

Mục lục

Lời mở đầu	2
Kiến thức cơ bản	3
Phương pháp giải toán	6
Một số cách chọn hệ trục tọa độ trong không gian	6
Các dạng toán thường gặp	11
Bài tập tự luyện	18
Kết luận	24
Tài liệu tham khảo	25

Lời mở đầu

Hình học không gian là một trong những môn học hết sức quan trọng trong chương trình hình học của phổ thông.

Trong những năm gần đây, đa số học sinh bị "dị ứng" với môn hình học, nhất là với phần hình học không gian tổng hợp ở học kì 2 lớp 11 và học kì 1 lớp 12, vì đây là môn học khó đòi hỏi trí tưởng tượng, óc thẩm mỹ và tính tư duy cao, không phải học sinh nào cũng có thể học tốt được.

Tuy nhiên, học sinh lại học tương đối tốt phần kiến thức "Phương pháp tọa độ trong không gian" (còn được gọi là môn "Hình học giải tích" trong chương trình 12). Bài viết này với mục đích là tạo ra mối liên kết giữa hai phần kiến thức này. Đây là một ý tưởng không mới nhưng chưa được nhiều giáo viên và học sinh chú ý. Sử dụng phương pháp tọa độ giải bài toán hình học không gian, đôi khi ta có thể biến một bài toán khó thành một bài toán đơn giản, lời giải ngắn gọn, không đòi hỏi nhiều đến khả năng tư duy, kĩ năng vẽ hình và chứng minh hình học.

Với những lí do nêu trên, trong bài viết này, tôi xin giới thiệu ***ứng dụng phương pháp tọa độ trong việc giải một số dạng toán hình học không gian***.

Mặc dù rất cố gắng nhưng do điều kiện hạn hẹp về thời gian nên chắc chắn bài viết này còn những thiếu sót và hạn chế. Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn đồng nghiệp để bài viết được hoàn thiện hơn và trở thành một tài liệu tham khảo tốt cho học sinh và giáo viên.

Đồng Hới, ngày 24/03/2012

NGUYỄN CHIẾN THẮNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trước khi giải các bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ, chúng ta cần nắm cách diễn đạt một số khái niệm hình học không gian bằng "ngôn ngữ" hình học giải tích. Từ đó, chúng ta có thể chuyển bài toán hình học tổng hợp thành bài toán hình học giải tích, tiếp theo sử dụng công cụ hình học giải tích để giải quyết bài toán.

◇ Đường thẳng $MN \parallel mp(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_P = 0$ và $M \notin (P)$

◇ Đường thẳng $MN \perp PQ \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

◇ Đường thẳng $MN \perp mp(P) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b} \\ M \notin (P) \text{ hoặc } N \notin (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{b} = 0 \\ M \notin (P) \text{ hoặc } N \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow [\overrightarrow{MN}, \vec{n}_P] = \vec{0}$$

với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng a, b (a, b là hai đường thẳng nằm trong $mp(P)$ hoặc song song với $mp(P)$).

◇ $mp(P) \perp mp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$

◇ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là hai véc tơ cùng phương. Hay

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0}$$

◇ Bốn điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ là ba véc tơ đồng phẳng. Hay

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

◇ Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ tới $mp(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ là:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- ◇ Khoảng cách h từ điểm M đến đường thẳng d đi qua điểm M_0 và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$:

$$h = \frac{|[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$$

- ◇ Khoảng cách h giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 đi qua điểm M_1 và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và d_2 đi qua điểm M_2 và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2$:

$$h = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$$

- ◇ Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) song song với nhau bằng khoảng cách từ điểm M_0 bất kì nằm trên đường thẳng d đến $mp(P)$
- ◇ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì nằm trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- ◇ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì nằm trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

- ◇ Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$

- ◇ Diện tích tam giác ABC : $S = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$

- ◇ Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$

- ◇ Thể tích tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$

- ◇ Góc giữa hai đường thẳng d_1 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và đường thẳng d_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2$ được xác định bởi công thức:

$$\cos(\widehat{d_1, d_2}) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

hay

$$\sin(\widehat{d_1, d_2}) = \sin(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

- ◇ Góc giữa đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ được xác định bởi công thức:

$$\sin(\widehat{(d, (P))}) = \cos(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

hay

$$\cos(\widehat{(d, (P))}) = \sin(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{|[\vec{u}, \vec{n}]|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

- ◇ Góc giữa mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ và mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q$ được xác định bởi công thức:

$$\cos(\widehat{((Q), (P))}) = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$$

hay

$$\sin(\widehat{((Q), (P))}) = \sin(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) = \frac{|[\vec{n}_P, \vec{n}_Q]|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$$

- ◇ **Đặc biệt**, đường thẳng d_1 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và đường thẳng d_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$

