết tìm miền giá trị của $t$ rồi khảo sát hàm số

Áp dụng AM-GM ta có $xy \le y-1 \Rightarrow \frac{x}{y} \le \frac{1}{y}-\frac{1}{y^2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow t \in (0,\frac{1}{4}]$

Đẳng thức xảy ra khi $y=2$

Đến đây bài toán đã dần được giải quyết, công việc chỉ là khảo sát hàm số $f(t)$ trên $(0,\frac{1}{4}]$

Một số ví dụ tương tự sau :

**VD10:** Cho $x,y>0$ và $2y^2(11x^2+1)=8x^4+6y^4+1$

Tìm GTNN của $P = \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)(\sqrt{4x^2+y^2}+y)}$

Bài làm

Ý tưởng đồng bậc, sử dụng giả thiết để tìm miền giá trị của $t = \dfrac{x}{y}$

Từ giả thiết ta có $2y^2(11x^2+1) = 8x^4+6y^4+1 \Rightarrow 8t^4 - 22t^2 + 6 = \dfrac{2}{y^2} - \dfrac{1}{y^4} \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \le t^2 \le \dfrac{5}{2}$

Xét $P = f(t) = \dfrac{t^2}{(t^2+1)(\sqrt{4t^2+1}+1)}$, đặt $t^2 = a \Rightarrow \begin{cases} a \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{2}\right] \\ f(t) = f(a) = \dfrac{a}{(a+1)(\sqrt{4a^2+1}+1)} \end{cases}$

Khảo sát ta có được $f(t) = f(a) \ge \dfrac{\sqrt{2}-1}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

**VD11:**

Cho $a,b > 0$ và $a^2 + 3b^2 + 1 = b(3a+2)$

Tìm GTNN của $P = \dfrac{a+2b}{\sqrt{a^2+3b^2}} - \dfrac{2a^2+ab+8b^2}{2ab+b^2}$

**VD12**

Cho $a,b > 0$ và $a \ge ab + 1$

Tìm GTLN của $P = \dfrac{3ab}{a^2+b^2}$

Như đã thấy cả 3 bài thi ĐH năm vừa rồi đều có thể xử lí theo 1 phương pháp chung, đánh giá đưa về 1 biến, tìm miền giá trị rồi khảo sát hàm số tìm cực trị, và đây cũng là xu hướng ra đề thi thử của các trường, cũng như đề thi thật hằng năm, ngoài việc dung các bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarzt để đánh giá các biến, chúng ta cũng cần sử dụng 1 công cụ rất hữu hiệu trong chương trình THPT, đó chính là đạo hàm, và đây cũng là con đường chính trong lời giải ở các ví dụ trong bài viết.

**Phần II :** Các bài toán 2 biến đối xứng và không đối xứng

Ở các bài toán 2 biến đối xứng, ta có phương pháp dùng nhiều đó là đưa về dạng $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, do tính đối xứng nên ta luôn luôn đưa biểu thức về dạng biểu diễn như thế

Đến ngay với đề khối D-2012

**VD12:** Cho $x, y > 0$ và $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \le 32$

Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-1)$

Bài làm

Từ giả thiết $\Rightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \le 0 \Rightarrow x+y \le 8$

Nhận thấy $A$ không thể đạt GTNN tại tâm $x = y = 4$, ta viết lại như sau

$$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 3xy + 3$$

Áp dụng AM-GM ta có $3xy \le \dfrac{3(x+y)^2}{4} \Rightarrow A \ge (x+y)^3 - 3(x+y) - \dfrac{3(x+y)^2}{4} + 3$

Đến đây mọi chuyện đã rõ, đặt $t = x + y \Rightarrow t \in (0,8] \Rightarrow A \ge f(t) = t^3 - 3t - \dfrac{3t^2}{4} + 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = ...$

**VD13:**

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $3xy = x + y + 1$.

Tìm GTLN của $A = \dfrac{3x}{y(x+1)} + \dfrac{3y}{x(y+1)} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}$

Bài làm

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

Khi gặp những bài toán này, khi đọc xong giả thiết ta suy ra luôn điều kiện của $S, P$

Ta có $3xy = x + y + 1 \ge 2\sqrt{xy} + 1 \Rightarrow xy \ge 1$, hiển nhiên $x + y \ge 2$

Bây giờ ta sẽ đưa biểu thức về dạng hàm số chứa biến $P$ ( hoặc $S$ ), sử dụng giả thiết, quy đồng ta được $A = \dfrac{5P-1}{4P^2} = f(P)$

Từ đó ta có được $A = f(P) \le 1$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

**VD14:** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{6}{xy} = x^4 + y^4 + 4$

Tìm GTNN của $A = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{3-2xy}{5-x^2-y^2}$

Bài làm

Đối xứng 2 biến, từ giả thiết ta có $\frac{6}{xy} = x^4 + y^4 + 4 \ge 2x^2y^2 + 4 \Rightarrow xy = P \le 1$

