Chuyên đề 8:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

✓ Vấn đề 1: MẶT PHẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

TỌA ĐỘ

1. $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3) \Leftrightarrow \vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$
2. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
3. $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
4. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$
5. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
6. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
7. $\mathrm{Cos}(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$
8. $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$
9. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$
10. Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
11. Thể tích tứ diện ABCD: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|$
12. Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D': $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA'}\right|$

MẶT PHẲNG

- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là vectơ khác vectơ $\vec{0}$ và có giá vuông góc mặt phẳng.
- Phương trình tổng quát: (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$
- $(\alpha): \begin{cases} \text{đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{có vectơ pháp tuyến}: \vec{n} = (A; B; C) \end{cases}$

  $\Rightarrow (\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

♦ Mặt phẳng chắn: (α) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), (a, b, c khác 0)

$$(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

♦ Mặt phẳng đặc biệt: (Oxy): z = 0, (Oxz): y = 0, (Oyz): x = 0

ĐƯỜNG THẲNG

♦ Véctơ chỉ phương của đường thẳng là vectơ khác vectơ $\vec{0}$ và có giá cùng phương với đường thẳng.

♦ $d: \begin{cases} \text{đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{có vectơ chỉ phương } \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \end{cases}$

Phương trình tham số : $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$ với $(a_1; a_2; a_3 \neq 0)$

♦ Đường thẳng đặc biệt: $Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $Oy: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $Oz \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

B. ĐỀ THI

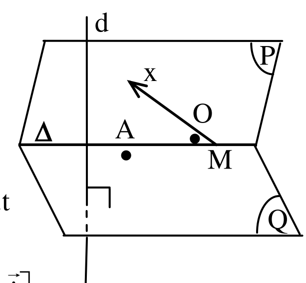
Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* , cho điểm A(1; 2; 3) và đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

Giải

- Gọi M là giao điểm của Δ với trục Ox $\Rightarrow$ M(m; 0; 0) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} = (m - 1; -2; -3)$
- Véctơ chỉ phương của d là $\vec{a} = (2; 1; -2)$.
- $\Delta \perp d \Leftrightarrow AM \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(m - 1) + 1(-2) - 2(-3) = 0 \Leftrightarrow m = -1$.
- Đường thẳng Δ đi qua M và nhận $\overrightarrow{AM} = (-2; -2; -3)$ làm vectơ chỉ phương

nên có phương trình: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$.



Cách 2.

- Δ đi qua A và cắt trục Ox nên Δ nằm trên mặt phẳng (P) đi qua A và chứa trục Ox.
- Δ đi qua A và vuông góc với d nên Δ nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với d.
- Ta có: +) Vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{i}\right]$.

+) Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \overrightarrow{a_d}$.

- $\Delta = (P) \cap (Q) \Rightarrow$ véctơ chỉ phương của Δ là: $\overrightarrow{a_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}\right]$.

Cách 3.

- Mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với d $\Rightarrow$ (Q): $2x + y - 2z + 2 = 0$.
- Gọi M là giao điểm của Ox và (Q) $\Rightarrow$ $M(-1; 0; 0)$.
- Véctơ chỉ phương của Δ là: $\overrightarrow{AM}$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

> Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2; 1; 1)$, $B(-3; -1; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

Giải

- Đường thẳng Δ đi qua $E(-2; 1; -5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 3; -2)$ nên

có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -5 - 2t \end{cases}$ $(t \in R)$.

- $M \in \Delta \Leftrightarrow M(-2+t;\ 1+3t; -5-2t)$
- $\overrightarrow{AB} = (-1; -2\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{AM} = (t;\ 3t; -6-2t)$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right] = (t+12; -t-6; -t)$.
- $S_{\Delta MAB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right]\right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(t+12)^2 + (t+6)^2 + t^2} = 6\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 36t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -12.$$

Vậy $M(-2; 1; -5)$ hoặc $M(-14; -35; 19)$.

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

Giải

Tọa độ giao điểm I của Δ với (P) thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1} \\ x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-3; 1; 1)$$

Vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (1; 2; -3)$; vectơ chỉ phương của Δ: $\vec{u} = (1; 1; -1)$

Đường thẳng d cần tìm qua I và có một vectơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{n_{(P_1)}} = (1; 2; 3), \overrightarrow{n_{(P_2)}} = (3; 2; -1)$$

Phương trình d: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - t \end{cases}$

Bài 4 :CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các mặt phẳng (P_1): $x + 2y + 3z + 4 = 0$ và (P_2): $3x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A(1; 1; 1), vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2)

Giải

Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2):

$$\vec{n}_{(P_1)} = (1; 2; 3), \vec{n}_{(P_2)} = (3; 2; -1)$$

(P) vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2)

$\Rightarrow$ (P) có một vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{n_{(P_1)}}, \overrightarrow{n_{(P_2)}}\right] = (-8; 10; -4) = -2(4; -5; 2)$

Mặt khác (P) qua A(1; 1; 1) nên phương trình mặt phẳng

$$(P): 4(x - 1) - 5(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

Hay $\quad (P): 4x - 5y + 2z - 1 = 0$

Bài 5: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có A(1; 1; 0), B (0; 2; 1) và trọng tâm G(0; 2; −1). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm C và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Giải

Ta có:

- G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow$ C(−1; 3; −4)
- $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (-2; 2; -4)$

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có một vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{a_\Delta} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = -6(1; 1; 0)$$

Mặt khác đường thẳng Δ đi qua điểm C nên

Phương trình Δ: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -4 \end{cases}$

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 3 điểm A(0; 1; 2), B(2; –2; 1), C(–2; 0; 1)
> 1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.
> 2. Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng 2x + 2y + z – 3 = 0 sao cho:
>
> MA = MB = MC.

Giải

1. $(ABC): \begin{cases} \text{đi qua } A(0;\ 1;\ 2) \\ \text{có vectơ pháp tuyến là } \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 2(1;\ 2;\ -4) \end{cases}$

Phương trình mp(ABC): $1(x - 0) + 2(y - 1) - 4(z - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 4z + 6 = 0$$

2. *Cách 1:*

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ nên điểm M nằm trên đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) tại trung điểm I(0; –1; 1) của BC.

$$d: \begin{cases} \text{qua } I(0;\ \ 1;\ 1) \\ \text{có vectơ chỉ phương } :\vec{a} = (1; 2; -4) \end{cases} \Rightarrow d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-4}$$

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -7 \end{cases}$

Vậy M(2; 3; –7).

Cách 2: Gọi M(x; y; z)

Ta có $\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \\ M \in (\alpha) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \\ (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x+2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 \\ 2x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow M(2;\ 3;\ -7).$$

Bài 7:CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1; 1; 3) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d.
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MOA cân tại đỉnh O

Giải

1. $(P):\begin{cases}\text{qua } A(1;\,1;\,3)\\ \text{có vectơ pháp tuyến } \overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{a_d}=(1;-1;2)\end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (P): $1(x-1)-(y-1)+2(z-3)=0$

$\Leftrightarrow x-y+2z-6=0$

2. Gọi $M(t;\,-t;\,2t+1)\in d$

- Tam giác OMA cân tại O $\Leftrightarrow MO^2=OA^2\Leftrightarrow t^2+t^2+(2t+1)^2=1+1+9$

$\Leftrightarrow 6t^2+4t-10=0\Leftrightarrow t=1\vee t=-\frac{5}{3}$

- Với t = 1 tọa độ điểm M(1; –1; 3).
- Với $t=-\frac{5}{3}$ tọa độ điểm $M\left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

Bài 8 :ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(1; 4; 2), B(–1; 2; 4) và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$

1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

Giải

1. Tọa độ trọng tâm: G(0; 2; 4). Ta có: $\overrightarrow{OA}=(1;\,4;\,2),\overrightarrow{OB}=(-1;\,2;\,2)$

Vectơ chỉ phương của d là: $\vec{u}=(12;\,-6;\;6)=6(2;\,-1;\,1)$

Phương trình đường thẳng d: $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{1}$

2/ Vì $M\in\Delta\Rightarrow M(1-t;\,-2+t;\,2t)$

$\Rightarrow MA^2+MB^2=(t^2+(6-t)^2+(2-2t)^2)+((-2+t)^2+(4-t)^2+(4-2t)^2)$

$=12t^2-48t+76=12(t-2)^2+28$

MA^2+MB^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow t=2$. Khi đó M(–1; 0; 4)

Bài 9: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}; \quad d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song d_1 và d_2.
2. Tìm tọa độ các điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho A, M, N thẳng hàng

Giải

1. Vectơ chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là: $\overrightarrow{u_1} = (2; 1; -1)$ và $\overrightarrow{u_2} = (1; -2; 1)$

   $\Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1; -3; -5)$

   Vì (P) qua A(0; 1; 2) $\Rightarrow$ (P) : $x + 3y + 5z - 13 = 0$.

   Do B(0; 1; –1) $\in d_1$, C(1; –1; 2) $\in d_2$ nhưng B, C $\notin$ (P), nên d_1, d_2 // (P).

   Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là (P): $x + 3y + 5z - 13 = 0$

2. Vì M $\in d_1$, N $\in d_2$ nên M(2m; 1+ m; –1– m), N(1 + n; –1–2n; 2 + n)

   $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2m; m; -3-m); \overrightarrow{AN} = (1+n; -2-2n; n)$.

   $\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = (-mn - 2m - 6n - 6; -3mn - m - 3n - 3; -5mn - 5m)$.

   A,M,N thẳng hàng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \vec{0}$

   $\Leftrightarrow m = 0, n = -1 \Rightarrow$ M(0; 1; –1), N(0; 1; 1).

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \qquad \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2.
2. Xác định điểm A $\in \Delta_1$, B $\in \Delta_2$ sao cho đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Giải

1. Δ_1 qua $M_1(1; -1; 2)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1} = (1; -1; 0)$

   Δ_2 qua M_2 (3; 1; 0) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = (-1; 2; 1)$

   - mp (P) chứa Δ_1 và song song với Δ_2 nên (p) có vectơ pháp tuyến:
     $\vec{n} = \left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] = (-1; -1; 1)$

Phương trình: (P): $-(x-1)-(y+1)+(z-2)=0$ (vì $M_1(1; -1; 2) \in (P)$)

$\Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$

2/ AB ngắn nhất $\Leftrightarrow$ AB là đoạn vuông góc chung

- Phương trình tham số Δ_1 : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = 2 \end{cases}$ $\quad A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1+t; -1-t; 2)$

- Phương trình tham số Δ_2: $\begin{cases} x = 3-t' \\ y = 1+2t' \\ z = t' \end{cases}$ $\quad B \in \Delta_2 \Rightarrow B(3-t'; 1+2t'; t')$

- $\overrightarrow{AB} = (2-t'-t; 2+2t'+t; t'-2)$

Do $\begin{cases} AB \perp \Delta_1 \\ AB \perp \Delta_2 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3t' = 0 \\ 3t + 6t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0$

$\Rightarrow A(1; -1; 2); B(3; 1; 0)$.