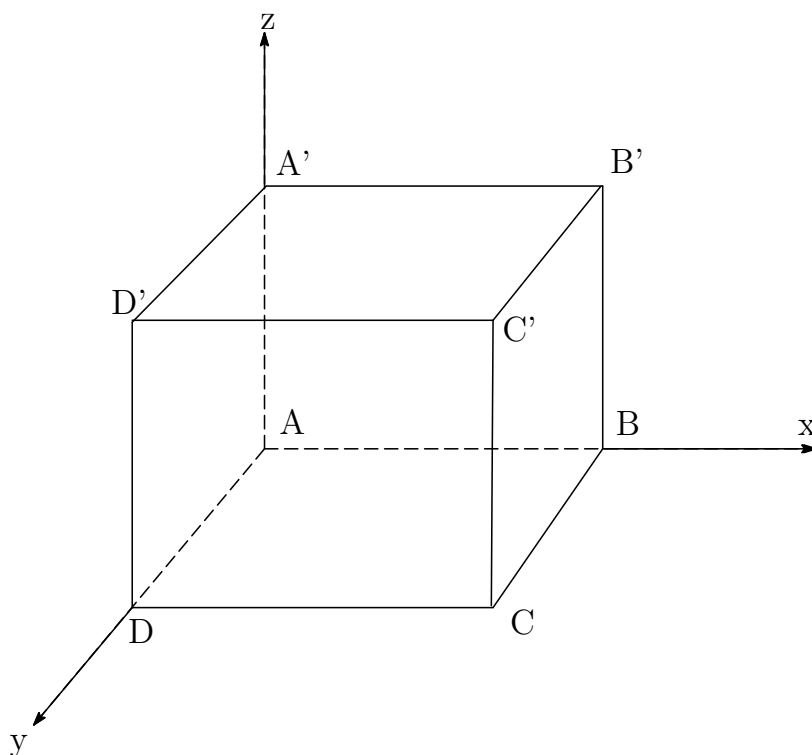
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải được một bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn.

1. Một số cách chọn hệ trục tọa độ trong không gian.

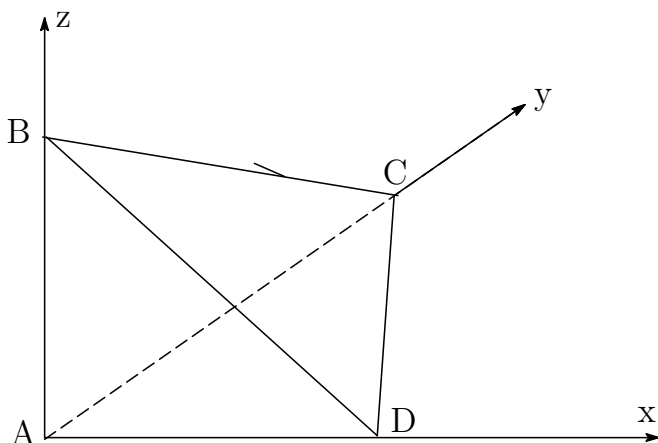
1.1 Hình hộp chữ nhật - hình lập phương:

◇ Chọn gốc tọa độ là một trong 8 đỉnh. Ba cạnh xuất phát từ một đỉnh nằm trên các trục tọa độ.



1.2 Chóp tam giác có góc tam diện vuông:

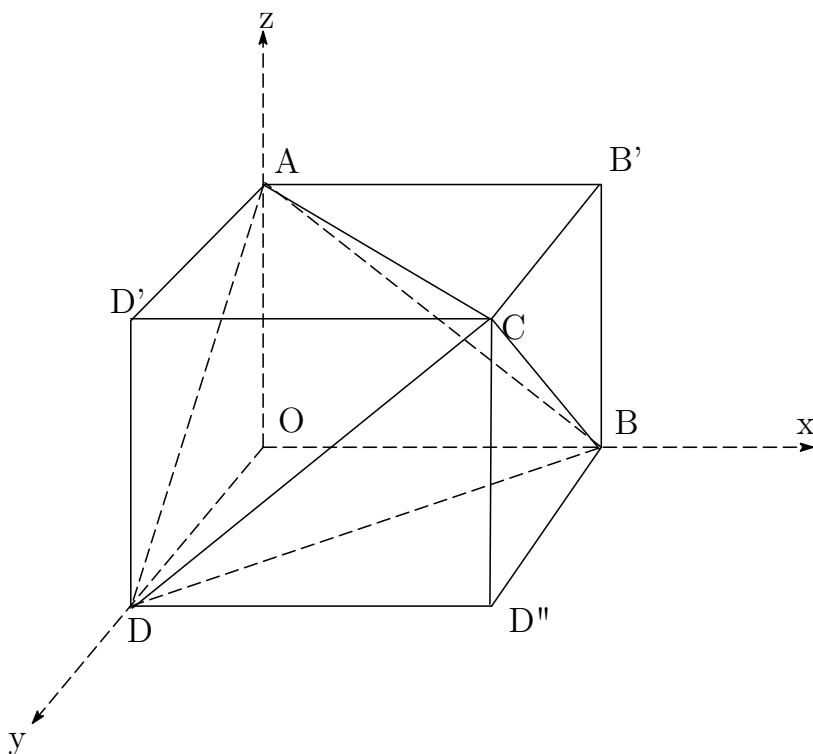
- ◇ Chọn gốc của hệ trục trùng với đỉnh của góc tam diện vuông.
- ◇ Ba trục chứa ba cạnh xuất phát từ đỉnh góc tam diện vuông đó.