Dự đoán luôn $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$

Đến đây ta có thể quy đồng , đưa về dạng tổng tích, từ giả thiết ta có

$$x^4 + y^4 + 4 = \frac{6}{xy} \Leftrightarrow (x+y)^4 - 6x^2y^2 - 4xy(x^2+y^2) + 4 = \frac{6}{xy}$$

Đã đưa được dạng tổng tích nhưng nếu thế $S$ theo $P$ hay ngược lại ta sẽ được 1 biểu thức rất cồng kềnh, vì thế ta phải sử dụng các bất đẳng thức phụ để làm đơn giản biểu thức đã cho. Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau

$$\frac{1}{1+U^2} + \frac{1}{1+V^2} \ge \frac{2}{1+UV} \text{ với } UV \ge 1$$

Hoặc $\frac{1}{1+U^2} + \frac{1}{1+V^2} \le \frac{2}{1+UV}$ với $UV \le 1$

Khi đó ta có 2 trường hợp sau :

TH1: $P = xy \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, khi đó $\sqrt{2x.2y} \ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức trên $\Rightarrow \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} \ge \frac{2}{1+2\sqrt{xy}} \ge \frac{2}{3}$

Và $\frac{3-2xy}{5-x^2-y^2} \ge \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x-y)^2 + 4(1-xy) \ge 0 \Rightarrow P \ge \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

TH2: $P = xy \in (0, \frac{1}{4}) \Rightarrow \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} > 1 \Rightarrow P > 1$

Kết hợp lại ta được $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$

Trở lại với bất đẳng thức phụ trên, đó là phát biểu khá đơn giản nhưng rất hay và quan trọng trong những bài đối xứng 2 biến, thậm chí 3 biến có dạng phân thức như trên. Ta có 1 số ví dụ áp dụng sau :

**VD15:** Cho $a,b,c \in [1,9], a \ge b, a \ge c$

Tìm GTNN của $P = \dfrac{a}{a+2b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$

**VD16: ĐH Vinh lần 2-2013**

Cho $x,y > 0$ thỏa mãn $3xy + 3 = x^4 + y^4 + \dfrac{2}{xy}$

Tìm GTLN của $P = x^2y^2 + \dfrac{16}{x^2 + y^2 + 2}$

**VD17:** Cho $x,y > 0$ thỏa mãn $x^4 + y^4 + \dfrac{1}{xy} = xy + 2$

Tìm GTNN của $P = \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{2}{1+y^2} - \dfrac{3}{1+2xy}$

Xét đến dạng toán khác sau :

**VD18:** :

Cho $x,y \in \mathbb{R}$ và $x + y = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} + 1$

Tìm GTNN và GTLN của $P = \dfrac{x}{2}(x-y) + \dfrac{y}{2}(y-x) + \dfrac{2(1+xy\sqrt{xy})}{\sqrt{x+y}}$

Bài làm

Viết $P = \dfrac{(x+y)^2}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{x+y}}$

Bây giờ chỉ cần tìm miền giá trị của $t = x + y$ rồi khảo sát $f(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{t}}$

Sử dụng Cauchy-Schwarzt ta có

$$x + y - 1 = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} \le \sqrt{(2^2+1^2)(x-2+y+1)} \Rightarrow 1 \le t = x + y \le \sqrt{6}$$

Khảo sát hàm số ta được $\begin{cases} P_{\min} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow (x,y) = (2,-1) \\ P_{\max} = 18 + \dfrac{2}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow (x,y) = (6,0) \end{cases}$

**VD19:** Cho $a,b \in \mathbb{R}$ và $a + b - 1 = \sqrt{2a-4} + \sqrt{b+1}$

Tìm GTLN và GTNN của $P=(a+b)^2-\sqrt{9-a-b}+\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$

Bài làm

Ta cần tìm miền giá trị của $t=a+b$

Áp dụng Cauchy-Schwarzt ta có

$a+b-1=\sqrt{2a-4}+\sqrt{b+1}=\sqrt{2}\sqrt{a-2}+\sqrt{b+1}\le\sqrt{3(a+b-1)}\Rightarrow 1\le t=a+b\le 4$

Khảo sát hàm số ................

**VD20:**

Cho $x,y>0,x^2+y^2=2$

Chứng minh rằng $P=\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{9y^2}{x+2y}\ge 4$

Bài làm

Áp dụng Cauchy-Schwarzt ta có $P\left[x+(x+2y)\right]\ge(\dfrac{x^2}{y}+3y)^2$

Lại có $\dfrac{x^2}{y}+3y=\dfrac{2-y^2}{y}+3y=2(y+\dfrac{1}{y})\ge 4$

$$x+(x+2y)=2(x+y)\le 2\sqrt{2(x^2+y^2)}=4$$

Vậy ta có đpcm, đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$

Cách 2: Bất đẳng thức tương đương $x^3(x+2y)+9y^4\ge 4y^2(x+2y)$

Ta sẽ tạo ra bất đẳng thức dưới dạng đồng bậc, hay viết lại thành

$$x^3(x+2y)+9y^4\ge 2y^2(x+2y)\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}\Rightarrow(t-1)^2(t^6+6t^5+14t^4+12t^3+43t^2+66t+49)\ge$

Vậy ta cũng có đpcm

Rõ ràng cách số 2 không hay và tự nhiên bằng cách số 1 ☺

Ta có 1 số ví dụ áp dụng sau:

**VD21:ĐH Vinh lần 4-2013**

Cho $a,b>0,a^2+2b=12$.

