

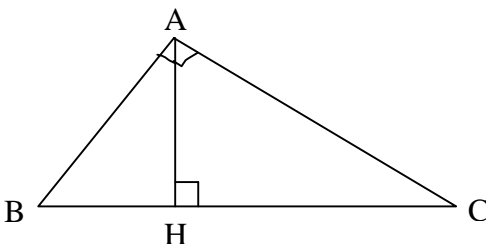
**Chuyên đề luyện thi đại học**  
**PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TẬP HÌNH**  
**KHÔNG GIAN TRONG KỲ THI TSDH**

Biên soạn: GV Nguyễn Trung Kiên

Trong kỳ thi TSDH bài toán hình không gian luôn là dạng bài tập gây khó khăn cho học sinh. Nguyên nhân cơ bản là do học sinh chưa biết phân biệt rõ ràng dạng bài tập để lựa chọn công cụ, phương pháp giải cho phù hợp. Bài viết này sẽ giúp học sinh giải quyết những vướng mắc đó.

**Phần 1: Những vấn đề cần nắm chắc khi tính toán**

- Trong tam giác vuông ABC (vuông tại A) đường cao AH thì ta luôn có:



$$b=c \tan B, c=b \tan C; \quad \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

- Trong tam giác thường ABC ta có:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ;  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ . Tương tự ta có hệ thức cho cạnh b, c và góc B, C:
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$
- $V(\text{khối chóp}) = \frac{1}{3} B.h$  (B là diện tích đáy, h là chiều cao)
- $V(\text{khối lăng trụ}) = B.h$
- $V(\text{chóp } S(ABCD)) = \frac{1}{3} (S(ABCD).dt(ABCD))$
- $S = p.r$  (Trong đó p là nửa chu vi, r là bán kính vòng tròn nội tiếp tam giác)

**Phương pháp xác định đường cao các loại khối chóp:**

- **Loại 1:** Khối chóp có 1 cạnh góc vuông với đáy đó chính là chiều cao.
- **Loại 2:** Khối chóp có 1 mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao chính là đường kẻ từ mặt bên đến giao tuyến.
- **Loại 3:** Khối chóp có 2 mặt kề nhau cùng vuông góc với đáy thì đường cao chính là giao tuyến của 2 mặt kề nhau đó.
- **Loại 4:** Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên cùng tạo với đáy 1 góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy.

- **Loại 5:** Khối chóp có các mặt bên đều tạo với đáy 1 góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm vòng tròn nội tiếp đáy.

**Sử dụng các giả thiết mở:**

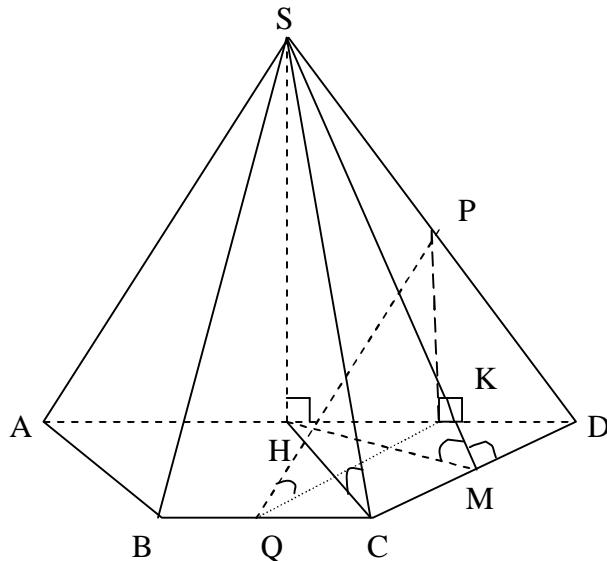
- Hình chóp có 2 mặt bên kề nhau cùng tạo với đáy góc  $\alpha$  thì chân đường cao hạ từ đỉnh sẽ rơi vào đường phân giác góc tạo bởi 2 cạnh nằm trên mặt đáy của 2 mặt bên (Ví dụ: Hình chóp SABCD có mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy góc  $\alpha$  thì chân đường cao hạ từ đỉnh S thuộc phân giác góc BAC)
- Hình chóp có 2 cạnh bên bằng nhau hoặc hai cạnh bên đều tạo với đáy một góc  $\alpha$  thì chân đường cao hạ từ đỉnh rơi vào đường trung trực của đoạn thẳng nối 2 điểm còn lại của cạnh bên thuộc mặt đáy. (Ví dụ: Hình chóp SABCD có SB=SC hoặc SB và SC cùng tạo với đáy một góc  $\alpha$  thì chân đường cao hạ từ S rơi vào đường trung trực của BC)

**Việc xác định được chân đường cao cũng là yếu tố quan trọng để tìm góc tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng hoặc góc tạo bởi 2 mặt phẳng.**

**Ví dụ:** Cho khối chóp SABCD có mặt bên SAD vuông góc (ABCD), góc tạo bởi SC và (ABCD) là  $60^\circ$ , góc tạo bởi (SCD) và (ABCD) là  $45^\circ$ , đáy là hình thang cân có 2 cạnh đáy là a, 2a; cạnh bên bằng a. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SD, BC. Tìm góc tạo bởi PQ và mặt phẳng (ABCD). Tính V khối chóp?

Rõ ràng đây là khối chóp thuộc dạng 2. Từ đó ta dễ dàng tìm được đường cao và xác định các góc như sau:

- Kẻ SH vuông góc với AD thì SH là đường cao  $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH}; (SM, (ABCD)) = \widehat{HMS}$ , với M là chân đường cao kẻ từ H lên CD
- Từ P hạ PK vuông góc với AD ta có  $(PQ, (ABCD)) = \widehat{PKQ}$



**Phần 3: Các bài toán về tính thể tích**

**A. Tính thể tích trực tiếp bằng cách tìm đường cao:**

**Ví dụ 1) (TSDH A 2009)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D., có AB=AD=2a; CD=a. Góc giữa 2 mặt phẳng (SCB) và (ABCD) bằng  $60^\circ$ . Gọi I là trung điểm

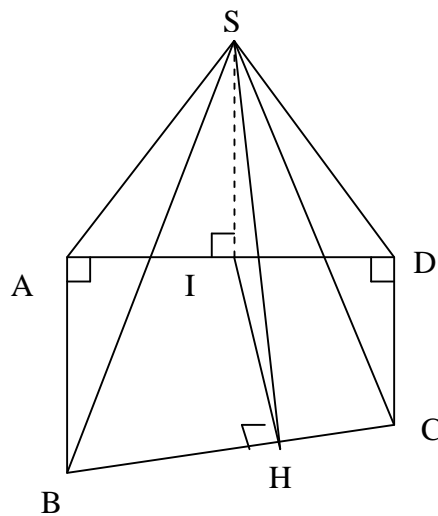
AD biết 2 mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với (ABCD). Tính thể tích khối chóp SABCD? **TEL: 0988844088**

**HD giải:** Vì 2 mặt phẳng (SBC) và (SBI) cùng vuông góc với (ABCD) mà (SBI) và (SCI) có giao tuyến là SI nên SI là đường cao. Kẻ IH vuông góc với BC ta có góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là  $\widehat{SHI} = 60^\circ$ . Từ đó ta tính được:

$$IC = a\sqrt{2}; IB = BC = a\sqrt{5}; S(ABCD) = \frac{1}{2}AD(AB + CD) = 3a^2$$

$$\frac{1}{2}IH \cdot BC = S(IBC) = S(ABCD) - S(ABI) - S(CDI) = 3a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \text{ nên}$$

$$IH = \frac{2S(IBC)}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a. \text{ Từ đó } V(SABCD) = \frac{3\sqrt{15}}{5}a^3.$$



**Ví dụ 2)** (TSDH D 2009) Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  có đáy ABC là tam giác vuông tại B,  $AB=a$ ;  $AA'=2a$ ;  $A'C=3a$ . Gọi M là trung điểm của đoạn  $A'C'$ , I là trung điểm của AM và  $A'C'$ . Tính V chóp IABC theo a?

**HD giải:**

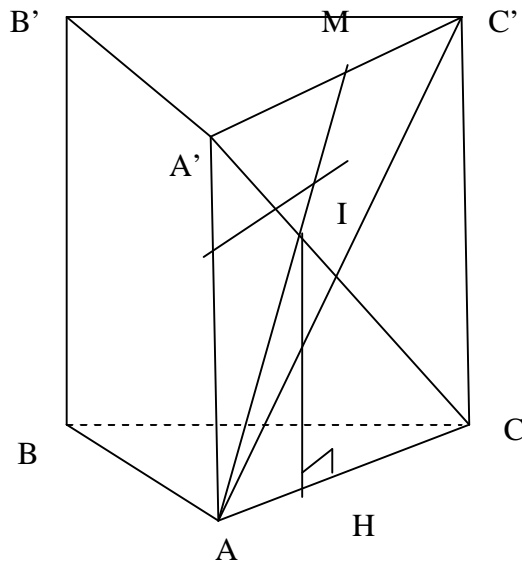
-  $ABC A'B'C'$  là lăng trụ đứng nên các mặt bên đều vuông góc với đáy.

Vì  $I \in (ACC') \perp (ABC)$ , từ I ta kẻ  $IH \perp AC$  thì IH là đường cao và I chính là trọng tâm tam giác

$$AA'C' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{4a}{3}$$

$$\text{Có } AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$$

$$V(IABC) = \frac{1}{3}IH \cdot dt(ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = \frac{4}{9}a^3 \text{ ( đvtt)}$$



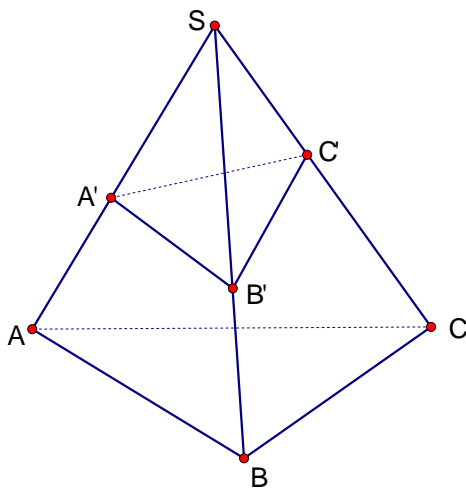
**B. Tính thể tích bằng cách sử dụng công thức tỉ số thể tích hoặc phân chia khối đa diện thành các khối đa diện đơn giản hơn**

Khi gặp các bài toán mà việc tính toán gặp khó khăn thì ta phải tìm cách phân chia khối đa diện đó thành các khối chóp đơn giản hơn mà có thể tính trực tiếp thể tích của nó hoặc sử dụng công thức tính tỉ số thể tích để tìm thể tích khối đa diện cần tính thông qua 1 khối đa diện trung gian đơn giản hơn.