Bài 11:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(–4; –2; 4) và đường thẳng $d\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 1-t \\ z = -1+4t \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với d.

Giải

Lấy $M(-3 + 2t; 1 - t; -1 + 4t) \in (d) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1 + 2t; 3 - t; -5 + 4t)$

Ta có $AM \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{a_d} = 0$ với $\overrightarrow{a_d} = (2; -1; 4)$

$\Leftrightarrow 2 + 4t - 3 + t - 20 + 16t = 0 \Leftrightarrow 21t = 21 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy đường thẳng cần tìm là đường thẳng AM qua A có vevtơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{AM} = (3; 2; -1)$ nên phương trình (Δ): $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

✓ *Vấn đề 2:* HÌNH CHIẾU VÀ ĐỐI XỨNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

HÌNH CHIẾU

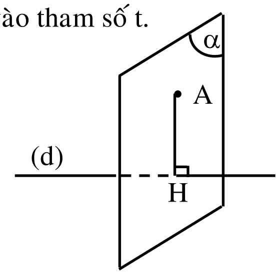
Bài toán 1: Tìm hình chiếu H của điểm A trên đường thẳng (d).

Phương pháp

- *Cách 1:* (d) cho bởi phương trình tham số:

– $H \in (d)$ suy ra dạng tọa độ của điểm H phụ thuộc vào tham số t.

– Tìm tham số t nhờ điều kiện $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{a_d}$



- *Cách 2:*

(d) cho bởi phương trình chính tắc.

Gọi H(x, y, z)

– $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{a_d}$ (*)

– $H \in (d)$: Biến đổi tỉ lệ thức này để dùng điều kiện (*), từ đó tìm được x, y, z

- *Cách 3:*

(d) cho bởi phương trình tổng quát:

– Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d)

– Giao điểm của (d) và (α) chính là hình chiếu H của A trên (d).

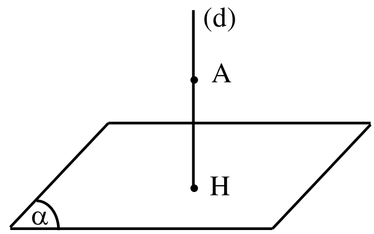
Bài toán 2: Tìm hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (α).

Phương pháp

- *Cách 1:* Gọi H(x; y; z)

– $H \in (\alpha)$ (*)

– $\overrightarrow{AH}$ cùng phương $\overrightarrow{n_\alpha}$: Biến đổi tỉ lệ thức này để dùng điều kiện (*), từ đó tìm được x, y, z.



- *Cách 2:*

– Tìm phương trình đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α).

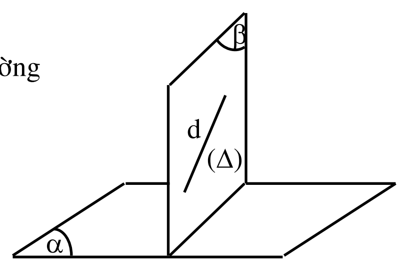
– Giao điểm của (d) và (α) chính là hình chiếu H của A trên mặt phẳng (α).

Bài toán 3: Tìm hình chiếu (Δ) của đường thẳng d xuống mặt phẳng (α).

Phương pháp

– Tìm phương trình mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α).

– Hình chiếu (Δ) của d xuống mặt phẳng α chính là giao tuyến của (α) và (β).



ĐỐI XỨNG

Bài toán 1: Tìm điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d.

Phương pháp

– Tìm hình chiếu H của A trên d.

– H là trung điểm AA'.

Bài toán 2: Tìm điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (α).

Phương pháp

– Tìm hình chiếu H của A trên (α).

– H là trung điểm AA'.

Bài toán 3: Tìm phương trình đường thẳng d đối xứng với đường thẳng (D) qua đường thẳng (Δ).

Phương pháp

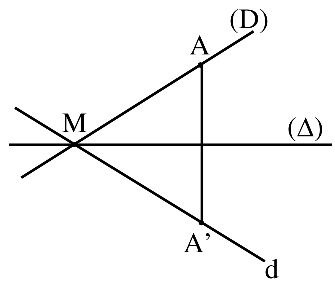
- *Trường hợp 1:* (Δ) và (D) cắt nhau.

– Tìm giao điểm M của (D) và (Δ).

– Tìm một điểm A trên (D) khác với điểm M.

– Tìm điểm A' đối xứng với A qua (Δ).

– d chính là đường thẳng đi qua 2 điểm A' và M.

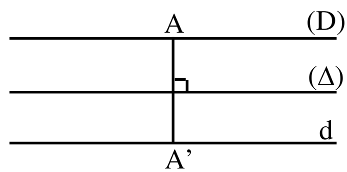


- *Trường hợp 2:* (Δ) và (D) song song:

– Tìm một điểm A trên (D)

– Tìm điểm A' đối xứng với A qua (Δ)

– d chính là đường thẳng qua A' và song song với (Δ).



Bài toán 4: Tìm phương trình đường thẳng d đối xứng với đường thẳng (D) qua mặt phẳng (α).

Phương pháp

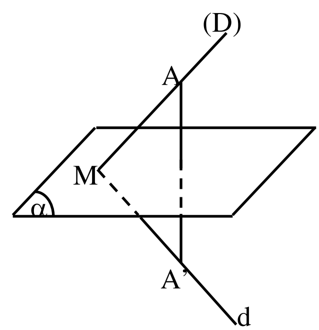
- *Trường hợp 1:* (D) cắt (α)

– Tìm giao điểm M của (D) và (α).

– Tìm một điểm A trên (D) khác với điểm M.

– Tìm điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (α).

– d chính là đường thẳng đi qua hai điểm A' và M.

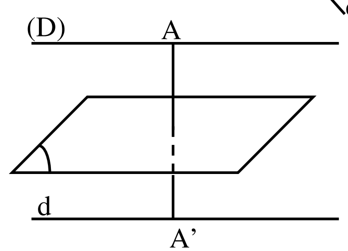


- *Trường hợp 2:* (D) song song với (α).

– Tìm một điểm A trên (D)

– Tìm điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (α).

– d chính là đường thẳng qua A' và song song với (D).



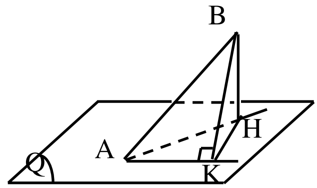
B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0;1)$, $B(1; -1; 3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P)



Phương trình (Q): $x - 2y + 2z + 1 = 0$

K, H là hình chiếu của B trên Δ, (Q).

Ta có $BK \ge BH$ nên AH là đường thẳng cần tìm

Tọa độ H = (x; y; z) thỏa mãn: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{2} \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9}; \dfrac{11}{9}; \dfrac{7}{9}\right)$

$\overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{26}{9}; \dfrac{11}{9}; -\dfrac{2}{9}\right)$. Vậy, phương trình Δ: $\dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;2;3) và hai đường thẳng: $d_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$; $d_2 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

1/ Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1.

2/ Viết phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

Giải

1/ Mặt phẳng (α) đi qua A(1; 2; 3) và vuông góc với d_1 có phương trình là:

$$2(x - 1) - (y - 2) + (z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0.$$

Tọa độ giao điểm H của d_1 và (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \Rightarrow H(0; -1; 2) \\ z = 2 \end{cases}$$

Vì A' đối xứng với A qua d_1 nên H là trung điểm của AA'$\Rightarrow$ A'(–1; –4; 1)

2/ Viết phương trình đường thẳng Δ:

Vì A' đối xứng với A qua d_1 và cắt d_2, nên Δ đi qua giao điểm B của d_2 và (α).

Tọa độ giao điểm B của d_2 và (α) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}\\ 2x-y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\Rightarrow B(2;-1;-2)\\ z=-2\end{cases}$$

Vectơ chỉ phương của **Δ** là: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1;-3;-5)$

Phương trình của Δ là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$

Bài 3: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(0; 2; 0), A'(0; 0; 2)

1/ Chứng minh A'C vuông góc với BC'. Viết phương trình mặt phẳng (ABC')

2/ Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B'C' trên mặt phẳng (ABC')

Giải

1/ A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(0; 2; 0), A'(0; 0; 2) $\Rightarrow$ C'(0; 2; 2)

Ta có: $\overrightarrow{A'C}=(0;2;-2),\ \overrightarrow{BC'}=(-2;2;2)$

Suy ra $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BC'}=0+4-4=0\Rightarrow A'C\perp BC'$

Ta có: $\begin{cases}A'C\perp BC'\\ A'C\perp AB\end{cases}\Rightarrow A'C\perp(ABC')$

Suy ra (ABC') qua A(0; 0; 0) và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{A'C}=(0;2;-2)$ nên có phương trình là: (ABC') 0(x – 0) + 2(y – 0) – 2(z – 0) = 0 $\Leftrightarrow$ y – z = 0

2/ Ta có: $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}=(-2;2;0)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa B'C' và vuông góc với (ABC')

$\Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{A'C}\right]=-4(1;1;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình (α): 1(x – 0) + 1(y – 2) + 1(z – 2) = 0 $\Leftrightarrow$ x + y + z – 4 = 0

Hình chiếu d của B'C' lên (ABC') là giao tuyến của (α) với (ABC')

$\Rightarrow$ Phương trình d: $\begin{cases}x+y+z-4=0\\ y-z=0\end{cases}$

Bài 4: ĐỀ DỰ BỊ 1

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD $A_1B_1C_1D_1$ có A trùng với gốc tọa độ O, B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), $A_1(0;0;\sqrt{2})$.

a/ Viết phương trình mp(P) đi qua 3 điểm A_1, B, C và viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B_1D_1 lên mặt phẳng (P).

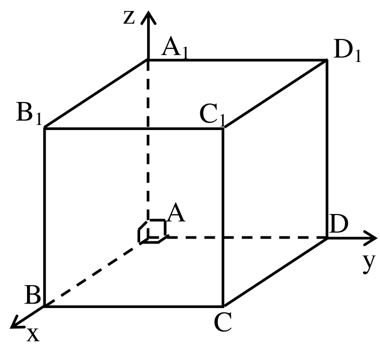
b/ Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với A_1C. Tính diện tích thiết diện của hình chóp A_1ABCD với mặt phẳng (Q).