Tìm GTNN của $P=\dfrac{4}{a^4}+\dfrac{4}{b^4}+\dfrac{5}{8(a-b)^4}$

**VD22:** Cho $a,b>0, a+2b=ab$

Tìm GTNN của $P=\frac{a^2}{8b+4}+\frac{b^2}{a+1}$

**VD23:**

Cho $x,y\in\mathbb{R}, 2x+y=4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2y+8}$

Tìm GTLN và GTNN của $P=2x+y-16$

Kết thúc phần 2, ta đến với phần 3, phần quan trọng nhất, trước hết xét 1 số ví dụ sau

**VD24:** Cho $a,b,c>0, a^2+b^2+c^2=1$

Tìm GTLN của $P=(1+2a)(1+bc)$

**VD25:** Cho $a,b,c\in[1,4], a+b+2c=8$

Tìm GTLN của $P=a^3+b^3+5c^3$

Bài làm: Nhìn 2 ví dụ trên, ta rút ngay được nhận xét: có 2 biến có vai trò như nhau ( và dự đoán cực trị đạt được khi 2 biến đó bằng nhau ) trong giả thiết và biểu thức, đúng như tiêu chí của phương pháp đạo hàm, ta sẽ tìm cách đưa biểu thức về dạng hàm số của biến còn lại rồi tiến hành khảo sát

Với ví dụ 24, chỉ cần áp dụng AM-GM ta có

$$P=(1+2a)(1+bc)\le(1+2a)(1+\frac{b^2+c^2}{4})=(1+2a)(1+\frac{1-a^2}{4})=f(a)$$

Khảo sát với $a\in(0,1)$ ta có $f'(a)=\frac{-6a^2-2a+6}{2}=0\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{37}-1}{6}$

Lập bảng biến thiên ta được $P\le f(a)\le f(\frac{\sqrt{37}-1}{6})=...$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=\frac{\sqrt{37}-1}{6} \\ b=c \\ a^2+b^2+c^2=1 \end{cases}$

Ở ví dụ 25, dự đoán $P_{\max}=137\Leftrightarrow(a,b,c)=(1,1,3)$, và ta sẽ đưa về dạng $P\le f(c)$

Xử lí đại lượng $a^3+b^3$ như sau $P=(a+b)^3-3ab(a+b)+2c^3=(8-2c)-3ab(8-2c)+5c^3$

Đến đây ta không thể đánh giá $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(8-2c)^2}{4}$ vì khi đó

$P\ge(8-2c)^3-\frac{3(8-2c)^2}{4}(8-2c)+5c^3$, không thể tìm được GTLN

Để ý $(a-1)(b-1)\ge0\Rightarrow ab\ge a+b-1\Rightarrow -3ab\le -3(a+b-1)$

$\Rightarrow P\le(8-2c)^3-3(7-2c)(8-2c)+5c^3 = f(c)$

Từ giả thiết ta có $c\in[1,3]$, khảo sát ta được $f(c)\le f(3)=137\Rightarrow P\le137$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1, c=3$

**VD26**

Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$.

Tìm GTNN của $P=\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{2}{(2c+1)\sqrt{6c+3}}$

Bài làm

Nhìn $P$ đối xứng $a,b$ nên ta sẽ viết dưới dạng $P\ge f(c)$

Thấy đại lượng quen thuộc $\frac{1}{1+U^2}+\frac{1}{1+V^2}$ nên nếu

$ab\ge\frac{1}{4}\Rightarrow 2a.2b\ge1\Rightarrow\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}\ge\frac{2}{2\sqrt{ab}+1}=\frac{2\sqrt{c}}{2+\sqrt{c}}\ge\frac{c}{2c+1}$

Khi đó $P\ge\frac{c}{2c+1}+\frac{2}{(2c+1)\sqrt{6c+3}}$, $P\ge\frac{8}{9}\Leftrightarrow(c-1)^2(6c-33)\le0$, luôn đúng

Bây giờ ta cần xét nốt trường hợp $ab\le\frac{1}{4}$

Khi đó dễ thấy $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}>1>\frac{8}{9}$

Vậy $P_{\min}=\frac{8}{9}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Trong những bài toán 3 biến có 2 biến bằng nhau, công việc là dồn về biến còn lại, và khi đó việc sử dụng các bất đẳng thức phụ để đánh giá là 1 việc rất quan trọng, giúp ta dồn biến nhanh hơn và hiệu quả hơn. Chúng ta đến với ví dụ tiếp sau