**Các em học sinh cần nắm vững các công thức sau:**

$$\frac{V(SA'B'C')}{V(SABC)} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC} \quad (1)$$

$$\frac{V(SA'ABC)}{V(SABC)} = \frac{A'A}{SA} \quad (2). \text{ Công thức (2) có thể mở rộng cho khối chóp bất kỳ.}$$



**Ví dụ 3)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ , SA vuông góc với đáy(ABCD), SA=a. Gọi C' là trung điểm SC, mặt phẳng (P) đi qua AC' song song với BD cắt các cạnh SB, SD của hình chóp tại B', D'. Tính thể tích khối chóp

**HD giải:**

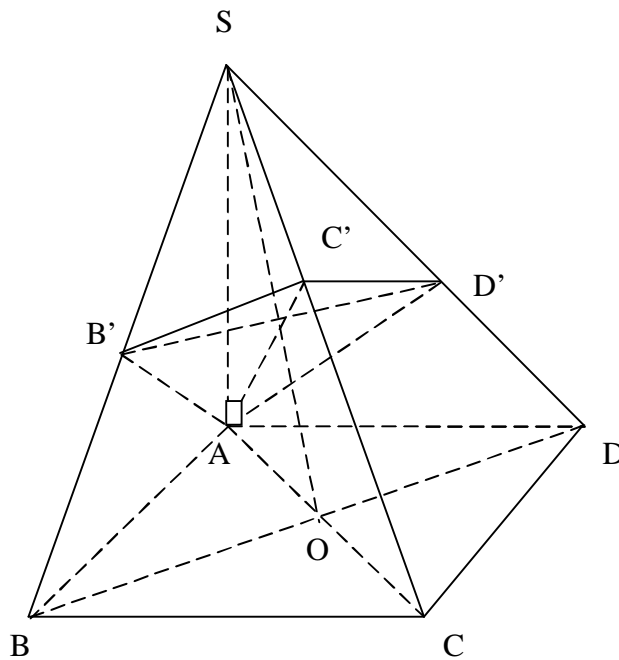
Gọi O là giao 2 đường chéo ta suy ra AC' và SO cắt nhau tại trọng tâm I của tam giác SAC. Từ I thuộc mặt phẳng (P)(SDB) kẻ đường thẳng song song với BD cắt SB, SD tại B', D' là 2 giao điểm cần tìm.

$$\text{Ta có: } \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}; \frac{SD'}{SD} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Để thấy } V_{(SAB'C'D')} = 2V_{(SAB'C')}; V_{(SAB'C')} = 2V_{(SABC)} \Rightarrow \frac{V_{(SAB'C'D')}}{V_{(ABCD)}} = \frac{V_{(SAB'C')}}{V_{(SABC)}} = \frac{SA.SB'.SC'}{SA.SB.SC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } V_{(SABCD)} = \frac{1}{3} SA.dt(ABCD) = \frac{1}{3} SA.AD.AB.sin\widehat{DAB} = \frac{1}{3} a.a.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a^3 \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$V_{(SAB'C'D')} = \frac{\sqrt{3}}{18} a^3 \text{ (đvtt)}$$



**Ví dụ 4) (Dự bị A 2007)**

Cho hình chóp SABCD là hình chữ nhật AB=a, AD=2a, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB hợp với đáy một góc  $60^\circ$ . Trên cạnh SA lấy M sao cho  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Mặt phẳng BCM cắt DS tại

N. Tính thể tích khối chóp SBCMN.

**HD giải:**

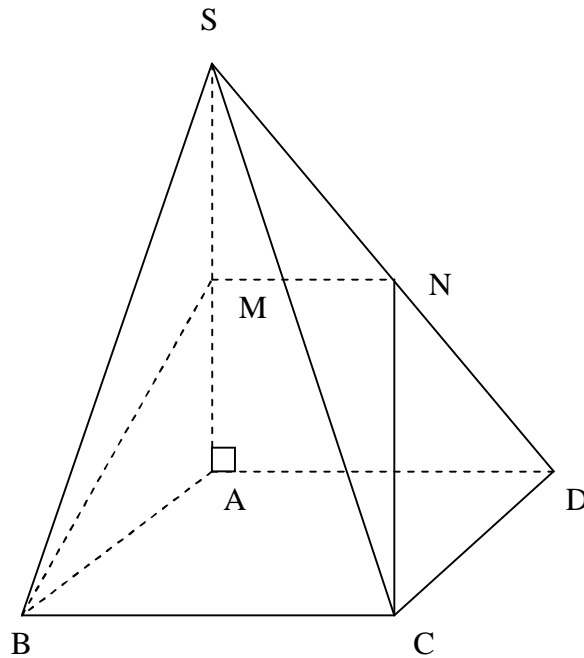
Từ M kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại N là giao điểm cần tìm, góc tạo bởi SB và (ABCD) là  $\widehat{SB\hat{A}} = 60^\circ$ . Ta có  $SA = SB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ .

$$\text{Từ đó suy ra } SM=SA-AM=a\sqrt{3}-a\frac{\sqrt{3}}{3}=a\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SD}=\frac{2}{3}$$

$$\text{Để thấy } V_{(SABCD)}=V_{(SABC)}+V_{(SACD)}=2V_{(SABC)}=2V_{(SACD)}$$

$$\begin{aligned} V_{(SBCMN)} &= V_{(SMBC)} + V_{(SMCN)} \\ \Rightarrow \frac{V_{(SMBCN)}}{V_{(SABCD)}} &= \frac{V_{(SMBC)}+V_{(SMCN)}}{V_{(SABCD)}} = \frac{V_{(SMCN)}}{2V_{(SABC)}} + \frac{V_{(SMCN)}}{2V_{(SACD)}} = \frac{1 \cdot SM \cdot SB \cdot SC}{2 \cdot SA \cdot SB \cdot SC} + \frac{1 \cdot SM \cdot SC \cdot SN}{2 \cdot SA \cdot SC \cdot SD} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } V_{(SABCD)} = \frac{1}{3} SA \cdot dt(ABCD) = \frac{1}{3} a\sqrt{3}a \cdot 2a = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3 \Rightarrow V_{(SMBCN)} = \frac{10\sqrt{3}}{27} a^3$$



#### Phần 4: Các bài toán về khoảng cách trong không gian

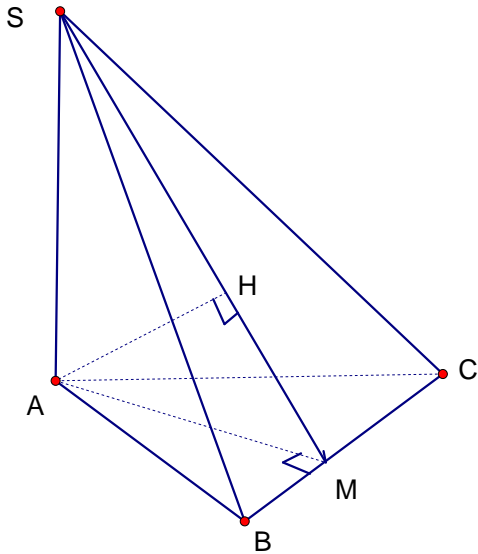
##### A. Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng

Để giải quyết nhanh gọn bài toán khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng học sinh cần nắm chắc bài toán cơ bản và các tính chất sau

**\* Bài toán cơ bản:** Cho khối chóp SABC có SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến (SBC)

- Hạ AM vuông góc với BC, AH vuông góc với SM suy ra AH vuông góc với (SBC). Vậy khoảng cách từ A đến (SBC) là AH.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2}$$



**\* Tính chất quan trọng cần nắm:**

- Nếu đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên (d) đến mặt phẳng (P) là như nhau
- Nếu  $AM = kBM$  thì  $d_{A/(P)} = kd_{B/(P)}$  trong đó (P) là mặt phẳng đi qua M

Trên cơ sở các tính chất trên ta luôn quy được khoảng cách từ một điểm bất kỳ về bài toán cơ bản.

Tuy nhiên 1 số trường hợp việc tìm hình chiếu trở nên vô cùng khó khăn, khi đó việc sử dụng công thức tính thể tích trở nên rất hiệu quả.

$$\text{Ta có } V(\text{khối chóp}) = \frac{1}{3} B.h \Rightarrow h = \frac{3V}{B}$$

**Ví dụ 1)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S trùng với trọng tâm tam giác ABD. Mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính theo a thể tích của khối chóp SABCD và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD).

Lời giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD,

E là hình chiếu của G lên AB

Ta có:  $SG \perp AB; GE \perp AB \Rightarrow AB \perp (SGE)$

$$\Rightarrow \widehat{SAG} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow SG = GE \cdot \tan \widehat{SEG} = \sqrt{3}GE$$

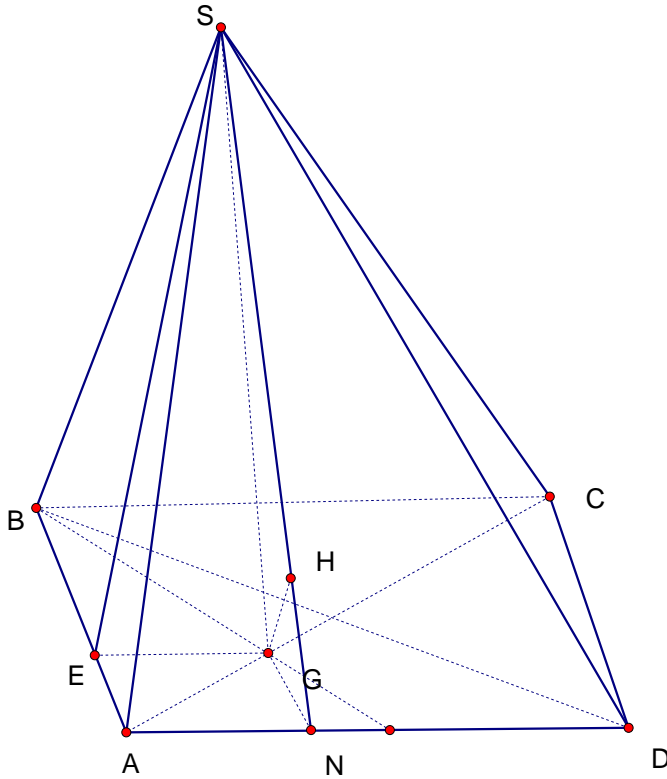
Mặt khác G là trọng tâm của tam giác ABD

$$\Rightarrow GE = \frac{1}{3} BC = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} SG \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$$

Hạ GN vuông góc với AD, GH vuông góc với SN.

$$\text{Ta có } d_{B/(SAD)} = 3d_{G/(SAD)} = 3GH = \frac{3GN \cdot GS}{\sqrt{GN^2 + GS^2}} = \frac{3 \frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



**Ví dụ 2)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi,  $AB = a\sqrt{3}$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ . Biết góc giữa đường thẳng  $AC'$  và mặt phẳng  $(ADD'A')$  bằng  $30^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ trên theo  $a$  và khoảng cách từ trung điểm  $N$  của  $BB'$  đến mặt phẳng  $(C'MA)$ . Biết  $M$  là trung điểm của  $A'D'$

Ta có  $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD}$  (1).