Giải

Ta có: A(0; 0; 0); B_1 (1; 0; $\sqrt{2}$); C_1 (1; 1; $\sqrt{2}$); D_1 (0; 1; $\sqrt{2}$)

a/ $\overrightarrow{A_1B}=\left(1;\,0;\,-\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{A_1C}=\left(1;\,1;\,-\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow\ \vec{n}_P=\left[\overrightarrow{A_1B};\,\overrightarrow{A_1C}\right]=\left(\sqrt{2};\,0;\,1\right)$



$\Rightarrow$ (P) qua A_1 và nhận $\vec{n}_P$ làm vectơ pháp tuyến

(P): $\sqrt{2}\left(x-0\right)+0\left(y-0\right)+1\left(z-\sqrt{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}.x+z-\sqrt{2}=0$

Ta có $\overrightarrow{B_1D_1}=\left(-1;\ 1;\ 0\right)$

- Mặt phẳng (α) qua B_1 (1; 0; $\sqrt{2}$)

  nhận $\vec{n}_\alpha=\left[\vec{n}_P,\,\overrightarrow{B_1D_1}\right]=\left(-1;-1;\,\sqrt{2}\right)$

  làm vectơ pháp tuyến. Nên (α) có phương trình:

  (α): $-1(x-1)-1(y-0)+\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0$

  $\Leftrightarrow\ x+y-\sqrt{2}z-1=0$

  D_1B_1 có hình chiếu lên (P) chính là giao tuyến của (P) và (α)

  Phương trình hình chiếu là: $\begin{cases}x+y-\sqrt{2}z-1=0\\ \sqrt{2}x+z-\sqrt{2}=0\end{cases}$

b/ Phương trình mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với A_1C:

$$(Q):\ x+y-\sqrt{2}\,z=0 \qquad (1)$$

- Phương trình A_1C : $\begin{cases}x=0+t & (2)\\ y=0+t & (3)\\ z=\sqrt{2}-\sqrt{2}t & (4)\end{cases}\quad \left(t\in\mathbb{R}\right)$

- Gọi M = $A_1C\cap$ (Q) thay (2) (3) (4) vào (1) ta được

$$1+t-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Tương tự $A_1D\cap(Q)=N\left(0;\,\dfrac{2}{3};\,\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$; $A_1B\cap(Q)=L\left(\dfrac{2}{3};\,0;\,\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

- $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(1;1;\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\left(2;0;\sqrt{2}\right) \Rightarrow \quad \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AL}\right] = \frac{1}{6}\left(\sqrt{2};\sqrt{2};-2\right)$

  $S_{\Delta AML} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AL}\right]\right| = \frac{\sqrt{2}}{6}$

- $\overrightarrow{NL} = \frac{2}{3}(1;-1;0)$ và $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{6}\left(3;-1;\sqrt{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{NL},\overrightarrow{NM}\right] = \frac{-\sqrt{2}}{9}\left(1;1;-\sqrt{2}\right)$

  $S_{\Delta NML} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{NL},\overrightarrow{NM}\right]\right| = \frac{\sqrt{2}}{9}$ (đvdt)

Vậy diện tích thiết diện hình chóp A_1ABCD với (Q) là:

$$S = S_{\Delta AML} + S_{\Delta NLM} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{9} = \frac{5\sqrt{2}}{18} \text{ (đvdt)}$$

Bài 5: ĐỀ DỰ BỊ 2

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các điểm A(2; 0; 0), B(2; 2; 0), S(0; 0; m)

a/ Khi m = 2. Tìm tọa độ điểm C đối xứng với gốc tọa độ O qua mặt phẳng (SAB).

b/ Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SA. Chứng minh rằng với mọi m > 0 thì diện tích tam giác OBH nhỏ hơn 2.

Giải

a/ Khi m = 2. Ta có:

- $\overrightarrow{SA} = 2(1;0;-1)$, $\overrightarrow{SB} = 2(1;1;-1)$, $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right] = 4(1;0;1)$
- Mặt phẳng (SAB) qua A(0; 0; 2) và có $\vec{n} = 4(1;0;1)$, (SAB): x + z – 2 = 0 (1)
- d đi qua O và d ⊥ (SAB) ⇒ $\overrightarrow{a_d} = (1;\ 0;\ 1)$.

  Phương trình tham số d: $\begin{cases} x = t \ (2) \\ y = 0 \ (3) \\ z = t \ (4) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

- I = d ∩ (SAB) ta thay (2), (3), (4) vào (1) ⇒ t = 1 ⇒ I(1; 0; 1)
- Vì C, O đối xứng qua (SAB) nên I là trung điểm OC

  $$\begin{cases} x_C = 2x_I - x_O = 2 \\ y_C = 2y_I - y_O = 0 \\ z_C = 2z_I - z_O = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2;0;2)$$

b/ • Phương trình mặt phẳng (α) qua O và vuông góc SA (nhận $\overrightarrow{SA}$ làm vectơ pháp tuyến) (α): 2x – mz = 0 (1)

- Phương trình tham số SA: $\begin{cases} x = 0 + 2t & (2) \\ y = 0 & (3) \\ z = m - mt & (4) \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Thay (2), (3), (4) vào (1): $4t - m^2 + m^2t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{m^2}{m^2+4}$

$\Rightarrow SA \cap (\alpha) = H\left(\dfrac{2m^2}{m^2+4};\ 0;\ \dfrac{4m}{m^2+4}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH} = \left(\dfrac{2m^2}{m^2+4}; 0; \dfrac{4m}{m^2+4}\right) = \dfrac{2m}{m^2+4}\ (m; 0; 2)$; $\overrightarrow{OB} = (2; 2; 0) = 2(1; 1; 0)$

- $\left[\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB}\right] = \dfrac{4m}{m^2+4}\ (-2; 2; m)$

- $S_{\Delta OBH} = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB}\right]\right\| = \dfrac{2m}{m^2+4}\sqrt{8+m^2} = 2\sqrt{\dfrac{m^4+8m^2}{m^4+8m^2+16}} < 2$ (đpcm)

Bài 6:

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

a/ Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song đường thẳng Δ_2.

b/ Cho điểm M(2; 1; 4). Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

Giải

a/ Ta có $\vec{a}_{\Delta_1} = (2; 3; 4)$, $\vec{a}_{\Delta_2} = (1; 1; 2)$, Δ_1 qua $M(0;\ -2;\ 0)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\left[\vec{a}_{\Delta_1}, \vec{a}_{\Delta_2}\right] = (2; 0; -1)$

Vậy (P) qua M(0; –2; 0), và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 0; -1)$

Nên phương trình (P): $2(x - 0) + 0\ (y + 2) - 1\ (z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - z = 0$

b/ $MH_{min} \Leftrightarrow MH \perp \Delta_2 \Leftrightarrow$ H là hình chiếu của điểm M trên Δ_2

<u>Cách 1</u>: Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và vuông góc với Δ_2

Phương trình (Q): $x + y + 2z - 11 = 0$

$\{H\} = (Q) \cap \Delta_2 \Rightarrow H(2; 3; 3)$

Cách 2: $\overrightarrow{MH} = (-1+t; 1+t; -3+2t)$ với $H \in \Delta_2$

Do $\overrightarrow{MH} . \vec{a}_{\Delta_2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy điểm H(2; 3; 3).

Bài 7: ĐỀ DỰ BỊ 2

> Trong không gian với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz.
> Cho mặt phẳng (P): x – y + z + 3 = 0 và 2 điểm A (–1; –3; –2), B (–5; 7; 12).
> **a/** Tìm tọa độ điểm A' điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).
> **b/** Giả sử M là một điểm chạy trên mặt phẳng (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA + MB.

Giải

a/ (P): x – y + z + 3 = 0 (1) $\Rightarrow \overrightarrow{n_p} = (1; -1; 1)$

Gọi d qua A và d ⊥ P $\Rightarrow \overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{n_p} = (1; -1; 1)$

d qua A(–1; –3; –2) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = (1; -1; 1)$

Phương trình d: $\begin{cases} x = -1 + t & (2) \\ y = -3 - t & (3) \\ z = -2 + t & (4) \end{cases}$ thay (2), (3), (4) vào (1) ta được: t = –1

Ta có AA' ∩ (P) = H(–2; –2; –3)

- Vì H là trung điểm AA' (A' là điểm đối xứng A qua (P)

Ta có: $\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = -1 \\ z_{A'} = -4 \end{cases} \Rightarrow A'(-3; -1; -4)$

b/ Gọi f(x; y; z) = x – y + z + 3

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(1;\ 3;\ 2) = 1 + 3 - 2 + 3 = 3 > 0 \\ \bullet\ f(-5; 7; 12) = -5 - 7 + 12 + 3 = 3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ A, B cùng phía đối với (P)

Do A, A' đối xứng qua (P) ⇒ MA = MA'

Ta có: MA + MB = MA' + MB ≥ A'B = 18

Vậy giá trị nhỏ nhất của MA + MB = 18 xảy ra ⇔ A, B, M thẳng hàng

⇔ M = A'B ∩ (P) ⇔ M(–4; 3; 4).

✓ *Vấn đề 3:* KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1: Tính khoảng cách từ điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng (α).

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

Phương pháp

$$d(M,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Bài toán 2: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ).

Phương pháp

– Tìm hình chiếu H của M trên (Δ).

– Khoảng cách từ M đến (Δ) chính là độ dài đoạn MH.

Bài toán 3: Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng song song d_1 và d_2.

Phương pháp

– Tìm một điểm A trên d.

– Khoảng cách giữa d_1 và d_2 chính là khoảng cách từ điểm A đến d_2.

Bài toán 4: Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song

(α): $\quad Ax + By + Cz + D_1 = 0$

Và (β): $\quad Ax + By + Cz + D_2 = 0$

Phương pháp

Khoảng cách giữa (α) và (β) được cho bởi công thức:

$$d((\alpha),(\beta)) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Bài toán 5: Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.

Phương pháp

- *Cách 1:*

– Tìm phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song với d_2.

– Tìm một điểm A trên d_2.

– Khi đó $d(d_1, d_2) = d(A, (\alpha))$

- *Cách 2:*

– Tìm phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song với d_2.

– Tìm phuơng trình mặt phẳng (β) chứa d_2 và song song với d_1.

– Khi đó $d(d_1, d_2) = d((\alpha), (\beta))$

+ *Ghi chú:*

Mặt phẳng (α) và (β) chính là 2 mặt phẳng song song với nhau và lần lượt chứa d_1 và d_2.

- *Cách 3:*

– Viết d_2 dưới dạng phương trình tham số theo t_1.

– Viết d_2 dưới dạng phương trình tham số theo t_2.

– Xem $A \in d_1 \Rightarrow$ dạng tọa độ A theo t_1.

– Xem $B \in d_2 \Rightarrow$ dạng tọa độ B theo t_2.

– Tìm vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ lần lượt của d_1 và d_2.

– AB là đoạn vuông góc chung d_1 và d_2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{a_2} \end{cases} \text{ tìm được } t_1 \text{ và } t_2.$$

– Khi đó $d(d_1, d_2) = AB$

- *Cách 4 :* $d\left(d_1, d_2\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right]\right|}$

GÓC

Cho 2 đường thẳng d và d' có phương trình:

$$d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

$$d': \frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0'}{b'} = \frac{z - z_0'}{c'} \qquad \left(a'^2 + b'^2 + c'^2 \neq 0\right)$$

Cho 2 mặt phẳng α và β có phương trình:

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

$$(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad \left(A'^2 + B'^2 + C'^2 \neq 0\right)$$

1. Góc giữa hai đường thẳng d và d':

$$\cos\varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

2. Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β):

$$\cos\varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

3. Góc giữa hai đường thẳng d và mặt phẳng (α):

$$\sin\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm A(2; 0; 1), B(0;–2; 3) và mặt phẳng (P): 2x – y – z + 4 = 0.

Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MA = MB = 3.

Giải

Giả sử M(x; y; z).

- $M \in (P) \Leftrightarrow 2x - y - z + 4 = 0$ (1).
- $MA = MB \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = x^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2$
  $\Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$ (2).
- Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y - z = -2x - 4 & \text{(a)} \\ y - z = -x - 2 & \text{(b)} \end{cases}$

  Lấy (a) trừ (b) được: $y = \frac{x+2}{2}$. Lấy (a) cộng (b) được: $z = \frac{3x+6}{2}$
- $MA = 3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$

  $\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x+6}{2} - 1\right)^2 = 9$

  $\Leftrightarrow 14x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{6}{7}$

  Với x = 0, suy ra y = 1 và z = 3.

  Với $x = -\frac{6}{7}$, suy ra $y = \frac{4}{7}$ và $z = \frac{12}{7}$.

  Vậy M(0; 1; 3) hay $M\left(-\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

Cách 2 :

- MA = MB ⇔ M nằm trên mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn AB
- Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm I(1; –1; 2) của đoạn AB và có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IA} = (1; 1; -1)$ nên có phương trình $x + y - z + 2 = 0$.
- Mặt khác M còn nằm trên mặt phẳng (P) nên M nằm trên giao tuyến Δ của (P) và (Q)

- Giao tuyến Δ đi qua A(0; 1; 3) và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;1;3)$ nên có

phương trình $\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=3+3t \end{cases} \quad (t\in R)$

- Vì M∈ Δ nên M(2t; 1 + t; 3 + 3t)
- MA = 3 ⇔ $(2-2t)^2+(-1-t)^2+(-2-3t)^2=9$ ⇔ t = 0 hoặc t = $-\dfrac{3}{7}$

Vậy M(0; 1; 3) hay $M\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$.

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

> Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): x + y + z – 3 = 0. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và MI = $4\sqrt{14}$.

Giải

- I là giao điểm của Δ và (P) nên tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-1} \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2} \\ \dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-1} \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

. Suy ra: I(1; 1; 1).

- Giả sử M(x; y; z), thì: $\overrightarrow{IM}=(x-1;y-1;z-1)$.
- Véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ là: $\vec{a}=(1;-2;-1)$.
- Theo giả thiết ta có:

  +) M ∈ (P) ⇔ x + y + z – 3 = 0 (1)

  +) MI ⊥ Δ ⇔ $\overrightarrow{IM}\perp\vec{a}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\vec{a}=0$ ⇔ 1(x – 1) – 2(y – 1) – 1(z – 1) = 0

  ⇔ x – 2y – z + 2 = 0 (2).

  +) MI = $4\sqrt{14}$ ⇔ $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=224$ (3) .

- Lấy (1) cộng (2) ta được: 2x – y – 1 = 0 ⇔ y = 2x – 1.
- Thế y = 2x – 1 vào (1) ta được: x + (2x – 1) + z – 3 = 0 ⇔ z = 4 – 3x.
- Thế y = 2x – 1 và z = 4 – 3x vào (3) ta được:

  $(x-1)^2+(2x-2)^2+(3-3x)^2=224 \Leftrightarrow (x-1)^2=16$ ⇔ x = 5 hoặc x =–3 .

  Với x = 5 thì y = 9 và z = –11. Với x = –3 thì y = –7 và z = 13.

  Vậy M(5; 9; –11) hoặc M(–3; –7; 13).

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): x − 2y + z = 0. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết MC = $\sqrt{6}$.

Giải

Ta có: $C \in \Delta$ nên C (1 + 2t; t; −2 − t) với $t \in \mathbb{R}$

$C \in (P)$ nên $(1 + 2t) - 2t - 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Do đó C (−1; −1; −1)

$M \in \Delta$ nên M (1 + 2m; m; −2 − m) $(m \in \mathbb{R})$

$MC^2 = 6 \Leftrightarrow (2m + 2)^2 + (m + 1)^2 + (-m - 1)^2 = 6 \Leftrightarrow 6(m + 1)^2 = 6 \Leftrightarrow m + 1 = \pm 1$

$\Leftrightarrow m = 0$ hay $m = -2$

Vậy M_1 (1; 0; −2) ; M_2 (−3; −2; 0)

Do đó: $d(M_1, (P)) = \dfrac{|1-0-2|}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $d(M_2, (P)) = \dfrac{|-3+4+0|}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A (1; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c), trong đó b, c dương và mặt phẳng (P): y − z + 1 = 0. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{1}{3}$.

Giải

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bc.x + cy + bz - bc = 0$

Vì d (O, ABC) = $\dfrac{1}{3}$ nên $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2c^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 9b^2c^2 = b^2c^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 8b^2c^2$ (1)

(P): y − z + 1 = 0 có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (0; 1; -1)$.

(ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (bc; c; b)$.

Vì (P) vuông góc với (ABC) nên $\vec{n} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow c - b = 0$ (2).

Từ (1), (2) và b, c > 0 suy ra: b = c = $\dfrac{1}{2}$.

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM.

Giải

Ta có $M \in Ox \Leftrightarrow M(m; 0; 0)$ ($m \in \mathbb{R}$) suy ra $OM = |m|$.

Đường thẳng Δ qua N (0; 1; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 1; 2)$.

$\overrightarrow{NM} = (m; -1; 0) \Rightarrow \left[\vec{a}, \overrightarrow{NM}\right] = (2;\ 2m;\ -2-m)$

Ta có: $d(M, \Delta) = OM \Leftrightarrow \dfrac{\left|\left[\vec{a}, \overrightarrow{NM}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|} = OM \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{5m^2+4m+8}}{3} = |m|$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hay } m = 2.$$

Vậy M (–1; 0; 0) hay M (2; 0; 0).

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$ và (Q): $x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông gócvới (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

Giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1;\ 1;\ 1)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{m}_{(Q)} = (1; -1;\ 1)$.

Mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) nên có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{k}_{(R)} = \left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{m}_{(Q)}\right] = (2; 0; -2) = 2(1;\ 0; -1)$$

Do đó phương trình (R) có dạng : $x - z + D = 0$.

Ta có: $d(O; (R)) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow D = \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình (R): $x - z + 2\sqrt{2} = 0$ hay $x - z - 2\sqrt{2} = 0$

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{và } \Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}.$$

Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

Giải

$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3 + t; t; t)$

Δ_2 qua A(2; 1; 0) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = (2;\ 1;\ 2)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (1+t;\ t-1;\ t) \Rightarrow [\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{AM}] = (2-t;\ 2;\ t-3)$

Giả thiết cho: $d(M; \Delta_2) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|[\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{AM}]\right|}{\left|\overrightarrow{a_2}\right|} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2-t)^2 + 4 + (t-3)^2}}{\sqrt{4+1+4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2t^2 - 10t + 17} = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ hay } t = 4$$

$t = 1 \Rightarrow M(4;\ 1;\ 1); t = 4 \Rightarrow M(7;\ 4;\ 4)$

Bài 6: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 2 = 0$.

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (P).

Giải

1. d qua A (0; 1; 0) có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{a}_d = (-2; 1; 1)$

(P) có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 2)$

(α) chứa d và vuông góc với (P) nên:

(α) qua A (0; 1; 0) và có 1 vectơ chỉ phương:

$$\vec{n}_{(\alpha)} = \left[\vec{a}_{(d)}, \vec{n}_{(P)}\right] = 3(1;\ 2;\ 0)$$

Phương trình mặt phẳng (α): $(x - 0) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$

2. $M \in d \Rightarrow M(-2t; 1 + t; t)$

M cách đều O và (P) $\Leftrightarrow OM = d(M, (P))$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4t^2 + (1+t)^2 + t^2} = \frac{|2(-2t) - (1+t) + 2(t) - 2|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6t^2 + 2t + 1} = |t+1| \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow M(0; 1; 0)$$

Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng Δ_1: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$; Δ_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Giải

Δ_2 qua A(1; 3; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$

$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(-1 + t; t; -9 + 6t)$

$$\overrightarrow{MA} = (2-t; 3-t; 8-6t), \left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}\right] = (8t - 14; 20 - 14t; t - 4)$$

$\Rightarrow \left\|\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]\right\| = 3\sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ M đến Δ_2: $d\left(M,\Delta_2\right) = \dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]\right\|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}$

Khoảng cách từ M đến (P): $d\left(M,(P)\right) = \dfrac{\left|-1 + t - 2t + 12t - 18 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \dfrac{\left|11t - 20\right|}{3}$

Giả thiết suy ra: $\sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \dfrac{\left|11t - 20\right|}{3}$

$$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{53}{35}$$

Ta có $t = 1 \Rightarrow M(0; 1; -3)$; $t = \dfrac{53}{35} \Rightarrow M\left(\dfrac{18}{35}; \dfrac{53}{35}; \dfrac{3}{35}\right)$

Bài 8: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1; 2; 1), B(–2; 1; 3), C(2; –1; 1) và D(0; 3; 1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Giải

Mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (P) qua A, B và song song với CD

Vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]$

$\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; 4; 0) \Rightarrow \vec{n} = -2(4; 2; 7)$

Phương trình (P): $4x + 2y + 7z - 15 = 0$

Trường hợp 2: (P) qua A, B và cắt CD. Suy ra (P) cắt CD tại trung điểm I của CD.

Ta có I(1; 1; 1) $\Rightarrow \overrightarrow{AI} = (0; -1; 0)$; vectơ pháp tuyến của (P):

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right] = (2; 0; 3)$

Phương trình (P): $2x + 3z - 5 = 0$

Vậy (P): $4x + 2y + 7z - 15 = 0$ hoặc (P): $2x + 3z - 5 = 0$

Bài 9: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$$

1/ Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

2/ Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Giải

1/ Gọi H(1 + 2t; t; 2 + 2t) ∈ d.

- $\overrightarrow{AH} = (2t - 1;\ t - 5;\ 2t - 1)$
- Vectơ chỉ phương của d: $\vec{a} = (2;\ 1;\ 2)$
- Yêu cầu bài toán: $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow 2(2t - 1) + (t - 5) + 2(2t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3;\ 1;\ 4)$ là hình chiếu của A lên d.

2/ Phương trình tổng quát của d: $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Cách 1: (α) chứa d nên: (α): $m(x - 2y - 1) + n(2y - z + 2) = 0\ (m^2 + n^2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow mx + (2n - 2m)y - nz - m + 2n = 0$

$$d(M,(\alpha)) = \frac{|-9m + 9n|}{\sqrt{5m^2 + 5n^2 - 8mn}}$$

Vì (α) chứa d và d(M, (α)) lớn nhất ⇒ d(M, (α)) = AH

$$\Leftrightarrow \frac{|9n - 9m|}{\sqrt{5m^2 + 5n^2 - 8mn}} = \sqrt{1 + 16 + 1}$$

$\Leftrightarrow 9(n - m)^2 = 2(5m^2 + 5n^2 - 8mn) \Leftrightarrow m^2 + n^2 + 2mn = 0$

Chọn $n = -1 \Rightarrow m = 1$

Vậy (α): x – 4y + z – 3 = 0.