**VD27**

Cho $x, y, z \geq 0, \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} = 5$

Tìm GTLN của $P = 2x^3 + y^3 + z^3$

Bài làm

Ta sẽ dung bất đẳng thức phụ sau $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b}$

Đẳng thức xảy ra khi $ab = 0$

Khi đó $\sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} \geq 1 + \sqrt{1+2y+2z}$, đẳng thức xảy ra khi $yz = 0$

$\Rightarrow 5 = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} \geq 1 + \sqrt{1+2y+2z} + \sqrt{1+x^2} \geq 2 + \sqrt{1+x^2+2y+2z}$

$\Rightarrow x^2 + 2(y+z) \leq 8$

Ở trên ta đã sử dụng điều kiện $yz = 0$ nên khi đó $y^3 + z^3 = (y+z)^3$

Xét $P = 2x^3 + y^3 + z^3 \leq 2x^3 + (y+z)^3 \leq 2x^3 + (\dfrac{8-x^2}{2})^3 = f(x)$

Khảo sát hàm số với $x \in \left[0, 2\sqrt{2}\right] \Rightarrow f(x) \leq f(0) = 64 \Rightarrow P \leq 64$

Đẳng thức xảy ra khi $(x, y, z) = (0, 4, 0) = (0, 0, 4)$

Rõ ràng ví dụ 27 khó hơn 2 ví dụ đầu vì phải sử dụng bất đẳng thức phụ khá hay và dự đoán luôn được đẳng thức xảy ra khi nào ?

**VD28:** Chuyên **Vĩnh Phúc lần 1-2013**

Cho $x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Tìm GTLN của $P = \sqrt{3x^2 + 7y} + \sqrt{5y + 5z} + \sqrt{3x^2 + 7z}$

Bài làm

Cách 1: Trước hết ta vẫn sẽ tìm cách đưa về dạng $P \leq f(x)$

Áp dụng AM-GM ta có ngay

$$P \le 3\sqrt{\frac{6x^2+12(y+z)}{3}} \le 3\sqrt{\frac{6x^2+12\sqrt{2(y^2+z^2)}}{3}} = 3\sqrt{\frac{6x^2+12\sqrt{6-2x^2}}{3}} \le 3\sqrt{10}$$

Cách 2: Viết $P \le f(t)$ với $t = y+z$

Áp dụng AM-GM ta có

$$P \le \sqrt{5(y+z)} + 2\sqrt{\frac{6x^2+7(y+z)}{2}} = \sqrt{5(y+z)} + \sqrt{14(y+z)+2\left[18-6(y^2+z^2)\right]}$$

Lại có $y^2+z^2 \ge \frac{(y+z)^2}{2}$ nên viết theo $t$ ta có

$$P \le f(t) = \sqrt{5t} + \sqrt{-6t^2+14t+36}, 0 \le t = y+z \le \sqrt{2(y^2+z^2)} \le \sqrt{2(x^2+y^2+z^2)} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{t}} + \frac{7-6t}{\sqrt{-6t^2+14t+36}} = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow f(t) \le f(2) = 3\sqrt{10} \Rightarrow P \le 3\sqrt{10}$

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z) = (1,1,1) = (-1,1,1)$

**VD29: Ngu**

Cho $a,b,c > 0, a^3+b^3 = c(c-1)$

Tìm GTNN và GTLN của $P = \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Một số bài toán đối xứng 3 biến sử dụng đạo hàm

**VD30: Đề Toán học tuổi trẻ**

Cho $a,b,c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

Tìm GTNN và GTLN của $P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Bài làm

Trước hết dự đoán $P_{\min} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow (a,b,c) = (\frac{1}{3},1,3)$ và hoán vị

Viết $P=\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{c}{b}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{c}}$, có đại lượng $\dfrac{1}{1+U^2}+\dfrac{1}{1+V^2}$ nên nếu $\dfrac{b}{a}.\dfrac{c}{b}\geq 1\Leftrightarrow c\geq a$

Thì $\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{c}{b}}\geq\dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{c}{a}}}\Rightarrow P\geq\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{c}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{c}{a}}}$, khi đó $P\geq f(t),t=\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

Ta bắt đầu làm, do vai trò của $a,b,c$ như nhau nên ta có thể giả sử $c=\max$

$$\Rightarrow P\geq\frac{2}{1+t}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{t^2}}=\frac{2}{1+t}+\frac{t^2}{t^2+1},t=\sqrt{\frac{c}{a}}\in[1,3]$$

Khảo sát ta được $P\geq f(t)\geq f(3)=\dfrac{7}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a,b,c\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]\\ t=\sqrt{\dfrac{c}{a}}=3\\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}\end{cases}\Leftrightarrow(a,b,c)=(\dfrac{1}{3},1,3)$ và hoán vị