Đáy  $ABCD$  là hình thoi gồm 2 tam giác đều  $ABC$ ,  $ACD$  nên:

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \quad (2)$$

Gọi  $C'M$  là đường cao của tam giác đều  $C'A'D'$  thì  $C'M \perp (ADA'D')$  nên  $C'\hat{A}M = 30^\circ$

$$\text{Ta có } C'M = \frac{3a}{2} \Rightarrow AM = C'M \cdot \cot 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow A'A = \sqrt{AM^2 - A'M^2} = a\sqrt{6} \quad (3)$$

$$\text{Thay (2),(3) vào (1) ta có: } V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot a\sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}a^3}{2}.$$



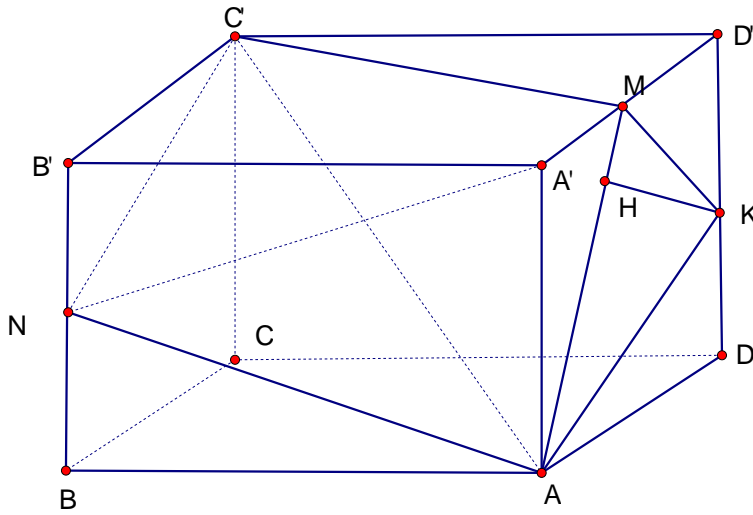
Ta có  $d_{N/(C'MA)} = d_{K/(C'MA)}$  với K là trung điểm của DD' (Vì K và N đối xứng nhau qua trung điểm O của AC')

Từ K hạ KH vuông góc với AM thì

$$KH \perp (AC'M) \Rightarrow d_{K/(C'MA)} = KH; \frac{1}{2}KH \cdot AM = dt(AA'D'D) - dt(AA'M) - dt(MD'K) - dt(AKD)$$

$$\Rightarrow KH \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{4} = a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow KH = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\text{Vậy } d_{N/(C'MA)} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$



**Ví dụ 3)** Cho hình chóp SABC có góc tạo bởi 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là  $60^\circ$ , ABC, SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến mp(SAC). (**Đề dự bị khối A 2007**)

**HD:**

**Cách 1:** Coi B là đỉnh khối chóp BSAC từ giả thiết ta suy ra  $BS=BA=BC=a$ . Gọi O là chân đường cao hạ từ B xuống mp(SAC). O chính là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác SAC. Gọi M là trung điểm BC ta có  $SM \perp BC; AM \perp BC$ . Nên góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là

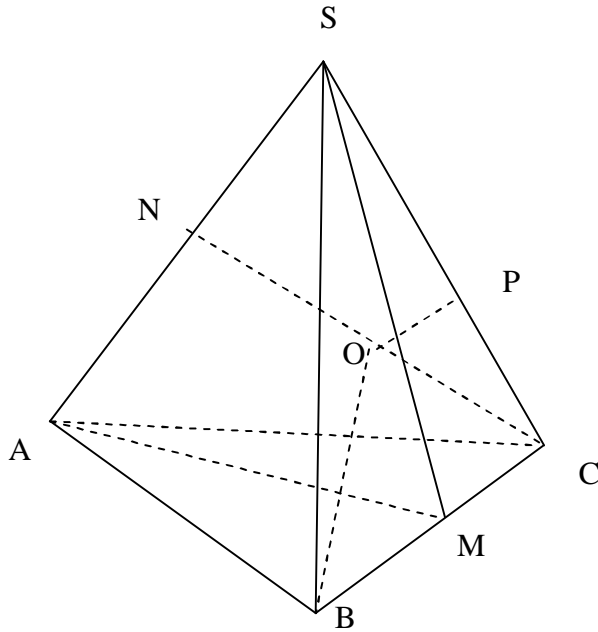
$$SM\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow SM = AM = AS = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bây giờ ta tìm vị trí tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác SAC.

Tam giác SAC cân tại C nên tâm vòng tròn ngoại tiếp nằm trên trung trực của SA và CN (N là trung điểm của SA). Kẻ trung trực của SC cắt trung trực của SA tại O là điểm cần tìm

$$\cos SNO = \frac{NO}{SC} = \frac{\sqrt{SC^2 - \left(\frac{SA}{2}\right)^2}}{SC} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\Rightarrow OC = \frac{\frac{SC}{2}}{\cos SC\hat{N}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}; BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{13}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$



**Cách 2:**  $V_{(SABCD)} = 2V_{(SABM)} = 2 \cdot \frac{1}{3} BM \cdot dt(SAM) = \frac{2a}{3.2} AM \cdot MS \cdot \sin 60^\circ = a^3 \frac{\sqrt{3}}{16} dt(SAC)$   
 $= \frac{1}{2} CN \cdot AS = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{39}a^2}{16} \Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{3V(SABC)}{dt(SAC)} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

**Ví dụ 4)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang  $\hat{A}BC = \hat{B}AD = 90^\circ$ ,  $BA=BC=a$ ,  $AD=2a$ . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và  $SA=a\sqrt{2}$ , gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mp(SCD) (**TSDH D 2007**)

**HD giải:** Ta có  $AC = a\sqrt{2}$ ;  $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{6}$ ;  $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$ . Ta cũng dễ dàng tính được  $CD = a\sqrt{2}$ . Ta có  $SD^2 = SC^2 + CD^2$  nên tam giác SCD vuông tại C.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AS}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

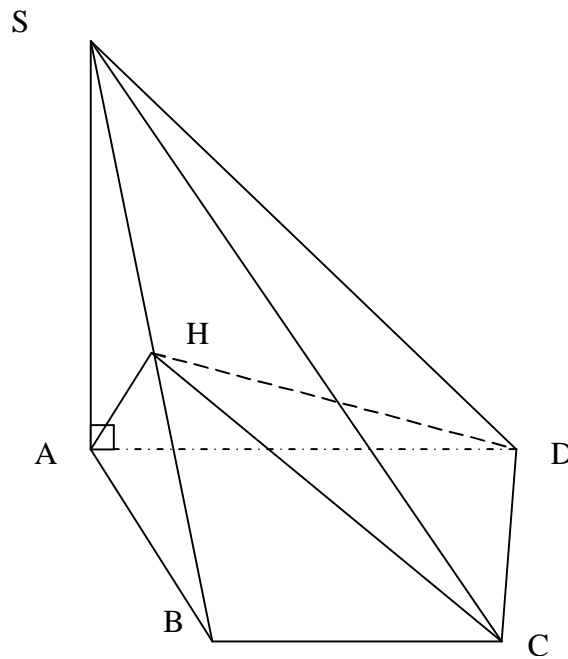
$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}a \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$dt(BCD) = dt(ABCD) - dt(ABD) = \frac{1 \cdot AB \cdot (BC + AD)}{2} - \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{a^2}{2};$$

$$dt(SCD) = \frac{1}{2} SC \cdot CD = a^2 \sqrt{2}$$

$$\frac{V(SHCD)}{V(SBCD)} = \frac{SH \cdot SC \cdot SD}{SB \cdot SC \cdot SD} = \frac{2}{3}; V(SBCD) = \frac{1}{3} SA \cdot dt(BCD) = \frac{1 \cdot a \sqrt{2} \cdot a^2}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3$$

$$V(SHCD) = \frac{\sqrt{2}}{9} a^3. \text{Ta có } d(H / (SCD)) = \frac{3V(SHCD)}{dt(SCD)} = \frac{\sqrt{2}}{9} a^3 \cdot 3 \frac{1}{a^2 \sqrt{2}} = \frac{a}{3}$$



### B. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau trong không gian

Khi tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau a và b trong không gian ta tiến hành theo trình tự sau:

- **Dựng (tìm) mặt phẳng trung gian (P) chứa a song song với b** sau đó **tính khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ trên b đến mp(P)**

- Khi tính khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng ta có thể vận dụng 1 trong 2 phương pháp đã trình bày ở mục A.

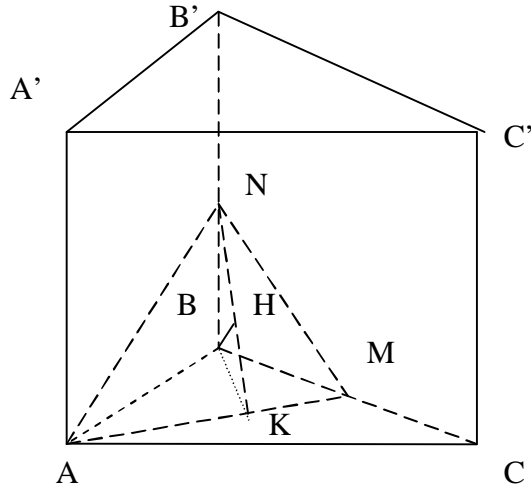
**Ví dụ 1)** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  có đáy ABC là tam giác vuông  $AB=BC=a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$ . Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ  $ABCA'B'C'$  và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM, B'C. (TSDH D2008)

**HD giải:**  $V(ABCA'B'C') = S \cdot h = a^3 \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Gọi N là trung điểm của  $BB'$  ta có  $B'C$  song song với

$mp(AMN)$ . Từ đó ta có:  $d(B'C, AM) = d(B', (AMN)) = d(B, (AMN))$  vì N là trung điểm của  $BB'$ .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (AMN), vì tứ diện BAMN là tứ diện vuông tại B nên ta

có  $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BM^2} \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{7}}$  chính là khoảng cách giữa AM và B'C.