Cách 2: Mặt phẳng (α) chứa d và d(A; (α)) lớn nhất

⇔ (α) đi qua H và vuông góc AH.

$$(\alpha): \begin{cases} \text{đi qua } H(3;\ 1;\ 4) \\ \text{có vectơ pháp tuyến: } \overrightarrow{AH} = (1;\ -4;\ 1) \end{cases}$$

⇒ Phương trình (α): $1(x - 3) - 4(y - 1) + 1(z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0$.

Bài 10: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1/ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

2/ Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Giải

1/ Gọi (P) là mặt phẳng chứa A'C và song song với MN. Khi đó:

d(A'C, MN) = d(M, (P)).

Ta có: C(1; 1; 0), $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$, $\overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1)$, $\overrightarrow{MN}(0; 1; 0)$

$$\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (1; 0; 1)$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A'(0; 0; 1), có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; 1)$ có phương trình là: 1.(x – 0) + 0.(y – 0) + 1.(z – 1) = 0 ⇔ x + z – 1 = 0.

Vậy d(A'C, MN) = d(M, (P)) = $\dfrac{\left|\frac{1}{2} + 0 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Cách khác: d(A'C,MN) = $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right]\overrightarrow{A'M}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right]\right|} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

2/ Gọi mặt phẳng cần tìm là (Q): ax + by + cz + d = 0 $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$.

Vì (Q) đi qua A'(0; 0; 1) và C(1; 1; 0) nên $\begin{cases} c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = -d = a + b$

Do đó phương trình (Q) có dạng: ax + by + (a + b)z – (a + b) = 0

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; a + b)$

Mặt phẳng Oxy có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Vì góc giữa (Q) và (Oxy) là α mà $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ nên $\left|\cos\left(\vec{n}, \vec{k}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a + b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow 6(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2 + ab)$$

⇔ a = –2b hoặc b = –2a.

Với a = –2b, chọn b = –1, được mặt phẳng (Q_1): 2x – y + z – 1 = 0

Với b = –2a, chọn a = 1, được mặt phẳng (Q_2): x – 2y – z + 1 = 0

Bài 11: ĐỀ DỰ BỊ 2- ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(1; 2; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 3)

1/ Viết phương trình đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

2/ Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa OA sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

Giải

1/ Ta có: $\overrightarrow{a_\Delta} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ = (6; 3; 4). Nên phương trình Δ qua O và vuông góc (ABC)

$$\Delta: \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

2/ (P): Ax + By + Cz + D = 0; ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

- O ∈ (P): ⇒ D = 0
- A ∈ (P) ⇒ A + 2B = 0 ⇒ A = −2B
- d(B; (P)) = d(C; (P)) ⇔ $|4B + D| = |3C + D| \Rightarrow 4B = \pm 3C$
- Chọn C = 4 ⇒ B = 3; A = –6 ⇒ (P_1): –6x + 3y + 4z = 0.
- Chọn C = –4 ⇒ B = 3; A = 6 ⇒ (P_2): 6x + 3y – 4z = 0.

Bài 12: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2005

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng

d: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): 2x + y – 2z + 9 = 0

a/ Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.

b/ Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng **Δ** nằm trong mặt phẳng (P), biết **Δ** đi qua A và vuông góc với d.

Giải

a/ Phương trình của tham số của d: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

I ∈ d ⇒ I(1 – t; –3 + 2t; 3 + t), $d\left(I,(P)\right) = \frac{|-2t+2|}{3}$.

$$d\left(I,(P)\right) = 2 \Leftrightarrow |1 - t| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm I_1(–3; 5; 7), I_2(3; –7; 1).

b/ Vì A ∈ d nên A(1 – t; –3 + 2t; 3 + t).

Ta có A ∈ (P) ⇔ 2(1 – t) + (–3 + 2t) – 2(3 + t) + 9 = 0 ⇔ t = 1.

Vậy A(0; –1; 4).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

Vì Δ ⊂ (P) và Δ ⊥ d nên Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{n}, \vec{u}\right] = (5; 0; 5) = 5(1; 0; 1)$.

Phương trình tham số Δ : $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Bài 13:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc O. Biết A(2; 0; 0); B(0; 1; 0); S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a/ Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

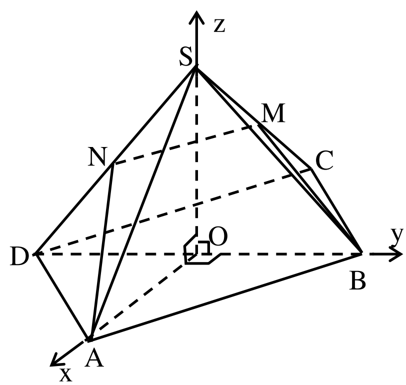
b/ Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Giải

Cách 1:

Từ giả thiết suy ra $SO \perp (ABCD)$.

$$SA = SC = 2\sqrt{3}$$



a/ Ta có $OM // SA \Rightarrow \left(SA, MB\right)$ là OMB

$$OB \perp (SAC) \Rightarrow OB \perp OM$$

$$\Delta OBM \text{ có } \tan OMB = \frac{OB}{OM}$$

$$\Rightarrow \tan OMB = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow OMB = 30^0$$

Vẽ $OH \perp SA \Rightarrow OH \perp OM$ và $OH \perp OB$

$$\Rightarrow OH \perp (OMB)$$

Vì $SA // OM \Rightarrow SA // (OMB) \Rightarrow d(SA, MB) = d(H, OMB) = OH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b/ $(ABM) \cap SD = N \Rightarrow$ N là trung điểm SD

Ta có: $\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SMNB} = \frac{1}{4}V_{SBCD} = \frac{1}{8}V_{SABCD}$

Tương tự : $V_{SABN} = \frac{1}{4}V_{SABCD}$

Vậy $V_{SABMN} = V_{SMNB} + V_{SABN} = \frac{3}{8}V_{SABCD} = \frac{3}{8}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}AC.BD.SO$

$$= \frac{1}{16}4.2.2\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ (đvtt).}$$

Cách 2 : *Giải bằng hình giải tích.*

a/ O là trung điểm của BD $\Rightarrow$ D(0; –1; 0), O là trung điểm AC $\Rightarrow$ C(–2; 0; 0)

M là trung điểm SC $\Rightarrow$ $M(-1; 0; \sqrt{2})$

$\overrightarrow{SA} = (-2; 0; 2\sqrt{2})$ $\quad \overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$

Gọi φ là góc nhọn tạo bởi SA và BM.

$$\cos\varphi = \frac{|2+0+4|}{\sqrt{4+8}\sqrt{1+1+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa SA và song song với BM $\Rightarrow$ pt (α): $\sqrt{2}x + z - 2\sqrt{2} = 0$

Ta có $d(SA, BM) = d(B, (\alpha)) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

b/ Phương trình mặt phẳng (ABM): $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 3z - 2\sqrt{2} = 0$

Phương trình tham số của đường thẳng SD $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = -2\sqrt{2}t \end{cases}$

N là giao điểm của SD và mp(ABM) $\Rightarrow N\left(0; -\dfrac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{BS} = \left(0; -1; 2\sqrt{2}\right)$ $\quad \overrightarrow{BA} = (2; -1; 0)$

$\overrightarrow{BN} = \left(0; -\dfrac{3}{2}; \sqrt{2}\right)$ $\quad \overrightarrow{BM} = \left(-1; -1; \sqrt{2}\right)$

$\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BN}\right] = \left(2\sqrt{2}; 0; 0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BN}\right]\overrightarrow{BA} = 4\sqrt{2}$ và $\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BN}\right]\overrightarrow{BM} = 2\sqrt{2}$

$V_{SABMN} = V_{SABN} + V_{SBMN} = \dfrac{1}{6}4\sqrt{2} + \dfrac{1}{6}.2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (đvtt) .

Bài 14:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, biết A(a; 0; 0), B(–a; 0; 0), C(0; 1; 0), $B_1(a; 0; b)$ a > 0, b > 0.

a/ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.

b/ Cho a, b thay đổi nhưng luôn luôn thỏa mãn a + b = 4.

Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

Giải

a/ $C_1(0; 1; b)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa B, C và song song với AC_1.

$\overrightarrow{B_1C} = (a; 1; -b)$; $\overrightarrow{C_1A} = (a; -1; -b) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{C_1A}\right] = (-2b; 0; -2a)$

Suy ra phương trình (α): –2b (x – 0) + 0 (y – 1) – 2a (z – 0) = 0 $\Leftrightarrow$ bx + az = 0

Ta có $d\left(B_1C, AC_1\right) = d\left(A, \alpha\right) = \dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Cách khác: $d\left(B_1C, AC_1\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right]\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right]\right|} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

b/ Ta có $d = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \le \dfrac{ab}{\sqrt{2ab}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \le \dfrac{a+b}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Maxd $= \sqrt{2}$ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 4 \\ a > 0, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$.

Bài 15:

Trong không gian với hệ trục tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz. Cho hai điểm A(2; 0; 0); B(0; 0; 8) và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC}$ = (0; 6; 0). Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

Giải

$\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = 2 \\ y_c = 6 \\ z_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(2; 6; 0)$

I là trung điểm BC $\Rightarrow$ I (1; 3; 4)

Phương trình tham số OA $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(α) qua I $\perp \overrightarrow{OA} = (2, 0, 0)$ nên (α): $2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

Tọa độ $\{H\} = OA \cap (\alpha)$ thỏa: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(1; 0; 0)$

$d(I, OA) = IH = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2} = 5.$

Cách khác: $d(I, OA) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} = 5$

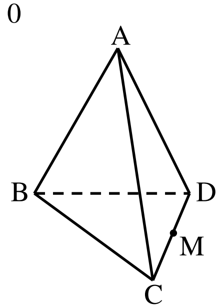
Bài 16: ĐỀ DỰ BỊ 1

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz. Cho tứ diện ABCD với A(2; 3; 2), B(6; –1; –2), C(–1; –4; 3), D(1; 6; –5). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

Giải

$\overrightarrow{AB} = (4; -4; -4)$, $\overrightarrow{CD} = (2; 10; -8)$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = 90^0 \Rightarrow AB \perp CD$
- Tìm M ∈ CD để chu vi Δ ABM là AB + AM + MB nhỏ nhất
  Vì AB không đổi nên chu vi ΔABM nhỏ nhất ⇔ AM + MB nhỏ nhất
- Gọi (α) chứa AB và (α) ⊥ CD, (α) ∩ CD = M, M là điểm cần tìm
- (α) qua A(2; 3; 2) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{CD}$ = (2; 10; –8)
  Phương trình (α): 2(x – 2) + 10(y – 3) – 8(z – 2) = 0
  ⇔ x + 5y – 4z – 9 = 0 (4)
  Phương trình của CD qua C(–1; –4; 3)
  có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = (1; 5; -4)$



$$\begin{cases} x = -1 + t & (1) \\ y = -4 + 5t & (2) \\ z = 3 - 4t & (3) \end{cases}$$

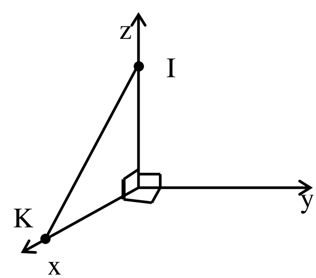
Thay (1), (2) (3) vào (4) ta được t = 1 ⇒ M(0; 1; –1)

Bài 17: ĐỀ DỰ BỊ 2

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz. Cho hai điểm I(0; 0; 1); K(3; 0; 0). Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm I, K và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc bằng 30^0.