Công việc tìm GTLN hoàn toàn tương tự khi giả sử $c=\min$

$\Rightarrow\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{c}{b}}\leq\dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{c}{a}}}$, do $\Rightarrow\dfrac{b}{a}.\dfrac{c}{b}=\dfrac{c}{a}\leq 1$

**VD31:** Cho $a,b,c\geq 0$ và $a+b+c=1$

Chứng minh rằng $a(b-c)^4+b(c-a)^4+c(a-b)^4\leq\dfrac{1}{12}$

Bài làm

Những bài toán kiểu này thường có đẳng thức khi 1 biến bằng 0

Ta làm như sau: Do vai trò của $a,b,c$ như nhau nên ta có thể giả sử $a\geq b\geq c\geq 0$

$$\Rightarrow P\leq a(b+c)^4+ba^4+ca^4=a(b+c)^4+a^4(b+c)$$

Đặt $t=b+c\Rightarrow a+t=1$ và $P\leq at^4+a^4t=at(a^3+b^3)=at(1-3at)$

Đặt $x = at \le \frac{(a+t)^2}{4} \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], P \le f(x) = x(1-3x)$

Ta có luôn $P \le f(x) \le f(\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c) = (\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}, 0)$

**VD32: Chuyên Vĩnh Phúc lần 5**

Cho $a,b,c > 0, a+b+c = 3$

Tìm GTLN của $P = (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$

Bài làm

Do điều kiện bài toán nên ta dự đoán $P_{\max} = 12 \Leftrightarrow (a,b,c) = (2,1,0)$

Giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$, suy ra

$$P \le (a^2 - ab + b^2)a^2b^2 = \left[(a+b)^2 - 3ab\right]a^2b^2 \le \left[(a+b+c)^2 - 3ab\right](ab)^2 = (9-3ab)(ab)^2$$

Đặt $t = ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{(a+b+c)^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow t \in \left[0, \frac{9}{4}\right]$

Khảo sát hàm số $\Rightarrow f(t) \le f(2) = 12 \Rightarrow P \le 12$

Vậy ta có đpcm

**VD33: Đề Toán học tuổi trẻ**

Cho $a,b,c > 0, a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Tìm GTNN của $P = \frac{16}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 1}} + \frac{ab+bc+ca+1}{a+b+c}$

Gợi ý: Chứng minh $a+b+c \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Một số bài tập khác

**VD34**: Cho $a,b,c \in [2,4]$

Tìm GTLN của $P=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}{abc(a+b+c)}$

**VD35: Đề Toán học tuổi trẻ**

Cho $a,b,c\in\mathbb{R}, a+b+c=1$

Chứng minh rằng $\dfrac{-\sqrt{3}}{18}\le(a-b)(b-c)(c-a)\le\dfrac{\sqrt{3}}{18}$

Một số bài tập tổng hợp

**VD36: Đề Toán học tuổi trẻ + Chuyên ĐH Vinh**

Cho $x,y,z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 3y$

Tìm GTNN của $P=\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{4}{(y+2)^2}+\dfrac{8}{(z+3)^2}$

Bài làm

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức phụ sau $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{8}{(a+b)^2}$

Khi đó $\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{4}{(y+2)^2}=\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(\frac{y}{2}+1)}\ge\dfrac{8}{(x+\frac{y}{2}+2)^2}$

$\Rightarrow P\ge\dfrac{8}{(x+\frac{y}{2}+2)^2}+\dfrac{8}{(z+3)^2}\ge\dfrac{64}{(x+\frac{y}{2}+z+5)^2}$

Bây giờ ta cần tìm $x+\dfrac{y}{2}+z\le A$ mà vẫn đảm bảo $\begin{cases}1+x=\dfrac{y}{2}+1\\ x+\dfrac{y}{2}+2=z+3\\ x^2+y^2+z^2=3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z=1\\ y=2\end{cases}$

Xét $2A=2x+y+2z\le x^2+1+y+z^2+1\le y-y^2+2+y=-(y-2)^2+6\le 6$

$\Rightarrow P\ge\dfrac{64}{(3+5)^2}\ge 1$, đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x=z=1\\ y=2\end{cases}$

Ta cũng tham khảo cách dồn về biến $y$ rất hay sau

Cách 2: Theo

Áp dụng AM-GM và Cacuchy-Schwarzt ta có $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\geq\frac{27}{(x+z+4)^2}$

Từ giả thiết $3y\geq x^2+y^2+z^2\geq y^2+\frac{(x+z)^2}{2}$

$\Rightarrow 3y+4\geq y^2+\frac{(x+z)^2}{2}+4\geq y^2+\frac{(x+z+4)^2}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\geq\frac{9}{2(3y+4-y^2)}\Rightarrow P\geq f(y)=\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{9}{2(3y+4-y^2)}$

Xét $f'(y)=\frac{(y-2)(2y^3+181y^2+400y+236)}{2\left[(y-4)(y+1)(y+2)\right]^2}$

$\Rightarrow P\geq f(y)\geq f(2)=1$

Cách 3: Theo

Sử dụng Cauchy-Schwarzt ta có $(1+x)^2\leq 2(1+x^2),(z+3)^2\leq 4(z^2+3)$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\geq\frac{1}{2x^2+2}+\frac{2}{z^2+3}=\frac{1}{2x^2+2}+\frac{1}{z^2+3}+\frac{1}{z^2+3}\geq\frac{9}{2(x^2+z^2)+8}$

$\Rightarrow P\geq\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{9}{2(3y-y^2)+8}$

Ta có $P\geq 1\Leftrightarrow (y-2)^2(2y^2+10y+9)\geq 0$

Vậy cả 3 cách làm đều cho ta đáp số đúng !!!