1.3 Tứ diện đều:

✓ Cách 1:

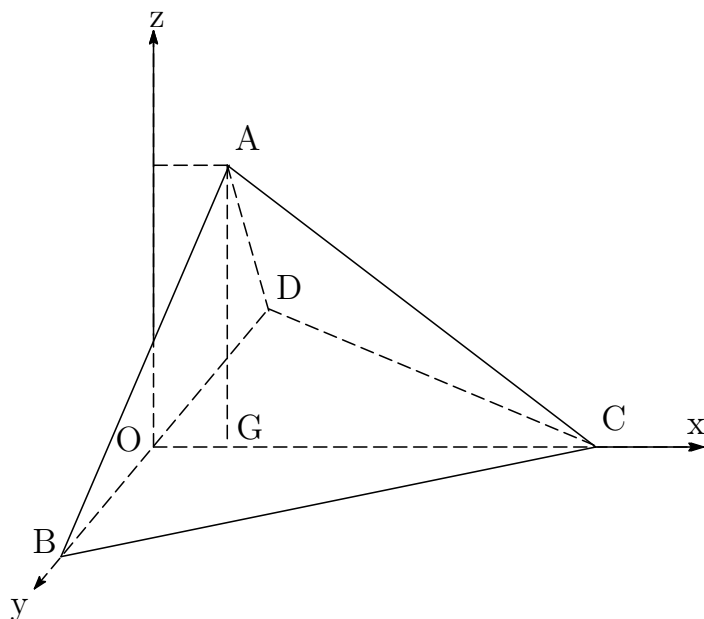
- ◇ Dựng hình lập phương ngoại tiếp hình tứ diện đều.
- ◇ Chọn hệ trục tọa độ có gốc trùng với một đỉnh của hình lập phương.
- ◇ Ba cạnh xuất phát từ đỉnh đó nằm trên ba trục.



✓ Cách 2:

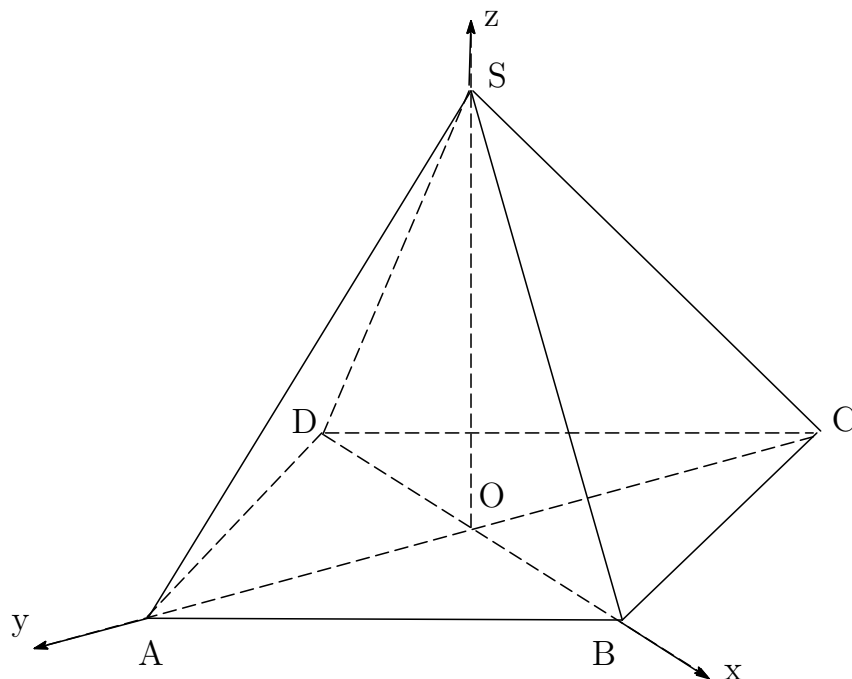
- ◇ Hai trục lần lượt chứa đường cao và một cạnh tương ứng của mặt $\triangle BCD$.
- ◇ Trục còn lại vuông góc với mặt (BCD) cùng phương với đường cao AG .

✂ Chú ý: Chóp tam giác đều cũng chọn như cách 2 này.