Giải

- Gọi (α) qua I, K và (α) tạo (Oxy) góc 30^0
  Phương trình $(\alpha): \frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1\ (b \neq 0)$;
  Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{b}; 1\right)$
  Mặt phẳng Oxy có vectơ pháp tuyến: $\vec{k} = (0; 0; 1)$



$$\cos(\alpha, (Oxy)) = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_k}\right|.\left|\vec{k}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{b^2} + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{9b^2}{10b^2 + 9} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\alpha_1): \dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{3\sqrt{2}} + \dfrac{z}{1} = 1 \\ b_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\alpha_2): \dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{3\sqrt{2}} + \dfrac{z}{1} = 1 \end{array}\right.$$

✓ ***Vấn đề 4:***

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Cho hai mặt phẳng α và β có phương trình:

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \left(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0\right)$$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ \left(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0\right)$$

Gọi $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng trên và M là một điểm trên mặt phẳng (α).

– (α) cắt (β) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ không cùng phương

– (α) song song (β) $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_1} \text{ và } \overrightarrow{n_2} \text{ cùng phương} \\ M \notin (\beta) \end{cases}$

– (α) trùng (β) $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_1} \text{ và } \overrightarrow{n_2} \text{ cùng phương} \\ M \in (\beta) \end{cases}$

Nếu $A_2, B_2, C_2, D_2 \neq 0$ thì ta có cách khác:

– (α) cắt (β) $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

– (α) song song (β) $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

– (α) trùng (β) $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

- *Cách 1:* Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2

– Hệ có một nghiệm duy nhất: d_1 cắt d_2.

– Hệ có vô số nghiệm: d_1 và d_2 trùng nhau.

– Hệ vô nghiệm:

+ $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$ cùng phương: $d_1 // d_2$

+ $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$ không cùng phương: d_1 và d_2 chéo nhau.

- *Cách 2:*

– Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}_{d_1}$, $\vec{a}_{d_2}$ của d_1 và d_2

– Tìm điểm $A \in d_1$ và $B \in d_2$.

+ $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$ cùng phương $\begin{cases} A \in d_2 : d_1 \equiv d_2 \\ A \notin d_2 : d_1 // d_2 \end{cases}$

+ $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$ không cùng phương $\begin{cases} \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right].\overrightarrow{AB} = 0: d_1 \text{ cắt } d_2 \\ \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right].\overrightarrow{AB} \neq 0: d_1 \text{ chéo } d_2 \end{cases}$

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

- *Cách 1:*

Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng α.

– Hệ vô nghiệm: $d // (\alpha)$

– Hệ có nghiệm duy nhất: d cắt (α).

– Hệ vô số nghiệm: $d \subset (\alpha)$.

- *Cách 2:*

Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của a, vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (α) và tìm điểm $A \in d$.

– $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$ ($\vec{u}$ không vuông góc $\vec{n}$): d cắt (α).

– $\vec{u}.\vec{n} = 0 \left(\vec{u} \perp \vec{n}\right)$ $\begin{cases} A \notin (\alpha): d // (\alpha) \\ A \in (\alpha): d \subset (\alpha) \end{cases}$

B. ĐỀ THI

Bài 1 : CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(–1; 2; 3), B(1; 0; –5) và mặt phẳng (P): 2x + y – 3z – 4 =0. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng.

Giải

Phương trình AB $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$. $M \in AB \Rightarrow M(-1+t; 2-t; 3-4t)$

$M \in (P) \Rightarrow 2(t-1) + (2-t) - 3(3-4t) - 4 = 0 \Rightarrow t = 1$. Vậy M(0; 1; –1).

Bài 1 : ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Trong không gian với hệ tọa Oxyz, cho các điểm A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0) và mặt phẳng (P): x + y + z – 20 = 0. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

Giải

$\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2)$, phương trình AB : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$

D thuộc đường thẳng AB ⇒ D(2 – t; 1 + t; 2t) ⇒ $\overrightarrow{CD} = (1 - t; t; 2t)$

Véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n} = (1; 1; 1)$

C ∉ (P) nên CD // (P) ⇔ $\vec{n}.\overrightarrow{CD} = 0$ ⇔ 1.(1 –t) + 1.t + 1.2t = 0 ⇔ t = $-\frac{1}{2}$

Vậy $D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Bài 2 : ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

1/ Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.

2/ Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): 7x + y – 4z = 0 và cắt hai đường thẳng d_1, d_2

Giải

1/ + d_1 qua M(0; 1; –2), có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(2; -1; 1)$

d_2 qua N(–1; 1; 3), có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(2; 1; 0)$

\+ $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1; 2; 4)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; 0; 5)$

\+ $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN} = 21 \neq 0 \Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau.

2/ Giả sử d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A, B. Vì A ∈ d_1, B ∈ d_2 nên

A(2s; 1 – s; –2 + s), B(–1 + 2t; 1 + t; 3) ⇒ $\overrightarrow{AB} = (2t - 2s - 1; t + s; -s + 5)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (7; 1; -4)$.

Lại do AB ⊥ (P) ⇔ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2t - 2s - 1}{7} = \frac{t + s}{1} = \frac{-s + 5}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 9s + 1 = 0 \\ 4t + 3s + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(2; 0; -1),\ B(-5; -1; 3)$.

Phương trình của d là: $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-4}$

Bài 3: ĐỀ DỰ BỊ 1 ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz mặt phẳng (P): $4x - 3y + 11z - 26 = 0$ và hai đường thẳng:

$d_1: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ $\qquad$ $d_2: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$

1/ Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau.

2/ Viết phương trình đường thẳng Δ nằm tên (P), đồng thời Δ cắt cả d_1 và d_2.

Giải

1/
- d_1 qua $M_1(0; 3; -1)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1} = (-1; 2; 3)$
- d_2 qua $M_2(4; 0; 3)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = (1;\ 1; 2)$
- $\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] = (1; 5; -3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (4; -4; 4)$
- $\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = -23 \neq 0 \Rightarrow d_1$ chéo d_2

2/ $\Delta \subset (P)$ và cắt cả d_1, d_2 $\Rightarrow \Delta$ đi qua các giao điểm của d_1, d_2 và (P)

- $A = d_1 \cap (P)$: giải hệ $\begin{cases} \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{3} \\ 4x - 3y + 11z - 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (-2; 7; 5)$
- $B = d_2 \cap (P)$: giải hệ $\begin{cases} \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2} \\ 4x - 3y + 11z - 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (3; -1; 1)$
- $\overrightarrow{AB} = (5; -8; -4)$

Phương trình đường thẳng cần tìm $AB: \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-7}{-8} = \dfrac{z-5}{-4}$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ và $d_2: \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$

a/ Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

b/ Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại các điểm A, B. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Giải

a/ d_1 đi qua $M_1(1; -2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (3; -1; 2)$.

d_2 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right) = (3; -1; 2)$

Vì $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}$ và $M_1 \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$.

Mặt phẳng (P) chứa d_2 nên có phương trình dạng:

$\alpha(x + y - z - 2) + \beta(x + 3y - 12) = 0 \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

Vì $M_1 \in (P)$ nên $\alpha(1 - 2 + 1 - 2) + \beta(1 - 6 - 12) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 17\beta = 0$

Chọn $\alpha = 17 \Rightarrow \beta = -2$. Phương trình (P) là: $15x + 11y - 17z - 10 = 0$

b/ Vì $A, B \in (Oxz)$ nên $y_A = y_B = 0$

Vì $A \in d_1$ nên $\dfrac{x_A - 1}{2} = \dfrac{2}{-1} = \dfrac{z_A + 1}{2} \Rightarrow x_A = z_A = -5 \Rightarrow A(-5; 0; -5)$

$B \in d_2 \Rightarrow \begin{cases} x_B - z_B - 2 = 0 \\ x_B - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 12 \\ z_B = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12; 0; 10)$

$\overrightarrow{OA} = (-5; 0; -5), \overrightarrow{OB} = (12; 0; 10) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (0; -10; 0)$.

$S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]\right| = \dfrac{1}{2}.10 = 5$ (đvdt).

Bài 5: ĐỀ DỰ BỊ 1 ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$d_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ và $d_2 : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$ (t là tham số)

a/ Xét vị trí tương đối của d_1 và d_2.

b/ Tìm tọa độ các điểm M thuộc d_1 và N thuộc d_2 sao cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng (P): $x - y + z = 0$ và độ dài đoạn MN = $\sqrt{2}$.

Giải

a/ d_1 qua $O(0; 0; 0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 2)$

d_2 qua $B(-1; 0; 1)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = (-2; 1; 1)$

$\left[\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}\right] = (1; 5; -3)$, $\overrightarrow{OB} = (-1; 0; 1)$

$\left[\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}\right].\overrightarrow{OB} = 1 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow d_1$ chéo d_2

b/ Phương trình tham số $d_1: \begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = 2t' \end{cases} \Rightarrow M_1(t';\, t';\, 2t') \in d_1$

$M_2 \in d_2 \Rightarrow M_2(-1-2t;\, t;\, 1+t)$; $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2t-t'-1; t-t'; t-2t'+1)$

Ta có $M_1M_2 \,//\, (P) \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}.\overrightarrow{m_p} = 0$

$\Rightarrow -2t-t'-1-t-t'+t-2t'+1 = 0 \Rightarrow t = -t'$

$M_1M_2 = \sqrt{(t'-1)^2 + 4t'^2 + (1-3t')^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 14t'^2 - 8t' + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t' = 0 \\ t' = \dfrac{4}{7} \end{array}\right.$

t' = 0 $\Rightarrow$ M(0; 0; 0) $\in$ (P) loại .

$t' = \dfrac{4}{7}$ ta có $M\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{4}{7}; \dfrac{8}{7}\right)$; $N\left(\dfrac{1}{7}; \dfrac{4}{7}; \dfrac{3}{7}\right)$

Bài 6: ĐỀ DỰ BỊ 1

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm A(4; 2; 2) B(0; 0; 7) và đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Chứng minh rằng hai đường thẳng d và AB thuộc cùng một mặt phẳng.

Tìm điểm C thuộc đường thẳng d sao cho ΔABC cân tại đỉnh A.