**VD37:**

Cho $a,b,c>0$

Tìm GTNN của $P=\frac{1}{a+6\sqrt{ab}+4\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{a+b+c}}$

Bài làm

Nhìn biểu thức ta dự đoán ngay $P \ge (t), t = \sqrt{a+b+c}$

Do đó ta phải viết được $a + 6\sqrt{ab} + 4\sqrt{bc} \le x(a+b+c)$, do các hạng tử đồng bậc

Áp dụng AM-GM ta có $6\sqrt{ab} = 2\sqrt{3a.3b} \le 3a + 3b$

$4\sqrt{bc} = 2\sqrt{b.4c} \le b + 4c$

Cộng 2 bất đẳng thức trên lại ta có đpcm

$$\Rightarrow P \ge \frac{1}{4(a+b+c)} - \frac{1}{\sqrt{a+b+c}} = (\frac{1}{2\sqrt{a+b+c}} - 1)^2 - 1 \ge -1$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 3a = 3b \\ b = 4c \\ t = \sqrt{a+b+c} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c) = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{36})$

**VD38:**

Cho $x, y, z > 0, x + y + 1 = z$

Tìm GTNN của $P = \dfrac{x^3}{x+yz} + \dfrac{y^3}{y+xz} + \dfrac{z^3}{z+xy} + \dfrac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$

Bài làm

Dễ thấy vai trò $x, y$ là như nhau nên ta sẽ viết $P \ge (z)$

Từ giả thiết, để ý $x + y + 1 = z \Rightarrow (x+1)(y+1) = z + xy \le \dfrac{(x+y+2)^2}{4} = \dfrac{(z+1)^2}{4}$

$$\Rightarrow P \ge \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} + \frac{z^3}{\frac{(z+1)^2}{4}} + \frac{14}{(z+1).\frac{z+1}{2}}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2}$$

Bây giờ cần đánh giá $\dfrac{x^3}{x+yz} + \dfrac{y^3}{y+zx}$ theo $z$

Áp dụng Cauchy-Schwarzt ta có

$$\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx}=\frac{x^4}{x^2+xyz}+\frac{y^4}{y^2+xzy}\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz}\ge\frac{x^2+y^2}{1+z}$$

Mà $\frac{x^2+y^2}{1+z}\ge\frac{(x+y)^2}{2(1+z)}=\frac{(z-1)^2}{2(1+z)}$ nên $P\ge\frac{(z-1)^2}{2(1+z)}+\frac{4z^3}{(z+1)^2}+\frac{28}{(z+1)^2}=\frac{9z^3-z^2-z+57}{2(z+1)^2}=f(z)$

Đặt $g(z)=2f(z)\Rightarrow g'(z)=\dfrac{(3z-5)(3z^3+\frac{51z^2}{3}+37z+23)}{(z+1)^4}$

$\Rightarrow f(z)\ge f(\frac{5}{3})=\frac{53}{8}\Rightarrow P\ge\frac{53}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

**VD39: Chuyên Lê Hồng Phong**

Cho $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2\le 2(x+y+z)-2xy$

Tìm GTNN của $P=x^2+y^2+2z+\dfrac{40}{\sqrt{y+z+1}}+\dfrac{40}{\sqrt{z+3}}$

Bài làm: Ta hi vọng $y+z+1=x+3\Leftrightarrow y+z=x+2$ và $y+z+1,x+3$ đều là số chính phương để $P$ nhận giá trị hữu tỉ

Sử dụng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b},\sqrt{a}+\sqrt{b}\le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ ta có

$$\frac{40}{\sqrt{y+z+1}}+\frac{40}{\sqrt{x+3}}\ge\frac{160}{\sqrt{y+z+1}+\sqrt{x+3}}\ge\frac{160}{2\sqrt{\frac{y+z+1+x+3}{2}}}=\frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+4}}$$

Đến đây ta có ý tưởng đưa về biến $t=x+y+z$

Chú ý giả thiết $2(x+y+z)\ge(x+y)^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{2}\Rightarrow x+y+z\le 4$

Khi đó dự đoán dấu bằng $\begin{cases}x+2=y+z\\x+y+z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y+z=3\end{cases}$