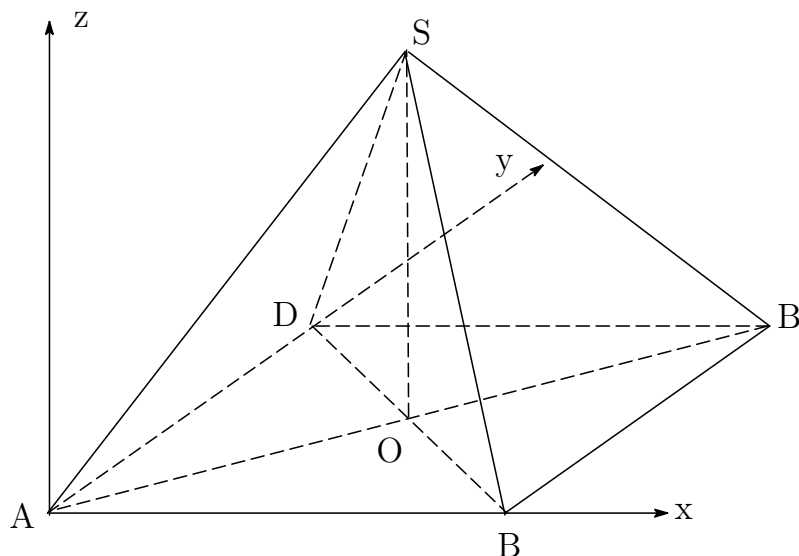
1.4 Chóp tứ giác có đáy là hình thoi, các cạnh bên bằng nhau:

- ◇ Trục Oz chứa đường cao SO của hình chóp.
- ◇ Hai trục Ox, Oy lần lượt chứa hai đường chéo đáy hình chóp.



1.5 Chóp tứ giác có đáy là hình chữ nhật, các cạnh bên bằng nhau:

- ◇ Chọn hai trục chứa hai cạnh hình vuông của đáy.
- ◇ Trục thứ ba vuông góc với đáy (cùng phương với đường cao SO của hình chóp- trục Az nằm trong mặt chèo (SAC)).

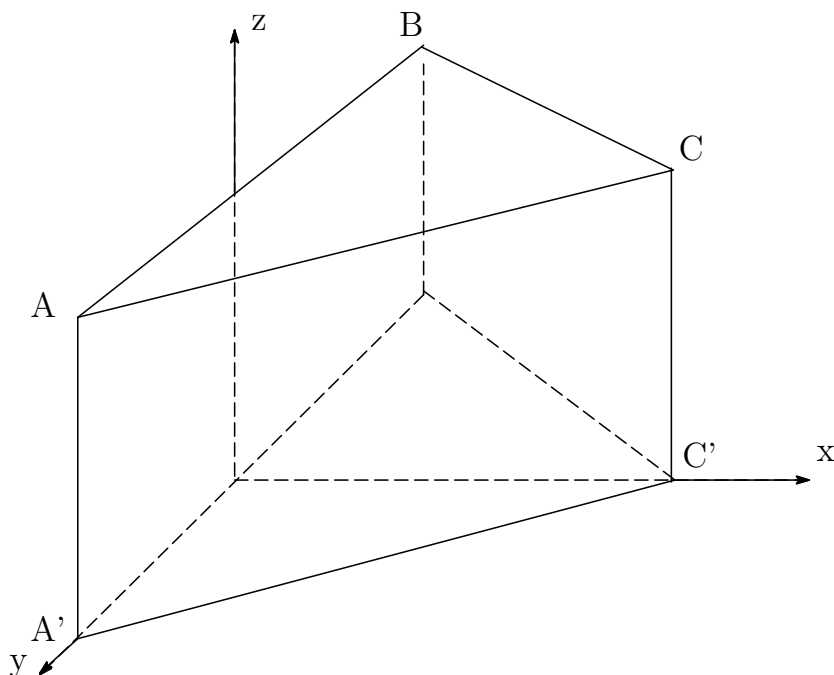


1.6 Lăng trụ đứng có đáy là tam giác cân:

◇ Chọn hai trục lần lượt là cạnh đáy và chiều cao tương ứng của tam giác cân là đáy của hình chóp.

◇ Trục còn lại chứa đường trung bình của mặt bên.

✂ **Chú ý:** *Lăng trụ tam giác đều cũng chọn như vậy.*



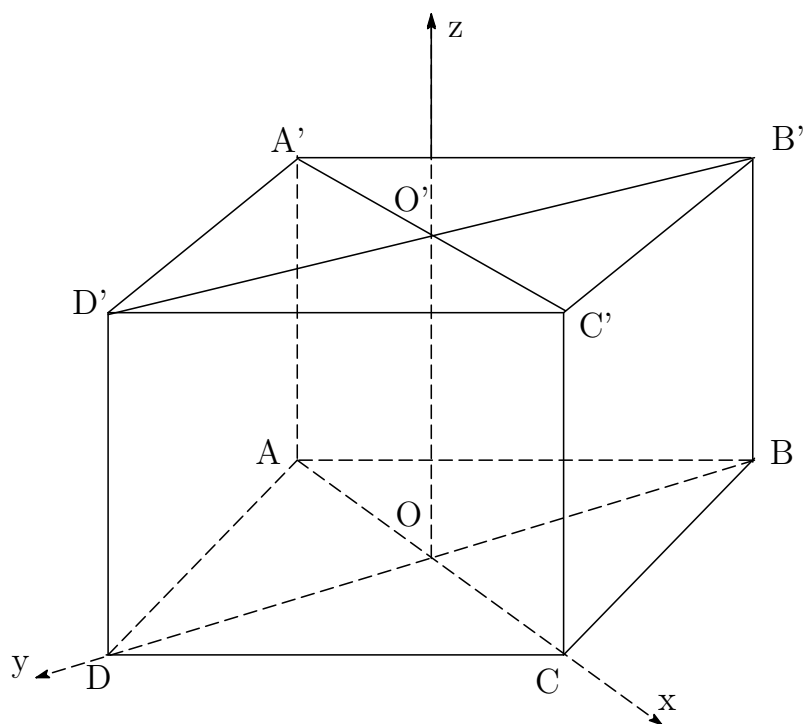
1.7 Lăng trụ đứng có đáy là hình thoi:

◇ Chọn trục cao nằm trên đường thẳng nối tâm hai đáy.

◇ Hai trục kia chứa hai đường chéo của đáy.

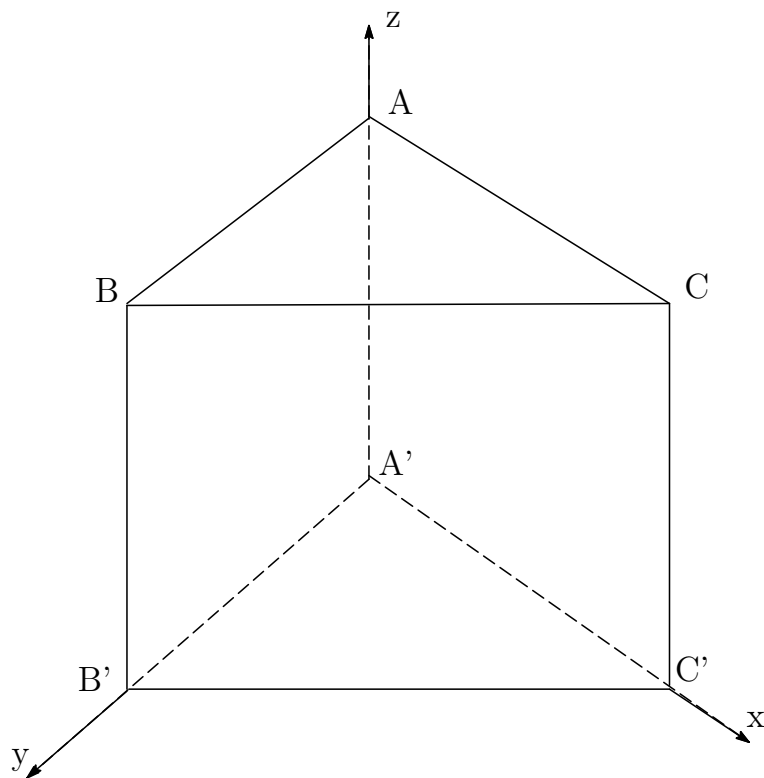
✂ **Chú ý:** *Lăng trụ tứ giác đều cũng chọn như vậy (lăng trụ tứ giác*

đều là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông).



1.8 Lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông:

◇ Chọn đỉnh tam giác vuông đáy làm gốc. Ba trục chứa ba cạnh xuất phát từ đỉnh này.

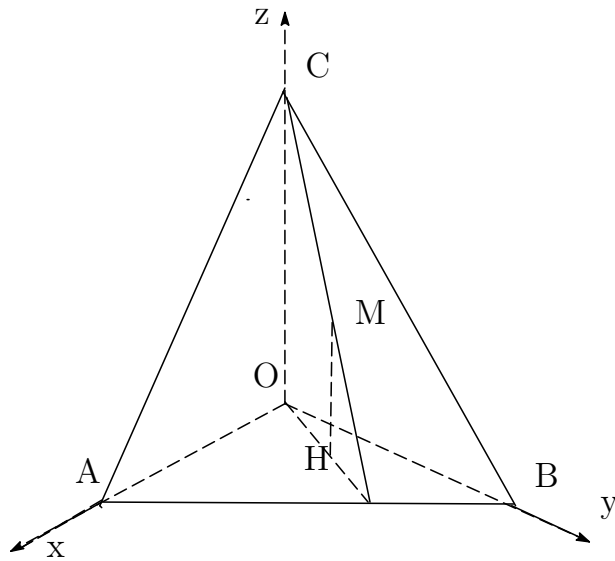


2. Các dạng toán thường gặp

2.1 Hình chóp tam giác

Ví dụ 1. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = a, OB = b, OC = c$ đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mặt phẳng $mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB)$ là $1, 2, 3$. Tính a, b, c để thể tích tứ diện $O.ABC$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, ta có:

$$O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c).$$

Và $d[M; (OAB)] = 3 \Rightarrow z_M = 3$.