Giải

- $\overrightarrow{AB} = (-4; -2; 5)$
- d có: M(3; 6; 1) và vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-2; 2; 1)$
- $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{a}\right] = (-12;\, -6;\, -12)$, $\overrightarrow{AM} = (-1;\, 4;\, -1)$
- $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{a}\right].\overrightarrow{AM} = 12 - 24 + 12 = 0 \Leftrightarrow$ AB, d đồng phẳng
- Phương trình tham số d: $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 6+2t \\ z = 1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
- C $\in$ d $\Rightarrow$ C(3 – 2t; 6 + 2t; 1 + t)
- $AB = \sqrt{4^2 + 2^2(-5)^2} = 45$
- $AC = \sqrt{(2t+1)^2 + (2t+4)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{9t^2 + 18t + 18}$
- Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 18t + 18 = 45$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \Rightarrow C_1(1;\, 8;\, 2) \\ t_2 = -3 \Rightarrow C_2(9;\, 0;\, -2) \end{array}\right.$

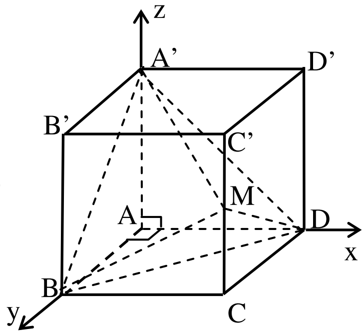
Bài 7:

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD, A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b) (a > 0, b > 0). Gọi M là trung điểm của CC'.

a/ Tính thể tích khối tứ diện BDA'M theo a và b.

b/ Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

Giải



A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(a; a; 0); D(0; a; 0)

A'(0; 0; b); C'(a; a; b); M(a; a; $\frac{b}{2}$)

a/ $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$; $\overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b)$; $\overrightarrow{BM} = (0; a; \frac{b}{2})$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = a(b, b, a)$

$\Rightarrow V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}\right]\overrightarrow{BM}\right|$

$= \frac{a}{6}\left(ab + \frac{ab}{2}\right) = \frac{a^2b}{4}$ (đvtt).

b/ (A'BD) có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}\right] = a(b, b, a)$ hay chọn $\vec{n} = (b; b; a)$

(MBD) có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2}, \frac{ab}{2}, -a^2\right)$h

hay $\vec{m} = (b; b; -2a)$ (chọn)

Ta có (A'BD) $\perp$ (MBD) $\Leftrightarrow$ $\vec{m}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow$ $b^2 + b^2 - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$ (a, b > 0) $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$.

Bài 8:

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz cho đường thẳng:

$$d_k \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0 \\ kx - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Tìm k để đường thẳng d_k vuông góc với mặt phẳng (P): $x - y - 2z + 5 = 0$

Giải

$\overrightarrow{n_1} = (1; 3k; -1)$; $\overrightarrow{n_2} = (k; -1; 1)$

Vectơ chỉ phương của d_k : $\vec{a} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (3k - 1; -k - 1; -1 - 3k^2)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) $\vec{n} = (1; -1; -2)$

Ta có : $\overrightarrow{d_k} \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{a_d}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_p}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3k-1}{1} = \frac{-k-1}{-1} = \frac{-1-3k^2}{-2} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \quad \vee \quad k = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad k = 1.$$

Bài 9 : ĐỀ DỰ BỊ 2

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{và} \quad d_2 \begin{cases} 3x - z + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

a/ Chứng minh rằng d_1, d_2 chéo nhau và vuông góc với nhau.

b/ Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 và song song với đường thẳng Δ: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-7}{4} = \dfrac{z-3}{-2}$.

Giải

a/
- d_1 qua A(0; –1; 0) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; 1)$
- d_2 qua B(0; 1; 1) có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1; -2; 3)$
- $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 1)$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (8; -2; -4)$
- $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\overrightarrow{AB} = -4 - 4 = -8 \neq 0$ vậy d_1 chéo d_2
- Ta lại có: $\vec{a}.\vec{b} = 1 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$.

  Kết luận : d_1 chéo d_2 và d_1 vuông góc d_2

b/ Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{c} = (1; 4; -2)$

- Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và song song Δ nên $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\vec{a}, \vec{c}\right] = (-8; 3; 2)$

  (α) qua A và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = (-8; 3; 2)$

  (α): $-8(x - 0) + 3(y + 1) + 2(z - 0) = 0$

  $\Leftrightarrow 8x - 3y - 2z - 3 = 0$
- Gọi β là mặt phẳng chứa d_1 và song song Δ nên có ptpt:

  $$\overrightarrow{n_\beta} = \left[\vec{b}, \vec{c}\right] = (-8; 5; 6)$$

  (β) qua B có vectơ pháp tyuến $\overrightarrow{n_\beta} = (-8; 5; 6)$

  (β): $-8(x - 0) + 5(y - 1) + 6(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 8x - 5y - 6z + 11 = 0$

Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (α) và (β) có phương trình

$$\begin{cases} 8x - 3y - 2z - 3 = 0 \\ 8x - 5y - 6z + 11 = 0 \end{cases}$$

Bài 10:

Trong không gian với hệ trục Đêcác Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng: d_m: $\begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$ (m là tham số)

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

Giải

$\overrightarrow{n_1} = (2m + 1; 1 - m; 0)$; $\overrightarrow{n_2} = (m; 0; 2m + 1)$

Một vectơ chỉ phương của d_m là

$$\vec{a} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-2m^2 + m + 1; -(2m + 1)^2; - m(1 - m))$$

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; -1; 0)$

Đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 2 + (4m^2 + 4m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Bài 11: ĐỀ DỰ BỊ 3

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1 \begin{cases} x - az - a = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ và } d_2 \begin{cases} ax + 3y - 3 = 0 \\ x + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

a/ Tìm a để hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau.

b/ Với a = 2, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_2 và song song với đường thẳng d_1. Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2 khi a = 2.

Giải

a/ Đặt z = t $\Rightarrow$ Phương trình tham số d_1: $\begin{cases} x = a + at \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$

Đặt x = 3t' $\Rightarrow$ Phương trình tham số d_2: $\begin{cases} x = 3t' \\ y = 1 - at' \\ z = 2 - t' \end{cases}$

<u>Cách 1</u>**:** d_1 và d_2 cắt nhau

$$\Leftrightarrow \text{Hệ} \begin{cases} a + at = 3t' \\ -1 + t = 1 - at' \\ t = 2 - t' \end{cases} \text{có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{3a}{a^2 + 3} & (1) \\ t = \dfrac{6 - a^2}{3 + a^2} & (2) \\ t = 2 - t' & (3) \end{cases}$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được: $\dfrac{6 - a^2}{a^2 + 3} = 2 - \dfrac{3a}{a^2 + 3}$

$\Leftrightarrow 6 - a^2 = 2a^2 - 3a + 6 \Leftrightarrow 3a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1.$

Cách 2: d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ \left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$

b/ Khi a = 2 ta có: d_1: $\begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ d_2: $\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ x + 3z - 6 = 0 \end{cases}$

d_1 đi qua $M_1(0; -2; -1)$ có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 1)$

d_2 đi qua $M_2(0; 1; 2)$ có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = 3(3; -2; -1)$

Vì (P) chứa d_2 và song song d_1 nên (P) có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] = (1; 5; -7)$$

(P) qua $M_2(0; 1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 5; -7)$ nên có phương trình

(P): $(x - 0) + 5(y - 1) - 7(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 5y - 7z + 9 = 0$

Ta có : $d\left(d_1, d_2\right) = d\left(M_1, (P)\right) = \dfrac{\left|0 + 5.(-2) - 7(-1) + 9\right|}{\sqrt{1 + 25 + 49}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{15}$

Cách khác : $d\left(d_1, d_2\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right]\right|} = \dfrac{6\sqrt{3}}{15}$

✓ *Vấn đề 5:* MẶT CẦU

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

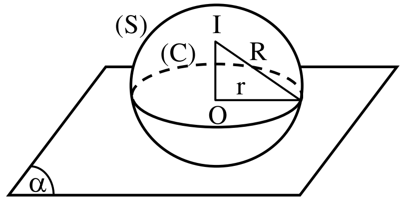
1. Phương trình mặt cầu

- $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm I(a; b; c) bán kính R
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Tâm I(a, b, c), bán kính R = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

2. Đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C).



- Tìm tâm O của (C)

– Tìm phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với (α).

– $O = d \cap (\alpha)$.

- Tìm bán kính r của (C): $r^2 = R^2 - IO^2$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm A(4; 4; 0). Viết phương trình mặt phẳng (OAB) biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Giải

Giả sử B(x; y; z)

Ta có: $B \in (S)$ và tam giác OAB đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0 \\ OA^2 = OB^2 \\ OA^2 = AB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4(x + y + z) \\ 32 = x^2 + y^2 + z^2 \\ 32 = (4 - x)^2 + (4 - y)^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 32 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 8(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 32 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ (x + y)^2 - 2xy + z^2 = 32 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Với B(0; 4; 4).

Mặt phẳng (OAB) có vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (16; -16; 16)$ và đi qua O (0; 0; 0) nên có phương trình x – y + z = 0.

Trường hợp 2: Với B(4; 0; 4).

Mặt phẳng (OAB) có véctơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(16;-16;-16)$ và đi qua O(0; 0; 0) nên có phương trình x – y – z = 0.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

> Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): 2x – y + 2z = 0. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ, bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Giải

Phương trình tham số của đường thẳng Δ: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3+4t \quad (t\in R) \\ z=t \end{cases}$.

Gọi I là tâm của mặt cầu. I∈ Δ ⇔ I(1 + 2t; 3 + 4t; t).

Mặt cầu tiếp xúc (P) và có bán kính bằng 1 ⇔ d(I, (P)) = 1

$\Leftrightarrow \frac{|2(1+2t)-(3+4t)+2t|}{\sqrt{4+1+4}}=1 \Leftrightarrow |2t-1|=3 \Leftrightarrow$ t = 2 hoặc t = –1.

- t = 2 ⇒ I(5; 11; 2) ⇒ Phương trình mặt cầu: $(x-5)^2+(y-11)^2+(z-2)^2=1$
- t = –1 ⇒ I(–1;–1;–1)⇒ Phương trình mặt cầu: $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$

Bài 3: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

> Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I (1; 2; –3) và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho AB = $\sqrt{26}$.

Giải

d qua M (1; –1; 1), vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-3;1)$, $\overrightarrow{IM}=(0;-3;4)$.

$\Rightarrow \left[\vec{a},\overrightarrow{IM}\right]=(-9;-16;-12)$.

d(I,d) = $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{2}}$. Ta có: $R^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+d^2(I,d)=\frac{26}{4}+\frac{37}{2}=25$.

Suy ra: phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$.

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

> Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(0; 0; –2) và đường thẳng
>
> $$\Delta:\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}.$$
>
> Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai

điểm B và C sao cho BC = 8.