Giải quyết $x^2+y^2+2z$ như sau $x^2+y^2+2z=x^2+1+y^2+1+2z-2\ge 2(x+y+z)-2$

$$\Rightarrow P\ge 2(x+y+z)-2+\frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+4}}=2(x+y+z+4)-10+\frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+4}}$$

Đặt $t=\sqrt{x+y+z+4}\Rightarrow t\in(2,2\sqrt{2}\,]$

Khảo sát hàm số $\Rightarrow f(t)\ge f(2\sqrt{2})=46$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1, z=2$

**VD40: Đề Toán học tuổi trẻ**

Cho $x,y,z\in\mathbb{R}, x^2+y^2+z^2=1$

Tìm GTNN của $P=(xy+yz+2xz)^2-\dfrac{8}{(x+y+z)^2-xy-yz+2}$

Bài làm

Viết lại $P=(xy+yz+2xz)^2-\dfrac{8}{3+xy+yz+2xz}$

Đặt $xy+yz+2xz=t\Rightarrow P=f(t)=t^2-\dfrac{8}{t+3}$

Ta cần tìm miền giá trị của $t$

Do $(x+y+z)^2+(x+z)^2+y^2\ge 0\Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+2xz)\ge 0\Rightarrow t\ge -1$

Và $(2-\sqrt{3})x^2+\dfrac{y^2}{2}\ge 2xy.\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$

$(2-\sqrt{3})z^2+\dfrac{y^2}{2}\ge 2yz.\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$

$(\sqrt{3}-1)x^2+(\sqrt{3}-1)z^2\ge 2xz.(\sqrt{3}-1)$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta được $t\le\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

Khảo sát hàm số ta được $P=f(t)\ge f(-1)=-3$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y+z=y=x+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$

Nhận xét: Việc tìm max của $t$ ở trên là không cần thiết, nhưng để cho đầy đủ và chắc chắn ta nên tìm cả chặn trên và chặn dưới của biến

**VD41: Đề**

Cho $a,b,c>0, a+b+c=1$

Tìm GTNN của $P=\frac{1}{2(2a+1)^2}+\frac{1}{3+9b}+\frac{1}{6+36c}$

Bài làm

Ý tưởng đưa về biến $a$ theo bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{3+9b}+\frac{1}{6+36c}=\frac{4}{12+36b}+\frac{1}{6+36c}\geq\frac{(2+1)^2}{12+36b+6+36c}=\frac{1}{6-4a}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{2}{12+36b}=\frac{1}{6+36c}\Leftrightarrow b=2c$

Khi đó $P\geq\frac{1}{2(2a+1)^2}+\frac{1}{6-4a}=f(a)$

Xét $f'(a)=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow f(a)\geq f(\frac{1}{2})=\frac{3}{8}\Rightarrow P\geq\frac{3}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$

**VD42: Đề chuyên Lào Cai**

Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+1=z$

Tìm GTLN của $P=\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}$

Bài làm

Bất đẳng thức đối xứng $x,y$ nên $P_{\max}\Leftrightarrow(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2\geq kx^3y^3$

Sử dụng giả thiết ta có $P=\dfrac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}$

Sử dụng AM-GM ta có $P\le\dfrac{x^3y^3}{4xy.(x+1)^3(y+1)^3}=\dfrac{x^2y^2}{4(x+1)^3(y+1)^3}$

Ta có $x+1=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+1\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{4}}\Rightarrow (x+1)^3\ge\dfrac{27x^2}{4}$

Tương tự ta có được $(y+1)^3\ge\dfrac{27y^2}{4}$

$P_{\min}=\dfrac{4}{729}\Leftrightarrow (x,y,z)=(2,2,5)$

**VD43:**

Cho $x,y,z>0, x+y+2=z$

Tìm GTLN của $P=\dfrac{x^3y^3}{(2x+yz)(2y+xz)(2z+xy)^2}$

**VD44:**

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $3b^2c^2+a^2=2(a+bc)$

Tìm GTNN của $P=\dfrac{2a^2-2a+5}{bc}+\dfrac{4}{(a+b)^2}+\dfrac{4}{(a+c)^2}$

Bài làm

Ta sẽ viết $P\ge f(a)$

Từ giả thiết ta có $a^2-2a=2bc-3b^2c^2\le -1\Rightarrow bc\le 1$

Bây giờ sử lí đại lượng $\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(a+c)^2}$ theo $bc,a$

Nếu $b=c\Rightarrow\dfrac{1}{(a+b)^2}=\dfrac{1}{(a+c)^2}=\dfrac{1}{(a+\sqrt{bc})^2}\Rightarrow\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(a+c)^2}=\dfrac{2}{(a+\sqrt{bc})^2}$, ta hi vọng bất đẳng thức đó đúng, nhưng rất tiếc lại là 1 bất đẳng thức sai