**Chú ý 1)** Trong bài toán này ta đã dựng mặt phẳng trung gian là mp(AMN) để tận dụng điều kiện B'C song song với (AMN). Tại sao không tìm mặt phẳng chứa B'C các em học sinh tự suy nghĩ điều này

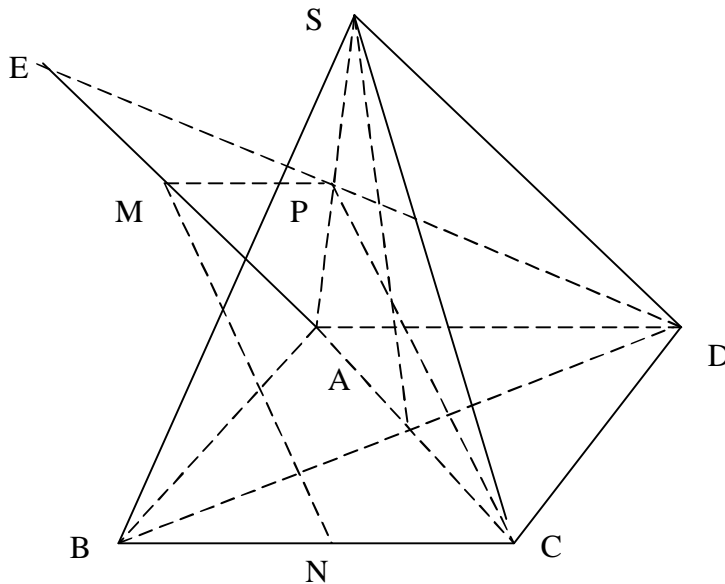
**Chú ý 2)** Nếu mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của đoạn AB thì khoảng cách từ A đến (P) cũng bằng khoảng cách từ B đến (P)

**Ví dụ 2)** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và AC. (**TSDH B 2007**)

**HD giải:** Gọi P là trung điểm của SA, ta có tứ giác MPNC là hình bình hành.

Nên  $MN \parallel PC$ . Từ đó suy ra  $MN \parallel (SAC)$ . Mặt khác  $BD \perp mp(SAC)$  nên  $BD \perp PC \Rightarrow BD \perp MN$ .

Ta có:  $d(MN, AC) = d(N, (SAC)) = \frac{1}{2} d(B, (SAC)) = \frac{1}{4} BD = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$



(Chú ý việc chuyển tính khoảng cách từ N đến (SAC) sang tính khoảng cách từ B đến (SAC) giúp ta đơn giản hoá bài toán đi rất nhiều. Các em học sinh cần nghiên cứu kỹ dạng toán này để vận dụng)

**Ví dụ 3)** Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B,  $AB = BC = 2a$ , hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với đáy (ABC). Gọi M là trung điểm AB, mặt phẳng qua SM song song với BC cắt AC tại N. Biết góc tạo bởi (SBC) và (ABC) bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp SBCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN (TSDH A 2011)

**Giải:**

- Ta có  $SA \perp (ABC)$ ;  $\widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = 2a\sqrt{3}$

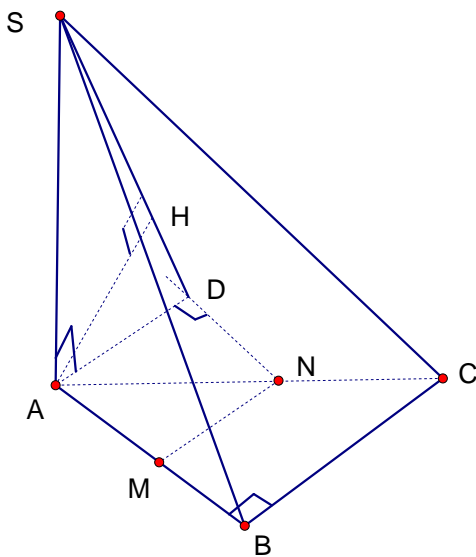
Mặt phẳng qua SM song song với BC cắt AC tại N suy ra N là trung điểm AC

Từ đó tính được  $V = \sqrt{3}a^3$

- Kẻ đường thẳng (d) qua N song song với AB thì AB song song với mặt phẳng (P) chứa SN và (d) nên khoảng cách từ AB đến SN cũng bằng khoảng cách từ A đến (P).

Dựng AD vuông góc với (d) thì  $AB // (SND)$ , dựng AH vuông góc với SD thì

$$AH \perp (SND) \Rightarrow d_{AB/SN} = d_{A/(SND)} = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$



### Phần 5: Các bài toán tính góc giữa 2 đường thẳng chéo nhau trong không gian.

Khi cần tính góc giữa 2 đường thẳng chéo nhau a và b trong không gian ta phải tìm 1 đường thẳng trung gian là c song song với a và c cắt b. Khi đó góc tạo bởi a và b cũng chính là góc tạo bởi b và c. Hoặc ta dựng liên tiếp 2 đường thẳng c và d cắt nhau lần lượt song song với a và b. Sau đó ta tính góc giữa c và d theo định lý hàm số cosin hoặc theo hệ thức lượng trong tam giác vuông.

**Ví dụ 1)** Cho lăng trụ ABCA'B'C' có độ dài cạnh bên bằng  $2a$ , đáy ABC là tam giác vuông tại A.  $AB = a$ ,  $AC = a$  và hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là trung điểm của cạnh BC, Tính theo a thể tích khối chóp A'ABC và tính cosin góc tạo bởi AA' và B'C'. (TSDH A 2008)

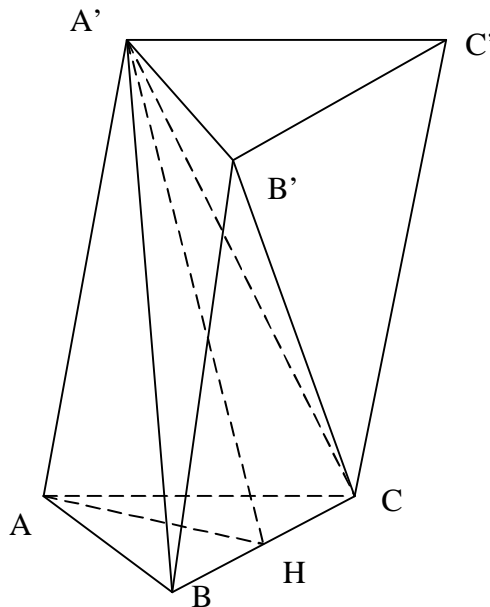
**HD giải:** Gọi H là trung điểm của BC. Suy ra  $A'H \perp (ABC)$  và

$$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a \text{ Do đó } A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}.$$

$V(A'ABC) = \frac{1}{3} A'H \cdot dt(ABC) = \frac{a^3}{2}$  Trong tam giác vuông  $A'B'H$  ta có

$HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$  nên tam giác  $B'BH$  cân tại  $B'$ . Đặt  $\alpha$  là góc tạo bởi  $AA'$  và  $B'C'$  thì  
 $\alpha = \widehat{B'BH} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{2 \cdot 2a} = \frac{1}{4}$

**Tel 0988844088**



**Ví dụ 2)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA = a$ ,  $SB = a\sqrt{3}$  mp  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $SBMDN$  và tính cosin góc tạo bởi  $SM$  và  $DN$ .

**Hd giải:** Từ  $S$  hạ  $SH$  vuông góc  $AB$  thì  $SH$  vuông góc với mp  $(ABCD)$ .  $SH$  cũng chính là đường cao khối chóp  $SBMDN$ . Ta có  $SA^2 + SB^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta SAB$  vuông tại

$$S \Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a \Rightarrow \Delta SAM \text{ là tam giác đều} \Rightarrow \Delta ABCH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

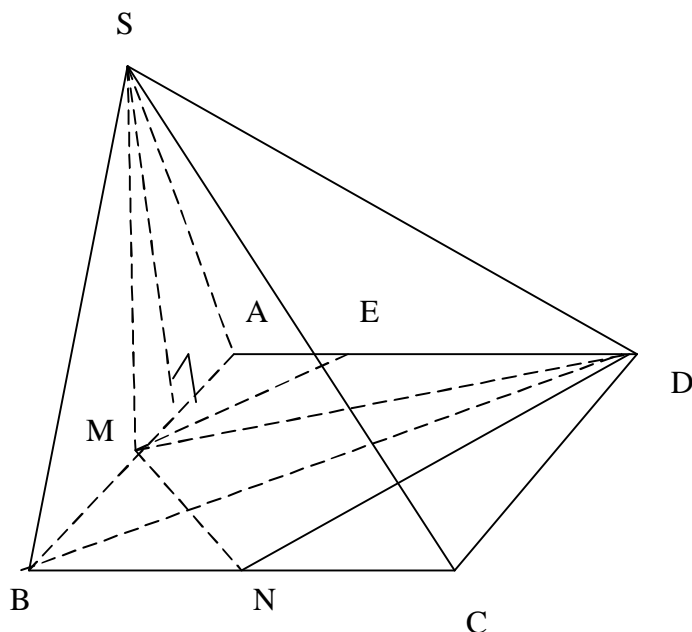
$$\text{Dễ thấy đường thẳng } (BMDN) = \frac{1}{2} dt(ABCD) = 2a^2. \text{ Do đó } V_{(SBMDN)} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(BMDN) = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$$

Kẻ  $ME$  song song với  $DN$  ( $E$  thuộc  $AD$ ) suy ra  $AE = \frac{a}{2}$  giả sử

$(SM, DN) = \alpha \Rightarrow \alpha = (SM, ME)$ . Ta có  $SA$  vuông góc với  $AD$  (Định lý 3 đường vuông góc) suy

ra  $SA \perp AE \Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, ME = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  Tam giác SME cân tại E

$$\text{nên } \cos \alpha = \frac{SM}{ME} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



#### PHẦN 4) CÁC DẠNG BÀI TẬP VỀ MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Để giải quyết tốt dạng bài tập này học sinh cần nắm vững kiến thức cơ bản sau:

\*\* Nếu I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $SA_1A_2...A_n$  thì tâm I cách đều các đỉnh

$S; A_1; A_2; \dots; A_n$

- Vì vậy tâm I thuộc trục đường tròn đáy là đường thẳng qua tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với đáy  $A_1A_2...A_n$  (đường thẳng này song song với đường cao khối chóp) (Phải chú ý việc chọn mặt đáy cần linh hoạt sao cho khi xác định trục đường tròn đáy là đơn giản nhất)

- Tâm I phải cách đều đỉnh S và các đỉnh  $A_1; A_2; \dots; A_n$  nên I thuộc mặt phẳng trung trực của  $SA_i$  đây là vấn đề khó đòi hỏi học sinh cần khéo léo để chọn cạnh bên sao cho trục đường tròn đã xác định và cạnh bên đồng phẳng với nhau để việc tìm I được dễ dàng

\*\* Trong một số trường hợp đặc biệt khi khối chóp có các mặt bên là tam giác cân, vuông, đều ta có thể xác định 2 trục đường tròn của mặt bên và đáy. Khi đó tâm I là giao điểm của 2 trục đường tròn. Nếu hình chóp có các đỉnh đều nhìn cạnh a dưới một góc vuông thì tâm mặt cầu là trung điểm của cạnh a.