Phương trình mặt phẳng $mp(ABC)$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Vì

$$M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \quad (1).$$

Mặt khác,

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc \quad (2).$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{c}} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27.$$

$$(2) \Rightarrow V_{min} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 2. Tứ diện S.ABC có cạnh SA vuông góc với đáy và tam giác ABC vuông tại C. Độ dài của các cạnh là $SA = 4, AC = 3, BC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, H là điểm đối xứng của B qua M.

Tính cosin góc phẳng nhị diện $[H, SB, C]$.

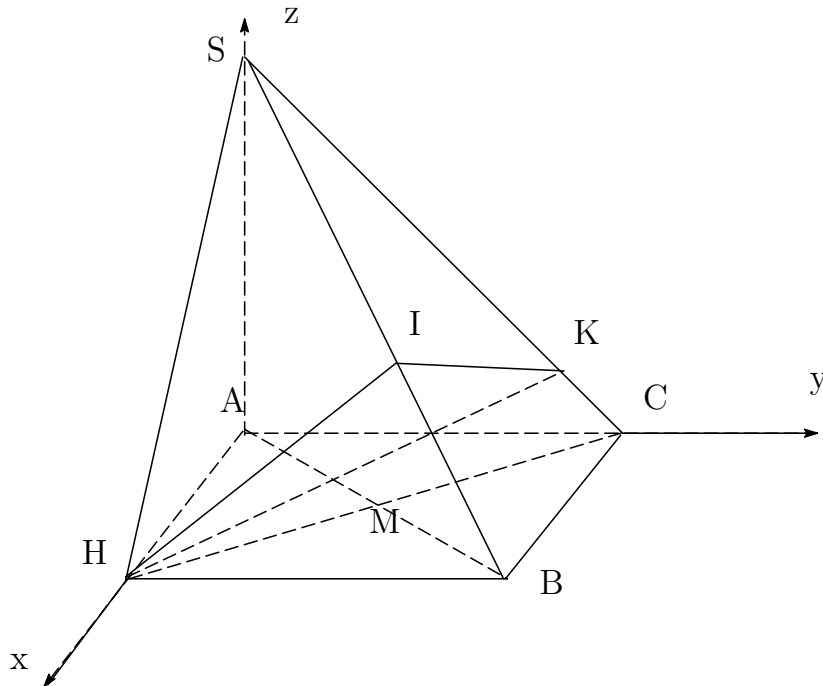
Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

$$A(0; 0; 0), B(1; 3; 0), C(0; 3; 0), S(0; 0; 4), \quad \text{và} \quad H(1; 0; 0)$$

Mặt phẳng (P) qua H vuông góc với SB tại I cắt đường thẳng SC tại K, dễ thấy:

$$[H, SB, C] = (\vec{IH}, \vec{IK}) \quad (1).$$



Mặt khác,

$$\vec{SB} = (-1; -3; 4), \vec{SC} = (0; -3; 4).$$

Suy ra, phương trình tham số của SB là:
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{và}$$

$$SC: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

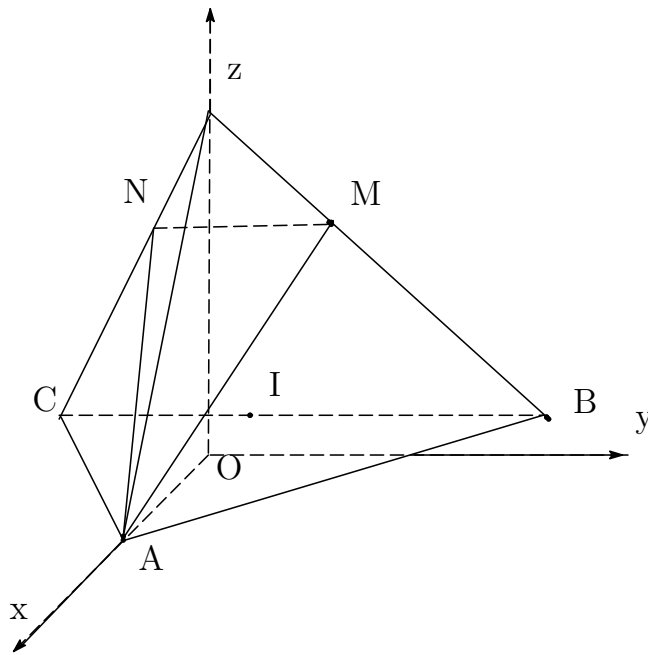
và

$$(P) : x + 3y - 4z - 1 = 0 \Rightarrow I\left(\frac{5}{8}; \frac{15}{8}; \frac{3}{2}\right), \quad K\left(0; \frac{51}{25}; \frac{32}{25}\right)$$

$$\Rightarrow \cos[H, SB, C] = \frac{\vec{IH} \cdot \vec{IK}}{IH \cdot IK} = \dots$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a . Gọi M, N là trung điểm của SB, SC . Tính theo a diện tích $\triangle AMN$, biết (AMN) vuông góc với (SBC) .