Viết $\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}.\frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2}$ và $\frac{1}{(a+c)^2}=\frac{1}{a^2}.\frac{1}{(1+\frac{c}{a})^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2}+\frac{1}{(1+\frac{c}{a})^2}\right]$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ $\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\geq \frac{1}{1+xy}, \forall x,y>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2}+\frac{1}{(1+\frac{c}{a})^2}\right]\geq \frac{1}{a^2}.\frac{1}{1+\frac{bc}{a^2}}=\frac{1}{a^2+bc}$$

Vậy $P\geq \frac{2a^2-2a+5}{bc}+\frac{4}{a^2+bc}\geq 2a^2-2a+5+\frac{4}{a^2+1}$, do $bc\leq 1$

Đến đây ta có thể khảo sát hàm số hoặc làm như sau : để viết được như trên ta đã gián tiếp sử dụng điều kiện $a=bc=1$, nên nếu cách làm đúng thì $f(a)\geq f(1)=7$

Ta sẽ chứng minh $2a^2-2a+5+\frac{4}{a^2+1}\geq 7 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(a^2+a+1)}{a^2+1}\geq 0$

Vậy ta có đpcm

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

**VD45:**

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+(a+c)^2+(b+c)^2=8$

Tìm GTLN của $P=\frac{a(b+c)^2}{a+c}+\frac{b(a+c)^2}{b+c}-\frac{1}{c}$

Bài làm: Ý tưởng dồn về khảo sát $P\leq f(c)$

Áp dụng bất đẳng thức sau $\frac{(x+y)^2}{u+v}\leq \frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v}$

$$\Rightarrow \frac{(b+c)^2}{a+c} \le \frac{b^2}{a} + c \Rightarrow \frac{a(b+c)^2}{a+c} \le b^2 + ac$$

Tương tự ta có $\frac{a(b+c)^2}{a+c} \le b^2 + ac$

$\Rightarrow P \le a^2 + b^2 + c(a+b) - \frac{1}{c} = 4 - c^2 - \frac{1}{c} = f(c)$, do giả thiết

Đến đây có thể khảo sát hoặc áp dụng luôn AM-GM ta có

$$c^2 + \frac{1}{c} = c^2 + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \Rightarrow P \le 4 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

Đẳng thức xảy ra khi ………………

**VD46:** Cho $a,b,c > 0, a+b+c = 1$

Tìm GTNN của $P = \frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(c+a)(a+b)} + (c+1)(a+b+3)$

Bài làm

Bài này khá đơn giản như sau:

Sử dụng AM-GM ta có

$$P = \frac{1}{(a+b)}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) + (c+1)(a+b+3) \ge \frac{1}{1-c}.\frac{4}{a+c+b+c} + (c+1)(4-c) = \frac{4}{1-c^2} - c^2 + 3c + 4 = f(c)$$

Khảo sát ta có $f(c) \ge f(0) = 8 \Rightarrow P \ge 8$

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

**VD47:** Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c = 10 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$

Tìm GTNN và GTLN của $P = a^2 + b^2 + c^2$

Bài làm

Để ý $P = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 100 - 2abc$

Do đó ta chỉ cần tìm GTNN và GTLN của $Q = abc$

Ta có $\frac{b+c}{bc} = 1 - \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{10-a}{bc} = \frac{a-1}{a} \Rightarrow Q = abc = \frac{a^2(10-a)}{a-1} = f(a)$

Lập bảng biến thiến của hàm số ta không tìm được cực trị, do hàm số gián đoạn tại $a = 1, a = 8$

Vậy $P$ không có GTNN, GTLN

Bài tập trên giống đề **B-2010**

Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

Tìm GTLN của $P = a^5 + b^5 + c^5$

**VD48:** Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

Tìm GTLN của $P = (abc)^2$

Bài làm:

Với những bài toán đối xứng như thế, ta luôn viết được dưới dạng hàm số nào đó

Ta có $a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 = (b+c)^2 \Rightarrow bc = \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2} = a^2 - \frac{1}{2}$

Đến đây ta cần xét 2 trường hợp

TH1: $bc \le 0 \Rightarrow a^2 \le \frac{1}{2} \Rightarrow P = a^2(a^2 - \frac{1}{2})^2$

Đặt $t = a^2 \Rightarrow t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], P = t(t - \frac{1}{2})^2$

Khảo sát hàm số ta có $P = f(t) \le f(\frac{1}{6}) = \frac{1}{54}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} t = a^2 = \frac{1}{6} \\ bc \le \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

TH2: Tương tự ta cũng có $P = f(t) \le (\frac{2}{3}) = \frac{1}{54}$

Kết thúc bài viết sẽ là phương pháp UCT ( thường biết đến dưới dạng phương trình tiếp tuyến ), dung cho những bài mà các biến độc lập với nhau, được viết dưới dạng hàm số $P = f(a) + f(b) + f(c)$

Tài liệu về vấn đề này có rất nhiều trên diễn đàn, có thể tham khảo tài liệu sau:

Phương pháp hệ số bất định

Địa chỉ: Trường THPT chuyên KHTN

Số điện thoại : 0986504770

Trang web học tập:

[1] http://diendantoanhoc.net/forum/

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php