\*\* Khi tính toán cần lưu ý các công thức:

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}; a = 2R \sin A, \dots$$

Ta xét các ví dụ sau:

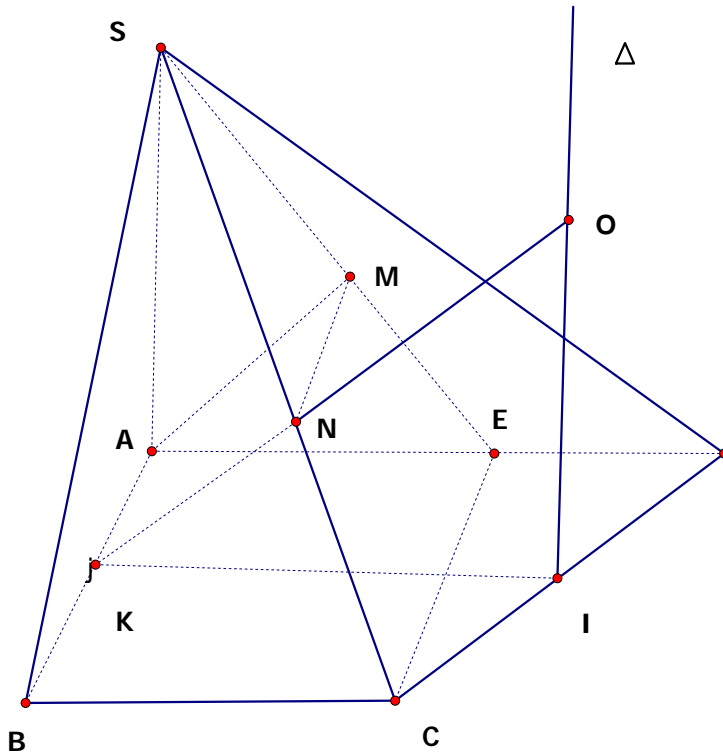
**Ví dụ 1)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B  
 $AB = BC = a; AD = 2a$ . Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABCD) và  $SA = a$ . Gọi E là trung điểm của AD. Tính thể tích khối chóp SCDE và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.  
 HD giải:

$$V = \frac{a^3}{6}$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SE và SC ta có mặt phẳng (ABNM) là mặt phẳng trung trực của SE. Vậy tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SCDE là giao điểm của mặt phẳng (ABNM) và trục đường tròn ngoại tiếp đáy CDE. Gọi  $\Delta$  là đường thẳng qua I là trung điểm của CD và song song với SA. Gọi K là trung điểm của AB thì  $KN \parallel AM$ . KN và  $\Delta$  đồng phẳng suy ra  $KN \cap \Delta = O$  là điểm cần tìm

Tam giác OIK vuông cân nên  $OI = IK = \frac{BC + AD}{2} = \frac{3a}{2}$ ;

$$\text{Ta có } OC^2 = OI^2 + IC^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = \frac{11a^2}{4} \Rightarrow R = OC = \frac{a\sqrt{11}}{2} \quad (0,25 \text{ điểm})$$



*Trong ví dụ này ta dựng mặt phẳng trung trực của SE để tận dụng điều kiện tam giác SAE vuông cân ở A*

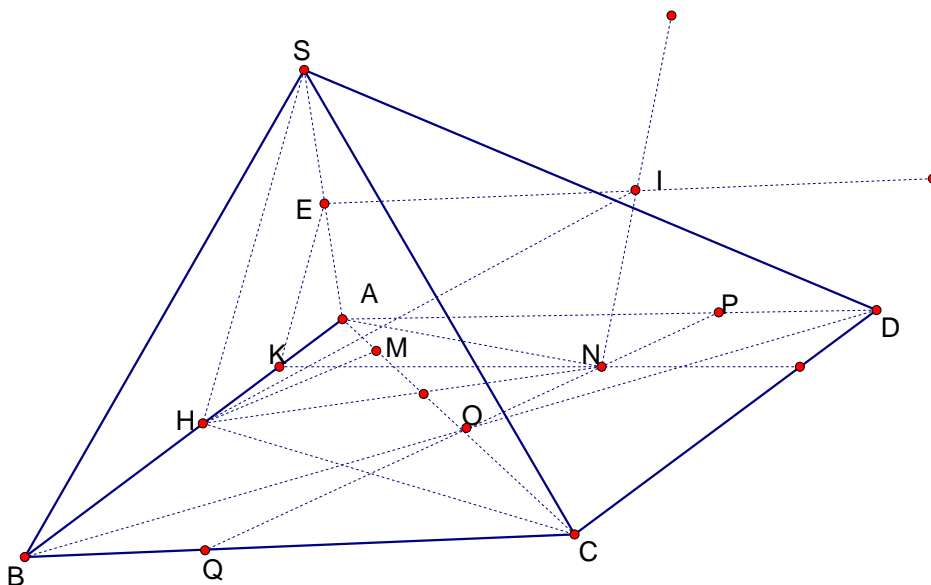
**Ví dụ 2)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật cạnh  $AB = a; AD = a\sqrt{2}$  góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và ABCD bằng  $60^\circ$ . Gọi H là trung điểm của AB. Biết mặt bên SAB là tam giác cân tại đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp SABCD và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp SAHC



- Ta có  $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ . Kẻ HM vuông góc với AC thì góc tạo bởi (SAC) và (ABCD) là  $\widehat{SMH} = 60^\circ$

$$\text{Có } HM = AH \sin \widehat{HAM} = AH \frac{BC}{AC} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}; SH = HM \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(ABCD) = \frac{a^3}{3}$$



- Gọi E, K lần lượt là trung điểm của SA, HA. Kẻ đường thẳng qua K song song với AD cắt CD ở F thì  $KF \perp (SAH)$ . Dựng đường thẳng qua E song song với KF thì Ex là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SHA. Dựng đường thẳng qua tâm O của mặt đáy vuông góc với AC cắt KF, AD tại N, P thì N là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác AHC. Trong mặt phẳng chứa Ex và KF kẻ đường thẳng Ny vuông góc với đáy (ABCD) (đường thẳng song song với EK) thì Ny là trục đường tròn của tam giác AHC.

Giao điểm  $I = Ny \cap Ex$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SAHC.

Ta có  $R^2 = IH^2 = IN^2 + NH^2 = KE^2 + NH^2$ .

$$AP = \frac{AO}{\cos \widehat{CAD}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} a; KN = \frac{1}{2}(HO + AP) = \frac{5a}{4\sqrt{2}} \Rightarrow HN = \sqrt{KN^2 + \frac{AH^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} a$$

$$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} a\right)^2 = \frac{31a^2}{32}$$

$$\text{Vậy } R = \sqrt{\frac{31}{32}} a$$

Cách2) Gọi J, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC. Ta có

$$r = \frac{AH \cdot HC \cdot AC}{4S_{AHC}} = \frac{AH \cdot HC \cdot AC}{2S_{ABC}} = \frac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

Kẻ đường thẳng  $\Delta$  qua  $J$  và  $\Delta // SH$ . Khi đó tâm  $I$  của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.AHC$  là giao điểm của đường trung trực đoạn  $SH$  và  $\Delta$  trong mặt phẳng  $(SHJ)$ . Ta có

$$IH = \sqrt{IJ^2 + JH^2} = \sqrt{\frac{SH^2}{4} + r^2}.$$

Suy ra bán kính mặt cầu là  $R = a\sqrt{\frac{31}{32}}$ .

**Ví dụ 3)** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $DA = DB = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $CD$  vuông góc với

$AD$ . Trên cạnh  $CD$  kéo dài lấy điểm  $E$  sao cho  $A\hat{E}B = 90^\circ$ . Tính góc tạo bởi mặt phẳng  $(ABC)$  và mặt phẳng  $(ABD)$ . Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối tứ diện  $ABCE$ .

**Giải:**

- Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  thì  $CI$  vuông góc với  $AB$  và  $DI$  vuông góc với  $AB$ . Nên góc tạo bởi  $(ACD)$  và  $(ABD)$  là  $\hat{C}ID$ . Do hai tam giác  $ACD$  và  $BCD$  bằng nhau nên

$$\hat{B}DC = \hat{A}DC = 90^\circ \Rightarrow CD \perp (ABD) \Rightarrow CD \perp DI; CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; DI^2 = DA^2 - AI^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

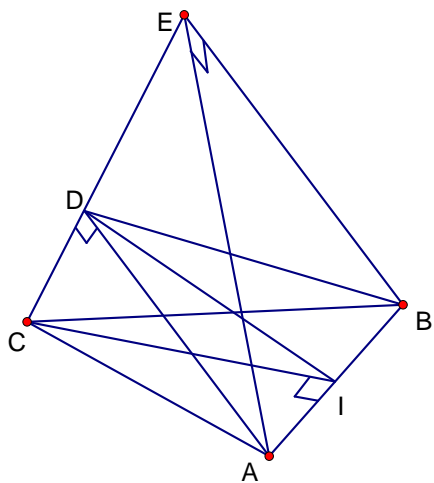
$$\cos \hat{C}ID = \frac{DI}{CI} = \frac{a}{\sqrt{2}} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

- Tam giác vuông  $ACD$  có  $CD^2 = \sqrt{CA^2 - DA^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Tam giác  $ABE$  vuông cân, do đó

$$AE = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DE = \sqrt{AE^2 - DA^2} = \frac{a}{\sqrt{6}}; \Delta ACE \text{ có } AD \text{ là đường cao và}$$

$CD \cdot DE = \frac{a^2}{3} = DA^2 \Rightarrow \Delta ACE$  vuông tại  $A$ . Tương tự ta có tam giác  $BCE$  vuông tại  $B$ . Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCE$  có  $CE$  là đường kính tâm  $I$  của mặt cầu là trung điểm của  $CE$ . Bán

$$\text{kính } R = \frac{1}{2}(CD + DE) = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{a}{\sqrt{6}}\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$$



# MỘT SỐ BÀI TẬP CHỌN LỌC VỀ HÌNH KHÔNG GIAN THƯỜNG DÙNG TRONG KỲ THI TSDH

BIÊN SOẠN GV NGUYỄN TRUNG KIÊN 0988844088

**Câu 1)** Khối chóp SABCD có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM, song song với BD chia khối chóp làm 2 phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

**Câu 2)** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có các cạnh bằng a.

a) Tính thể tích khối chóp.

b) Tính khoảng cách từ tâm mặt đáy đến các mặt của hình chóp.