Hướng dẫn giải



Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) , ta suy ra O là trọng tâm $\triangle ABC$. Gọi I là trung điểm của BC ta có:

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = a\frac{\sqrt{3}}{3}, OI = a\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Trong mặt phẳng (ABC) , ta vẽ tia Oy vuông góc với OA . Đặt $SO = h$, chọn hệ tọa độ như hình vẽ ta được:

$$O(0; 0; 0), S(0; 0; h), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right), B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right),$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right), M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right) \quad \text{và} \quad N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = [\vec{AM}, \vec{AN}] = \left(\frac{ah}{4}; 0; \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right),$$

$$\vec{n}_{(SBC)} = [\vec{SB}, \vec{SC}] = (-ah; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{6}).$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} (AMN) \perp (SBC) &\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} \cdot \vec{n}_{(SBC)} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \\ &\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} |[\vec{AM}, \vec{AN}]| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}. \end{aligned}$$

2.2 Hình chóp tứ giác:

- Hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy và đáy là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Ta chọn hệ tọa độ như dạng tam diện vuông.
- Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông hoặc hình thoi tâm O, đường cao SO vuông góc với đáy. Ta chọn hệ tọa độ tia OA, OB, OS lần lượt là Ox, Oy, Oz . Giả sử $SO = h, OA = a, OB = b$ ta có:

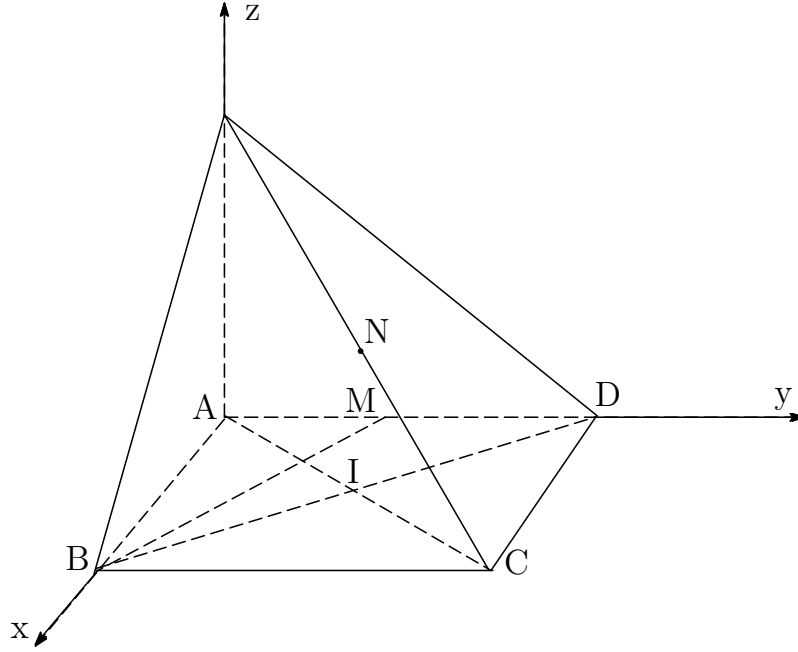
$$O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(-a; 0; 0), D(0; -b; 0), S(0; 0; h)$$

- Hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD và $AB = b, \Delta SAD$ đều cạnh a và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AD, trong ABCD ta vẽ tia Hy vuông góc với AD. Chọn hệ tọa độ $Hxyz$ ta có:

$$H(0; 0; 0), A(\frac{a}{2}; 0; 0), B(\frac{a}{2}; b; 0), C(-\frac{a}{2}; b; 0), D(-\frac{a}{2}; 0; 0), S(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2})$$

Ví dụ 4. (TSDH-Khối B năm 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD và $AB = a, ADa\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và SC, I là giao điểm của MB và AC. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với (SMB). Tính thể tích khối tứ diện ANIB.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ ($O \equiv A$).

Gọi E là giao điểm của AC và BD. Ta có:

$$A(0; 0; 0) \quad B(a; 0; 0), \quad C(a; a\sqrt{2}; 0), \quad D(0; a\sqrt{2}; 0), \quad S(0; 0; a),$$

$$N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right), \quad E\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), \quad M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right) \quad \text{và} \quad I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$$

vì I là trọng tâm tam giác ABC.

- Chứng minh $(SBM) \perp (SAC)$

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= (-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0), \quad \overrightarrow{AC} = (a; a\sqrt{2}; 0) \\ \Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0, \quad \Rightarrow BM \perp AC. \end{aligned}$$

Mặt khác, $SA \perp (ABCD)$ nên $BM \perp SA$. Từ đây suy ra $BM \perp (SAC) \Rightarrow SBM \perp (SAC)$ (đpcm)

- Tính thể tích của khối tứ diện ANIB:

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (a; 0; 0), \quad \overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right) \quad \text{và} \quad \overrightarrow{AN} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right) \\ \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}] &= \left(0; \frac{-a^2}{2}; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Vậy thể tích khối tứ diện ANIB là:

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}] \cdot \overrightarrow{AI}| = \frac{a^3\sqrt{2}}{36} \quad (\text{đvtt}).$$

2.3 Hình lăng trụ đứng:

Tùy theo hình dạng của đáy ta chọn hệ trục như các dạng trên.