Giải

Δ qua M (–2; 2; –3) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;\ 3;\ 2)$; $\overrightarrow{AM} = (-2;\ 2;\ -1)$

$\Rightarrow \left[\vec{a},\ \overrightarrow{AM}\right] = (-7; -2;\ 10)$

$$\Rightarrow d(A, \Delta) = \frac{\left|\left[\vec{a},\ \overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\sqrt{49+4+100}}{\sqrt{4+9+4}} = \sqrt{\frac{153}{17}} = 3.$$

Vẽ AH vuông góc với Δ. Ta có: BH = $\frac{BC}{2} = 4$ và AH = d(A, Δ) = 3.

Trong ΔAHB ta có: $R^2 = AB^2 = BH^2 + AH^2 = 16 + 9 = 25$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

Bài 5: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A (1; –2; 3), B (–1; 0; 1) và mặt phẳng (P): x + y + z + 4 = 0. 1/ Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A tâm (P). 2/ Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{AB}{6}$, của tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với (P).

Giải

1/ Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với (P) thì: Δ: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$

H là hình chiếu của A là (P) thì H = (Δ) ∩ (P) nên tọa độ H thỏa:

$$\begin{cases} x+y+z+4=0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \\ z=1 \end{cases}$$. Vậy H (–1; –4; 1)

2. Ta có $\overrightarrow{AB}$ = (–2; 2; –2) và AB = $\sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Bán kính mặt cầu (S) là R = $\frac{AB}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Phương trình (AB): $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Vì tâm I ∈ (AB) nên I (t – 1; – t; t + 1)

(S) tiếp xúc (P) nên d (I; (P)) = R ⇔ $|t+4| = 1$ ⇔ t = –3 hay t = –5

⇒ I(–4; 3; –2) hay I(–6; 5; –4)

Vậy ta có hai mặt cầu thỏa yêu cầu đề bài:

$(S_1): (x + 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = \dfrac{1}{3}$

$(S_2): (x + 6)^2 + (y - 5)^2 + (z + 4) = \dfrac{1}{3}$

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Giải

(S) có tâm I(1; 2; 3), bán kính R = 5

Khoảng cách từ I đến (P): $d(I, (P)) = \dfrac{|2-4-3-4|}{3} = 3 < R$;

Suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến, H là hình chiếu vuông góc của I trên (P):

$$IH = d(I,(P)) = 3,\ r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$$

Tọa độ H = (x; y; z) thỏa mãn: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \\ 2x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$

Giải hệ, ta được H (3; 0; 2)

Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 điểm A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3)

1/ Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

2/ Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

1/
- Gọi phương trình mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ (với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$$

- Mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D nên

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \\ D \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 - 6a - 6b + d = 0 \\ 18 - 6a - 6c + d = 0 \\ 18 - 6b - 6c + d = 0 \\ 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases} \text{ nhận}$$

Vậy (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$

2/ $(ABC): \begin{cases} \text{đi qua } A(3;\ 3;\ 0) \\ \text{có vectơ pháp tuyến là } \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = -9(1;\ 1;\ 1) \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (ABC): $x + y + z - 6 = 0$

- Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC là giao của mặt phẳng (ABC) và (S)

  $\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C): $\begin{cases} x^2 + y^2 + y^2 - 3x - 3y - 3z = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$

- Gọi d qua tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ của (S) và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

  $d: \begin{cases} \text{đi qua } I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{1}\right) \\ \text{có vectơ chỉ phương } \vec{a} = (1;\ 1;\ 1) \end{cases}$

- Phương trình tham số $d: \begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = \frac{3}{2} + t \\ z = \frac{3}{2} + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

- $H = d \cap (ABC)$ ta giải hệ $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = \frac{3}{2} + t \\ z = \frac{3}{2} + t \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

Vậy tâm của đường tròn (C) là H(2; 2; 2)

Bài 8: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$.

> **1/** Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3
>
> **2/** Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Giải

1/ (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$ có tâm I(1; –2; –1) và bán kính R = 3.

Mặt phẳng (Q) có cặp véctơ chỉ phương là: $\overrightarrow{OI} = (1; -2; -1), \vec{i} = (1; 0; 0)$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của (Q) là: $\vec{n} = (0; -1; 2)$

Phương trình của (Q) là: $0.(x-0) - 1.(y-0) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow y - 2z = 0$

2/ Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P). Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B.

Nhận xét: Nếu d(A; (P)) ≥ d(B; (P)) thì d(M; (P)) lớn nhất khi M ≡ A

Phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

Tọa độ giao điểm của d và (S) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được hai giao điểm A(–1; –1; –3), B(3; –3; 1)

Ta có: d(A; (P)) = 7 ≥ d (B; (P)) = 1.

Vậy khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất khi M(–1; –1; –3)

Bài 9: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

> Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0; –3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), $B_1(4; 0; 4)$.
>
> **a/** Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1).
>
> **b/** Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN.

Giải

a/ $A_1(0; -3; 4)$, $C_1(0; 3; 4)$; $\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4)$

Vectơ pháp tuyến của mp(BCC_1B_1) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}\right] = (12; 16; 0)$

Phương trình mặt phẳng (BCC_1B_1): $12(x-4) + 16y = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$.

Bán kính mặt cầu: $R = d\left(A,\left(BCC_1B_1\right)\right) = \dfrac{|-12-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{24}{5}$

Phương trình mặt cầu: $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = \dfrac{576}{25}$

b/ Ta có $M\left(2; \dfrac{-3}{2}; 4\right)$, $\overrightarrow{AM} = \left(2; \dfrac{3}{2}; 4\right)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-4; 3; 4)$.

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_p} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}\right] = (-6; -24; 12)$.

Phương trình (P): $-6x - 24(y + 3) + 12z = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0$.

Ta thấy $B(4; 0; 0) \notin (P)$. Do đó (P) đi qua A, M và song song với BC_1.

Ta có $\overrightarrow{A_1C_1} = (0; 6; 0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng A_1C_1 là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 6t \\ z = 4 \end{cases}$

$N \in A_1C_1 \Rightarrow N(0; -3 + 6t; 4)$.

Vì $N \in (P)$ nên $0 + 4(-3 + 6t) - 8 + 12 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$. Vậy $N(0; -1; 4)$.

$$MN = \sqrt{(2-0)^2 + \left(-\frac{3}{2}+1\right)^2 + (4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 1 ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2005

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 3 điểm A(1; 1; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2)

a/ Viết phương trình mặt phẳng (P) qua gốc tọa độ O và vuông góc với BC. Tìm tọa độ giao điểm của AC với mặt phẳng (P).

b/ Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Giải

a/ $\overrightarrow{BC} = (0; -2; 2)$

- Mặt phẳng (P) qua O và vuông góc BC (nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến)
  Phương trình (P): $0(x - 0) - 2(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$ (*)
- $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 2)$ nên phương trình tham số của AC: $\begin{cases} x = 1 - t & (1) \\ y = 1 - t & (2) \\ z = 2t & (3) \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

  Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được: $1 - t - 2t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{3}$

Thay vào (1), (2), (3) ta có $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là giao điểm $AC \cap (P)$

b/ $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

- Dễ thấy ΔBOC cũng vuông tại O. Do đó A, O cùng nhìn đoạn BC dưới một góc vuông. Do đó A, O, B, C đều nằm trên một mặt cầu tâm I là trung điểm BC, bán kính $R = \frac{BC}{2}$.
- $I(0; 1; 1)$, $R = \sqrt{2}$ nên phương trình (S): $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$.

Bài 11: ĐỀ DỰ BỊ 1 ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho lăng trụ đứng $OAB.O_1A_1B_1$ với $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $O_1(0; 0; 4)$.

a/ Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1. Viết phương trình mặt cầu qua 4 điểm O, A. B, O_1

b/ Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với O_1A đồng thời cắt OA, OA_1 lần lượt tại N, K. Tính độ dài đoạn KN.

Giải

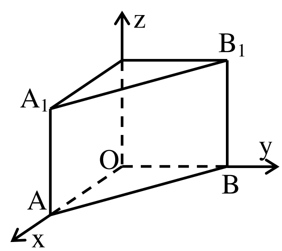
a/ Vì $AA_1 \perp (Oxy) \Rightarrow A_1(2; 0; 4)$, $BB_1 \perp (Oxy) \Rightarrow B_1(0; 4; 4)$

Phương trình mặt cầu (S):

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Mặt cầu qua 4 điểm O, A. B, O_1 nên

$$\begin{cases} O \in (S) \\ A \in (S) \\ B \in (S) \\ O_1 \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 4 - 4a = 0 \\ 16 - 8b = 0 \\ 16 - 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \text{(nhận)}$$



Vậy (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$

b/ M trung điểm AB $\Rightarrow M(1; 2; 0)$

- (P) qua $M(1; 2; 0)$, $(P) \perp O_1A$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{O_1A} = (2; 0; -4)$

$\Rightarrow$ Phương trình mp(P): $2(x - 1) + 0(y - 2) - 4(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 2z - 1 = 0$

- Phương trình tham số OA: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

- $N = (P) \cap OA$ ta có hệ $\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow N(1; 0; 0)$

- Phương trình tham số OA_1: $\begin{cases} x = t' \\ y = 0 \\ z = 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

- $K = OA_1 \cap (P)$ ta có hệ $\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x = t' \\ y = 0 \\ z = 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\dfrac{1}{3}; 0; -\dfrac{2}{3}\right)$

- $KN = \sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{3}\right)^2 + (0-0)^2 + \left(0 + \dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

Bài 12:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P): $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Giải

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu. Giả thiết cho $\begin{cases} IA^2 = IB^2 = IC^2 \\ I \in (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z - 4 = 0 \\ 2x - 2y - 2 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I(1; 0; 1). \text{ Bán kính } R = IB = 1$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Bài 13: ĐỀ DỰ BỊ 1

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz cho mặt phẳng

(P): $2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$ (m là tham số)

và mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$.

Tìm m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) với m tìm được hãy xác định tọa độ tiếp điểm của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Giải

- Mặt cầu (S) có tâm I(1; –1; 1), bán kính R = 3
- Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S): ⇔ d(I, (P)) = R

$$\Leftrightarrow \left|2-2+1-m^2-3m\right| = 3\sqrt{4+4+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+3m-1=9 \\ m^2+3m-1=-9 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+3m-10=0 \\ m^2+3m+8=0 \ \text{(VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$$

⇒ (P): 2x + 2y + z –10 = 0 (1)

- Gọi Δ đường thẳng qua I và Δ ⊥ (P)

Δ qua I (1; –1; 1) và $\overrightarrow{a_\Delta} = \overrightarrow{n_p} = (2;\ 2;\ 1)$.

Phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x = 1+2t & (2) \\ y = -1+2t & (3) \\ z = 1+t & (4) \end{cases}$.

- Tiếp điểm M là giao điểm của Δ và (P), thay (2), (3), (4) vào (1) ta được:

2(1 + 2t) + 2(–1 + 2t) + 1 + t – 10 = 0 ⇔ t = 1 ⇒ M(3; 1; 2).