**Câu 3)** Khối chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a.  $SA \perp (ABCD)$ ;  $SA=2a$ . Gọi E, F là hình chiếu của A trên SB và SD. I là giao điểm của SC và (AEF). Tính thể tích khối chóp SAEIF.

**Câu 4)** Cho lăng trụ đứng ABCA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A<sub>1</sub>BC) tạo với đáy 1 góc  $30^0$  và tam giác A<sub>1</sub>BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

**Câu 5)** Khối lăng trụ ABCA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> có đáy là tam giác vuông cân, cạnh huyền  $AB=\sqrt{2}$ . Mặt phẳng (AA<sub>1</sub>B) vuông góc với mặt phẳng (ABC),  $AA_1=\sqrt{3}$ ; góc A<sub>1</sub>AB nhọn, góc tạo bởi (A<sub>1</sub>AC) và mặt phẳng (ABC) bằng  $60^0$ . Tính thể tích khối lăng trụ.

**Câu 6)** Khối lăng trụ tứ giác đều ABCDA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> có khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và A<sub>1</sub>D bằng 2, độ dài đường chéo mặt bên bằng 5.

a) Hạ  $AH \perp A_1D$  ( $K \in A_1D$ ). chứng minh rằng  $AK=2$ .

b) Tính thể tích khối lăng trụ ABCDA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>.

**Câu 7)** Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC),  $AC=AD=4\text{cm}$ ;  $AB=3\text{cm}$ ;  $BC=5\text{cm}$ . Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

**Câu 8)** Cho hình chóp tam giác đều SABC đỉnh S, độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

**Câu 9)** Cho hình chóp SABC có  $SA=3a$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tam giác ABC có  $AB=BC=2a$ , góc  $ABC=120^0$ . Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

**Câu 10)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD).

**Câu 11)** Cho hình chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a,  $SA=2a$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC

a) Tính khoảng cách t từ A đến mặt phẳng (SBC)

b) Tính thể tích của khối chóp ABCMN.

**Câu 12)** Hình chóp tam giác SABC có các cạnh bên  $SA=SB=SC=a$ , góc  $ASB=120^0$ , góc  $BSC=60^0$ , góc  $ASC=90^0$ . Chứng minh rằng tam giác ABC vuông và tính thể tích hình chóp SABC theo a.

**Câu 13)** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2a. Góc giữa các mặt bên và mặt đáy là  $\alpha$ .

a) Tính thể tích khối chóp theo a và  $\alpha$

b) Xác định  $\alpha$  để thể tích khối chóp nhỏ nhất.

**Câu 14)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với  $AB=a$ ,  $AD= a\sqrt{2}$ ,  $SA=a$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB).

b) Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

**Câu 15)** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB=a$ ,  $AA'=2a$ ,  $A'C=3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $A'C'$ ,  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $A'C$

- Tính theo  $a$  thể tích khối tứ diện  $IABC$
- Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(IBC)$

**Câu 16)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ,  $AB=AD=2a$ ,  $CD=a$ , góc giữa 2 mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Biết 2 mặt phẳng  $(SBI)$  và  $(SCI)$  cùng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ , tính thể tích khối chóp  $SABCD$  theo  $a$ .

**Câu 17)** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABCA'B'C'$  có  $BB'=a$ , góc tạo bởi  $BB'$  và mặt phẳng  $(ABC)$  là  $60^\circ$ , tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  và góc  $BAC=60^\circ$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $B'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tính thể tích khối tứ diện  $A'ABC$  theo  $a$ .

**Câu 18)** Trong không gian cho hình chóp tam giác đều  $SABC$  có  $SC = a\sqrt{7}$ . Góc tạo bởi  $(ABC)$  và  $(SAB) = 60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $SABC$  theo  $a$ .

**Câu 19)** Trong không gian cho hình chóp  $SABCD$  với  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ , góc  $ABC=60^\circ$ ,

$SO$  vuông góc với đáy ( $O$  là tâm mặt đáy),  $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .  $M$  là trung điểm của  $AD$ .  $(P)$  là mặt

phẳng qua  $BM$  và song song với  $SA$ , cắt  $SC$  tại  $K$ . Tính thể tích khối chóp  $KABCD$ .

**Câu 20)** Cho hình chóp  $SABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy  $(ABC)$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  theo  $a$  biết  $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**Câu 21)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình chữ nhật,  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $CD = 2a$ . Cạnh  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 3\sqrt{2}a$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $AB$ .

- Chứng minh rằng  $(SAC)$  vuông góc với  $(SDK)$
- Tính thể tích khối chóp  $CSDK$  theo  $a$ ; tính khoảng cách từ  $K$  đến  $(SDC)$ .

**Câu 22)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với đáy, góc  $ASC=90^\circ$ ,  $SA$  tạo với đáy 1 góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp.

**Câu 23)** Cho lăng trụ  $ABCA'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , hình chiếu vuông góc của  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với tâm  $O$  của tam giác  $ABC$ . Một mặt phẳng  $(P)$  chứa  $BC$  và vuông góc với  $AA'$  cắt lăng trụ theo 1 thiết diện có diện tích  $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ . Tính thể tích khối lăng trụ

**Câu 24)** Cho hình chóp  $SABC$  có  $AB=AC=a$ ;  $BC = \frac{a}{2}$ ;  $SA = a\sqrt{3}$ ; góc  $SAB$  bằng góc  $SAC$  và bằng  $30^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp theo  $a$ .

**Câu 25)** Cho hình chóp tứ giác đều  $SABCD$  cạnh đáy bằng  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAC$  và khoảng cách từ  $G$  đến mặt bên  $(SCD)$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

- Tính khoảng cách từ tâm của mặt đáy đến mặt bên  $(SCD)$
- Tính thể tích của khối chóp  $SABCD$ .

**Câu 26)** Cho hình chóp  $SABC$  có đường cao  $AB=BC=a$ ;  $AD=2a$ . Đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ . Gọi  $B'$  là trung điểm của  $SB$ ,  $C'$  là chân đường cao hạ từ  $A$  xuống  $SC$ . Tính thể tích khối chóp  $SAB'C'$ .

**Câu 27)** Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông,  $AB=BC=a$ , cạnh bên  $AA'=a\sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$

- Tính theo  $a$  thể tích của khối lăng trụ  $ABCA'B'C'$
- Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $AM$  và  $B'C$ .

**Câu 28)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ ;  $SA=a$ ;  $SB=a\sqrt{3}$  và mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng đáy.  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $BC$ . Tính thể tích khối chóp  $SBMDN$  và góc giữa  $(SM;ND)$ .

**Câu 29)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang, góc  $BAD$  bằng góc  $ABC$  và bằng  $90^\circ$ ;  $AB=BC=a$ ;  $AD=2a$ .  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA=2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$ ;  $SD$ . Tính thể tích khối chóp  $SABCD$  và khối chóp  $SBCM$ .

**Câu 30)** Cho lăng trụ  $ABCA'B'C'$  có độ dài cạnh bên bằng  $2a$ , đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB=a$ ;  $AC=a\sqrt{3}$ . và hình chiếu vuông góc của  $A'$  trên  $(ABC)$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .

Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $A'ABC$  và cosin của góc giữa 2 đường thẳng  $AA'$  và  $B'C'$ .

**Câu 31)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , mặt bên  $SAD$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SB, BC, CD$ . Chứng minh  $AM$  vuông góc với  $BP$  và tính thể tích khối tứ diện  $CMNP$ .

**Câu 32)** Cho lăng trụ đứng  $ABCA_1B_1C_1$  có  $AB=a$ ;  $AC=2a$ ;  $AA_1=2a\sqrt{5}$  và góc  $BAC=120^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $CC_1$ . Chứng minh rằng  $MB \perp MA_1$  và tính khoảng cách  $d$  từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(A_1MB)$

**Câu 33)** Cho hình chóp  $SABC$  có góc giữa 2 mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Các tam giác  $ABC$  và  $SBC$  là các tam giác đều cạnh  $a$ . Tính theo  $a$  khoảng cách từ đỉnh  $B$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .

**Câu 34)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ ,  $SA$  vuông góc với đáy.

Cho  $AB=a$ ;  $SA=a\sqrt{2}$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  lên  $SB$ ;  $SC$ . Chứng minh  $SC \perp (AHK)$  và tính thể tích khối chóp  $OAHK$ .

**Câu 35)** Trong mặt phẳng  $(P)$  cho nửa đường tròn đường kính  $AB=2R$  và điểm  $C$  thuộc nửa vòng  $(SAB;SBC)=60^\circ$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên  $SB, SC$ . Chứng minh tam giác  $AHK$  vuông và tính  $V_{SABC}$

**Câu 36)** Lăng trụ đứng  $ABCA_1B_1C_1$  có đáy là tam giác vuông  $AB=AC=a$ ;  $AA_1=a\sqrt{2}$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AA_1$  và  $BC_1$ . Chứng minh rằng  $MN$  là đoạn vuông góc chung của  $AA_1$  và  $BC_1$ . Tính thể tích khối chóp  $MA_1BC_1$

**Câu 37)** Cho lăng trụ đứng  $ABCA_1B_1C_1$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ .  $M$  là trung điểm của đoạn  $AA_1$ . Chứng minh  $BM \perp B_1C$  và tính  $d_{(BM;B_1C)}$

**Câu 38)** Cho hình chóp tứ giác đều  $SABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ .  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua trung điểm  $SA$ ,  $M$  là trung điểm của  $AE$ ,  $N$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh  $MN$  vuông góc với  $BD$  và tính khoảng cách giữa  $MN$  và  $AC$  theo  $a$ .

**Câu 39)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình thang, góc  $ABC=$  góc  $BAD= 90^\circ$ ;  $AD=2a$ ;  $BA=BC=a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA=a\sqrt{2}$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SB$ .

- Chứng minh rằng tam giác  $SCD$  vuông
- Tính khoảng cách từ  $H$  đến mặt phẳng  $(SCD)$

**Câu 40)** Cho hình chóp  $SABC$  mà mỗi mặt bên là 1 tam giác vuông.  $SA=SB=BS=a$ . Gọi  $M, N, E$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC, BC$ .  $D$  là điểm đối xứng của  $S$  qua  $E$ ,  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $(SMN)$

- Chứng minh rằng  $AD$  vuông góc với  $SI$
- Tính theo  $a$  thể tích khối tứ diện  $MBSI$

**Câu 41)** Cho hình hộp đứng  $ABCD A'B'C'D'$  có các cạnh  $AB=AD=a$ ;  $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  và góc

$BAD=60^\circ$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $A'D'$  và  $A'B'$ . Chứng minh  $AC'$  vuông góc với mặt phẳng  $(BDMN)$  và tính thể tích khối chóp  $ABDMN$ .

**Câu 42)** Hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB=a, AD=2a$ , cạnh  $SA$  vuông góc với đáy, cạnh  $SB$  tạo với mặt phẳng đáy góc  $60^\circ$ . Trên cạnh  $SA$  lấy  $M$  sao cho  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,

mặt phẳng  $(BCM)$  cắt  $SD$  tại  $N$ . Tính thể tích khối chóp  $SBCNM$ .

**Câu 43)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ . Góc  $BAD=60^\circ$ .  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ ,  $SA=a$ . Gọi  $C'$  là trung điểm của  $SC$ , mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $AC'$  và song song với  $BD$ , cắt các cạnh  $SB, SD$  của hình chóp lần lượt tại  $B', D'$ . Tính thể tích của khối chóp  $SAB'C'D'$ .

**Câu 44)** Cho lăng trụ  $ABCA'B'C'$  có  $A'ABC$  là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy  $AB=a$ , cạnh bên  $AA'=b$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa 2 mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(A'BC)$ . Tính  $\tan \alpha$  và thể tích khối chóp  $A'BB'CC'$ .

**Câu 45)** Cho hình chóp tứ giác đều  $SABCD$  có cạnh đáy  $=a$ . Gọi  $SH$  là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm  $I$  của  $SH$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $b$ . Tính thể tích khối chóp  $SABCD$ .

**Câu 46)** Cho hình lập phương  $ABCD A'B'C'D'$  có cạnh  $=a$  và điểm  $K$  thuộc cạnh  $CC'$  sao

cho:  $CK = \frac{2a}{3}$ . Mặt phẳng  $\alpha$  đi qua  $A, K$  và song song với  $BD$  chia khối lập phương thành 2

khối đa diện. Tính thể tích của 2 khối đa diện đó.

**Câu 47)** Cho 1 hình trụ tròn xoay và hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có 2 đỉnh liên tiếp  $A; B$  nằm trên đường tròn đáy thứ nhất, 2 đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ 2 của hình trụ. Mặt phẳng  $(ABCD)$  tạo với đáy hình trụ góc  $45^\circ$ . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

**Câu 48)** Cho hình nón đỉnh  $S$ , đáy là đường tròn tâm  $O$ ,  $SA$  và  $SB$  là 2 đường sinh. Biết  $SO=3a$ , khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $a$ , diện tích tam giác  $SAB=18a^2$ . Tính thể tích và diện tích xung quanh.

**Câu 49)** Cho hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn tâm  $O$  và  $O'$ . Bán kính đáy bằng chiều cao và bằng  $a$ . Trên đường tròn đáy tâm  $O$  lấy điểm  $A$ , trên đường tròn đáy tâm  $O'$  lấy điểm  $B$  sao cho  $AB=2a$ .

- Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ
- Tính thể tích tứ diện  $OO'AB$ .

**Câu 50)** Cho hình chóp cắt tam giác đều ngoại tiếp 1 hình cầu bán kính  $r$  cho trước. Tính thể tích khối chóp cắt biết rằng cạnh đáy lớn gấp đôi cạnh nhỏ. (Hình chóp ngoại tiếp hình cầu nếu hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp).

**Câu 51)** Cho hình chóp tam giác đều  $SABC$  có độ dài cạnh bên bằng  $a$ . Các mặt bên hợp với mặt phẳng đáy một góc  $\alpha$ . Tính thể tích khối cầu nội tiếp hình chóp.

**Câu 52)** Cho hình chóp SABCD. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Đáy ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD biết SA=h.

**Câu 53)** Hình cầu đường kính AB=2R. Lấy H trên AB sao cho AH=x ( $0 < x < 2R$ ). Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H cắt mặt cầu theo giao tuyến là hình tròn (C), MNPQ là hình vuông nội tiếp trong hình tròn giao tuyến (C).

- Tính bán kính đường tròn giao tuyến. Tính độ dài MN, AC.
- Tính thể tích khối đa diện tạo bởi 2 hình chóp AMNPQ và BMNPQ.

**Câu 54)** Cho tứ diện ABCD có AB=BC=AC=BD=a; AD=b. Hai mp(ACD) và (BCD) vuông góc với nhau.

- Chứng minh tam giác ACD vuông.
- Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

**Câu 55)** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh đáy bằng a, tâm đáy là O, chiều cao SH= $\frac{a}{2}$

- CMR tồn tại mặt cầu O tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp. Tính bán kính của mặt cầu
- (P) là mặt phẳng song song với (ABCD) và cách (ABCD) một khoảng x ( $0 < x < R$ ).  $S_{td}$  là diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp (bỏ đi phần diện tích nằm trong mặt cầu) Xác định x để  $S_{td} = \pi R^2$

**Câu 56)** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh đáy và chiều cao cùng bằng a. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC.

- Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SEBK
- Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp SEBK.

**Câu 57)** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, cạnh đáy có độ dài bằng a, cạnh bên tạo với cạnh đáy 1 góc  $30^\circ$ . Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

### ĐÁP SỐ:

Câu 1) ĐS:  $\frac{1}{2}$

Câu 10)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 33)  $d = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$

Câu 2) a)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ ; b)  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 11) a)  $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$ ; b)  $\frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$

Câu 34)  $V = \frac{2a^3}{27}$

Câu 3)  $\frac{16a^3}{45} S$

Câu 12)  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 35)  $V = \frac{R^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 4)  $8\sqrt{3}$

Câu 13)  $\frac{4a^3}{3\cos\alpha.\sin^2\alpha}$ ;  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 36)  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 5)  $V = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Câu 14)  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Câu 37)  $d = \frac{a\sqrt{10}}{30}$

Câu 6) b)  $V = 20\sqrt{5}$ ;  $V = 10\sqrt{5}$

Câu 15)  $V = \frac{4a^3}{9}$ ;  $d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 38)  $d = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 7)  $\frac{60\sqrt{34}}{17} (cm)$

Câu 16)  $V = \frac{3\sqrt{15}}{5} a^3$

Câu 39)  $h = \frac{a}{3}$

$$\text{Câu 8) } S = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} (dvdt)$$

$$\text{Câu 17) } V = \frac{9a^3}{208}$$

$$\text{Câu 40) } V = \frac{a^3}{36}$$

$$\text{Câu 18) } V=3a^3$$

$$\text{Câu 44) } \tan \alpha = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}; V_{A'B'B'CC'} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$$

$$\text{Câu 19) } V = \frac{a^3}{6}$$

$$\text{Câu 45) } V = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

$$\text{Câu 20) } AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Câu 46) } V_1 = \frac{a^3}{3}; V_2 = \frac{2a^3}{3}$$

$$\text{Câu 21) } V = 2a^3; h = \frac{3\sqrt{5}a}{10}$$

$$\text{Câu 47) } V = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16} (dvtt); S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{3}a^2}{2}$$

$$\text{Câu 22) } V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{Câu 49) } S_{TP} = 4\pi a^2; V = \pi a^3; V_{OOAB} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} (dvtt)$$

$$\text{Câu 23) } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Câu 50) } V = 7\sqrt{3}r^2$$

$$\text{Câu 24) } V = \frac{a^3}{16}$$

$$\text{Câu 30) } V = \frac{a^3}{2}; \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\text{Câu 25) a) } \frac{a\sqrt{3}}{4}; \text{b) } \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Câu 31) } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$$

$$\text{Câu 26) c) } \frac{a^3}{36}$$

$$\text{Câu 32) } d = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Câu 27) a) } \frac{a^3\sqrt{2}}{2}; \text{b) } \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{Câu 41) } V = \frac{3a^3}{16}$$

$$\text{Câu 28) } V = \frac{a\sqrt{3}a^3}{3}; \cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Câu 42) } V = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$$

$$\text{Câu 29) a) } a^3; \text{b) } \frac{a^3}{3}$$

$$\text{Câu 43) } V = \frac{\sqrt{3}a^3}{18}$$

$$\text{Câu 30) } V = \frac{a^3}{2}; \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

### BÀI TẬP VỀ MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI CHÓP

**Câu 1)** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S trùng với trọng tâm tam giác ABD. Mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính theo a thể tích của khối chóp SABCD và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABD.



**Câu 2)** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABCA'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$ . Gọi  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $AA', AB$  và  $BC$ . Biết góc tạo bởi  $(C'AI)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $NAC'I$  và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp  $C'AIB$

**Câu 3)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$   
 $AB = BC = a; AD = 2a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy  $(ABCD)$  và  $SA = a$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AD$ . Tính thể tích khối chóp  $SCDE$  và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp đó.

**Câu 4)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$  và đường cao là  $SH$  với  $H$  thỏa mãn  $\overrightarrow{HN} = -3\overrightarrow{HM}$ , trong đó  $M, N$  là trung điểm  $AB, CD$ . Mặt phẳng  $(SAB)$  tạo với đáy  $ABCD$  góc  $60^\circ$ . Tính khoảng cách từ  $N$  đến mặt phẳng  $(SAC)$  và xác định thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp  $SABCD$

**Câu 5)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật cạnh  $AB = a; AD = a\sqrt{2}$  góc giữa hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $ABCD$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ . Biết mặt bên  $SAB$  là tam giác cân tại đỉnh  $S$  và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp  $SABCD$  và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $SAHC$

**Câu 6)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A, B$  có  
 $AB = BC = a; AD = 2a$ ,  $SAC$  là tam giác cân tại  $S$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy,  $SB$  tạo với  $(SAC)$  góc  $60^\circ$ . Gọi  $O$  là giao điểm  $AC$  và  $BD$ . Giả sử mặt phẳng  $(P)$  qua  $O$  song song với  $SC$  cắt  $SA$  ở  $M$ . Tính thể tích khối chóp  $MBCD$  và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $SACD$

**Câu 7)** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = 2a; AB \perp (BCD); CB = CD = a; \widehat{BCD} = 120^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(ACD)$  và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$

**Câu 8)** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , lấy điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $M$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  tại  $D$  lấy điểm  $S$  sao cho  $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Gọi  $N$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên  $SA$ . Tính khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ . Chứng minh mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SAB)$  và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $NBCD$

**Câu 9)** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $DA = DB = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $CD$  vuông góc với  $AD$ . Trên cạnh  $CD$  kéo dài lấy điểm  $E$  sao cho  $\widehat{AEB} = 90^\circ$ . Tính góc tạo bởi mặt phẳng  $(ABC)$  và mặt phẳng  $(ABD)$ . Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối tứ diện  $ABCE$ .

**Câu 10)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $2a$ . Mặt bên  $(SAB)$  vuông góc với đáy  $(ABCD)$ . Biết  $SB = a\sqrt{3}; SA = a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD$ ,  $O$  là giao điểm  $AC$  và  $DB$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $SAMBN$  và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $SAMON$

**Câu 11)** Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng  $a\sqrt{2}$ . Lấy điểm H trên đoạn AC với  $AH=a/2$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại H lấy điểm S sao cho góc  $ASC=45^0$ . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD

**Câu 12)** Cho tứ diện ABCD có  $AB=AC=a$ ,  $BC=b$ . Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc với nhau và góc  $BDC=90^0$ . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a và b

**Câu 13)** Cho hình chóp SABC, biết  $SA=SB=SC=a$ .  $\widehat{ASB} = 60^0$ ;  $\widehat{BSC} = 90^0$ ;  $\widehat{CSA} = 120^0$ . Xác định tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp SABC.

**Câu 14)** Cho tam giác ABC vuông cân tại B với  $AB=a$ . Từ trung điểm M của AB ta dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), trên đó lấy điểm S sao cho SAB là tam giác đều. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

**Câu 15)** Cho tam giác vuông cân ABC với  $AB=AC=a$ .  $BB'$  và  $CC'$  là hai đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và ở cùng một phía so với (ABC),  $BB'=CC'=a$ . Tính thể tích khối chóp  $ABCC'B'$  và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $ABCC'B'$ .

**Câu 16)** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABCA'B'C'$  có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của  $AA'$ , AB, BC biết mặt phẳng (MNP) tạo với đáy ABC góc  $60^0$ . Tính thể tích khối chóp  $MNPC'$  và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $ABPC'$

### Một số bài tập tự luyện

1) Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  đáy là tam giác cân có  $BC=AB=a$ , góc  $\widehat{BAC} = \alpha$ . Mặt phẳng  $(BA'C')$  tạo với đáy lăng trụ một góc  $\beta = \frac{\pi}{6}$ .

Tính thể tích lăng trụ theo  $a, \alpha$

Tính diện tích  $BA'C'$  và tính khoảng cách từ đỉnh  $B'$  đến mặt phẳng  $(BA'C')$ .

2) Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng  $(ABC')$  tạo với mặt bên  $(BCC'B')$  một góc  $\alpha$ . Gọi I, J là hình chiếu của A lên BC và  $BC'$ .

Chứng minh  $\widehat{AIJ} = \alpha$

Tính theo a thể tích khối lăng trụ.

3) Cho lăng trụ đứng  $ABCA'B'C'$  đáy là tam giác đều. Tam giác  $ABC'$  có diện tích bằng  $\sqrt{3}$  và tạo với đáy một góc  $\alpha$  thay đổi  $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ . Tìm  $\alpha$  để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

4) Cho khối lăng trụ  $ABCA'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $C$ ,  $CA=CB=a$ . Mặt phẳng  $(AA'B)$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $AA' = a\sqrt{3}$ ,  $A' \hat{A}B$  nhọn. Góc của mặt phẳng  $(A'AC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ.

5) Cho lăng trụ xiên  $ABCA'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Hình chiếu vuông góc của  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với  $O$  là tâm đường tròn  $(ABC)$ . Biết  $\widehat{BAA'} = \frac{\pi}{4}$ . Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ theo  $a$ .

6) Cho lăng trụ xiên  $ABCA'B'C'$  có đáy tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  với  $AB=a$ ,  $BC=2a$ . Mặt bên  $ABB'A'$  là hình thoi, mặt bên  $BCC'B'$  nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, 2 mặt này tạo nhau 1 góc  $\alpha$ .

Xác định góc  $\alpha$

Tính theo  $a$  và  $\alpha$  thể tích hình lăng trụ.

7) Cho hình hộp xiên  $ABCA'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ .  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ ,  $AA'=A'B=AD$  và cạnh bên tạo với đáy góc  $\alpha$ .

Xác định góc  $\alpha$  và chân đường cao vẽ từ  $A'$

Tính thể tích  $V$  của hình hộp theo  $a$  và  $\alpha$ .

8) Cho  $ABCA'B'C'D'$  hình lập phương cạnh  $a$ . Lấy  $M$  trên cạnh  $AB$  với  $AM=x$  ( $0 < x < a$ ). Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M$  và  $A'C'$ .

Tính diện tích thiết diện tạo bởi  $(P)$  và hình lập phương

Tìm  $x$  để mặt phẳng  $(P)$  chia hình lập phương thành 2 khối đa diện mà thể tích khối này bằng 2 lần thể tích khối đa diện kia.

9) Trên các cạnh  $SA, SB$  của tứ diện  $SABC$  lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{NB} = 2$ . Một

mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $MN$  và song song với  $SC$  chia tứ diện thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

10) Cho khối chóp  $SABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông  $A, BC = a, SA = SB = SC = 2a$  và  $\widehat{ABC} = \alpha$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên  $BC$ .

Tính thể tích khối chóp  $SABC$  theo  $a$  và

Tính khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SAH)$ .

Cho  $(P)$  là mặt phẳng qua  $A$ , trọng tâm tam giác  $SBC$  và song song với  $BC$  chia khối chóp  $SABC$  thành 2 phần. Tính thể tích mỗi phần

11) Cho khối chóp  $DABC$  có mặt  $(DBC)$  vuông góc với đáy, các mặt bên  $(DAB)$  và  $(DAC)$  cùng hợp với đáy góc  $\alpha$  ( $\alpha < 90^\circ$ ). Tính thể tích của khối chóp trong các trường hợp sau

a)  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$  có  $AB = a, AC = 2a$ ;

b)  $ABC$  là tam giác đều có cạnh bằng  $a$ .

12) Cho hình chóp tứ giác đều  $SABCD$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $2a$ . Góc giữa các mặt bên và mặt đáy là  $\alpha$ .

Tính thể tích khối chóp theo  $a$  và  $\alpha$

Xác định  $\alpha$  để thể tích khối chóp nhỏ nhất.

13) Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AB, AD$ ,  $H$  là giao điểm của  $CN$  với  $DM$ . Biết  $SH$  vuông góc với  $(ABCD)$  và  $SH = \sqrt{3}$ . Tính thể tích khối chóp  $SCDNM$  và khoảng cách giữa  $DM$  và  $SC$  theo  $a$  (A 2010)

- 14)** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABCA'B'C'$  có  $AB=a$  góc tạo bởi  $(A'BC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $A'BC$ . Tính thể tích khối lăng trụ và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $GABC$  theo  $a$ . (B 2010)
- 15)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$ .  $SA=a$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  lên  $(ABCD)$  là điểm  $H$  thuộc  $AC$  sao cho  $AH = \frac{AC}{4}$ . Gọi  $CM$  là đường cao tam giác  $SAC$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm của  $SA$  và tính thể tích  $SMBC$  theo  $a$ . (D 2010)
- 16)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$ , hai đáy là  $AD = 2a$ ,  $BC = a$ . Biết  $AB = a$ ,  $SA = a$  và  $SA \perp (ABCD)$ .  
 Tính thể tích của khối chóp  $SACD$ .  
 Tính thể tích của khối chóp  $SBCD$  và khoảng cách  $d(B; (SCD))$
- 17)** Cho khối chóp  $SABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông  $A, BC = a, SA = SB = SC = 2a$  và  $\widehat{ABC} = \alpha$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên  $BC$ .
- 18)** Tính thể tích khối chóp  $SABC$  theo  $a$  và  
 a) Tính khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SAH)$ .  
 b) Cho  $(P)$  là mặt phẳng qua  $A$ , trọng tâm tam giác  $SBC$  và song song với  $BC$  chia khối chóp  $SABC$  thành 2 phần. Tính thể tích mỗi phần
- 19)** Cho khối chóp  $DABC$  có mặt  $(DBC)$  vuông góc với đáy, các mặt bên  $(DAB)$  và  $(DAC)$  cùng hợp với đáy góc  $\alpha (\alpha < 90^\circ)$ . Tính thể tích của khối chóp trong các trường hợp sau  
 a)  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$  có  $AB = a, AC = 2a$  ;  
 b)  $ABC$  là tam giác đều có cạnh bằng  $a$
- 20)** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABCA'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$ . Gọi  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $AA', AB$  và  $BC$ . Biết góc tạo bởi  $(C'AI)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $NAC'I$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $MN, AC'$
- 21)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$  cạnh  $\sqrt{5}a, AC = 4a$   
 $SO = 2\sqrt{2}a$  và  $SO$  vuông góc với đáy. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$ . Tính thể tích khối chóp  $SMDB$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BM$ .
- 22)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $O$  biết  $AB = a; BC = a\sqrt{3}$ , Tam giác  $SAO$  cân tại  $S$ , mặt bên  $SAD$  vuông góc với đáy  $ABCD$ . Biết  $SD$  hợp với đáy  $ABCD$  một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $SABCD$  và khoảng cách giữa  $SB$  và  $AC$
- 23)** Hình chóp  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B, AB = a, BC = 2a, SA = 2a$  và  $SA$  vuông góc với  $(ABC)$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ . Tính khoảng cách giữa  
 a)  $AB$  và  $SM$   
 b)  $BC$  và  $SM$
- 24)** Cho hình chóp  $SABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân đỉnh  $B$  với  $BC = a, SA = 2a$  và  $SA$  vuông góc với đáy  $ABC$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AC$  và  $SB$ . Tính khoảng cách giữa  
 a)  $AC$  và  $SB$   
 b)  $MN$  và  $BC$   
 c) Từ  $M$  đến  $(SBC)$
- 25)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Tam giác  $SAB$  đều và vuông góc với đáy. Gọi  $M, N, P$  là trung điểm của  $SB, BC, SD$ . Tính khoảng cách giữa  $AP$  và  $MN$ .