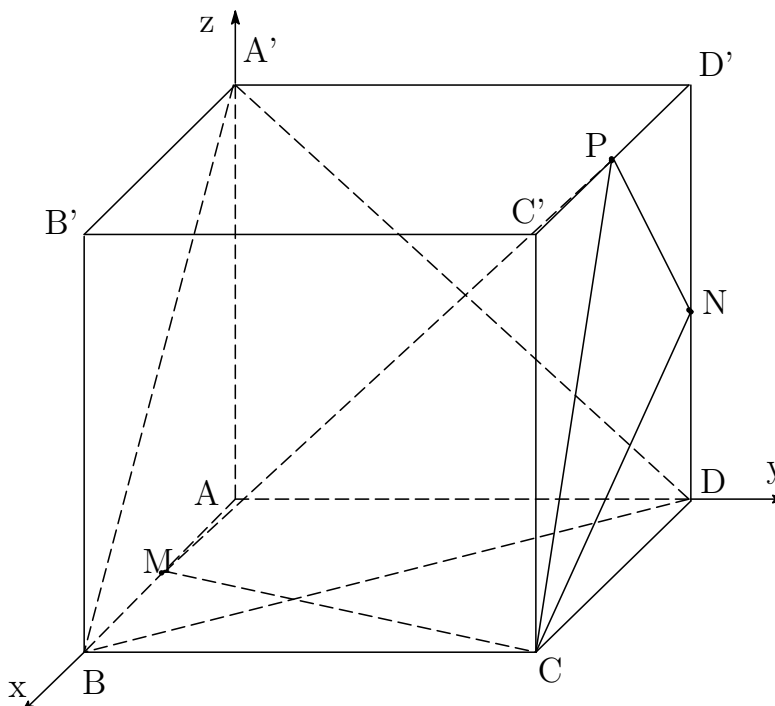
Nhận xét 1.

- Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều và cạnh bên bằng nhau, nhưng không nhất thiết phải bằng cạnh đáy. Chân đường cao là trọng tâm của đáy.
- Tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy.
- Hình hộp có đáy là hình bình hành nhưng không nhất thiết phải là hình chữ nhật.

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và DD' .

- Chứng minh $MN \parallel (BDC')$. Tính MN và khoảng cách từ MN đến mặt phẳng (BDC') .
- Gọi P là trung điểm của $C'D'$. Tính thể tích của $V_{C.MNP}$ và góc giữa MN và BD .
- Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle A'BD$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(2; 2; 0), D(0; 2; 0), A'(0; 0; 2), B'(2; 0; 2), C'(2; 2; 2), D'(0; 2; 2), M(1; 0; 0), N(0; 2; 1), P(1; 2; 2).

a) Chứng minh $MN \parallel (BDC')$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-1; 2; 1) \\ \overrightarrow{BD} = (-2; 2; 0) \\ \overrightarrow{BC'} = (0; 2; 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(BDC')} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}] = (4; 4; -4)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_{(BDC')} = 0$$

$$\Rightarrow MN \parallel (BDC') \text{ (do } M \notin (BDC'))$$

$$\text{Ta có: } MN = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6};$$

$$d(MN, (BDC')) = d(M, (BDC')) \text{ (do } MN \parallel (BDC'))$$

$$\text{Phương trình } BDC' : x + y - z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow d(MN, (BDC')) = \frac{|1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Tính thể tích của $V_{C.MNP}$ và $\varphi = (\widehat{MN, BD})$

$$\text{Ta có: } V_{C.MNP} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MC}|$$

$$= \dots = 1$$

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD}|}{MN \cdot BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } \varphi = 30^\circ$$

b) Tính R

Gọi I, R' là tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lập phương nên I là trung điểm AC' và $R = \frac{AC'}{2} \Rightarrow I(1; 1; 1)$ và $R = \sqrt{3}$

Phương trình (A'BD):

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0;$$

$$d = d(I, (A'BD)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ta có: } A', B, D \in (S)$$

$$\Rightarrow \text{Đường tròn}(A'BD) = (A'BD) \cap (S)$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{R'^2 - d^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } R = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Các bài toán về hình chóp tam giác:

Bài 1: (*Đề thi đại học khối D – 2002*)

Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với (ABC), $AC = AD = 4cm$, $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

Bài 2: Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AD và $AB = 2$, $AC = 4$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho $SA = 6$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB, SC và H là hình chiếu của A lên EF.

1. Chứng minh H là trung điểm của SD.
2. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACE).
3. Tính thể tích hình chóp (A.BCEF)

Bài 3: Cho hình chóp O.ABC có các cạnh $OA = OB = OC = 3cm$ và vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) và các điểm A', B', C' lần lượt là hình chiếu của H lên (OBC), (OCA), (OAB).

1. Tính thể tích tứ diện H.A'B'C'.
2. Gọi S là điểm đối xứng của H qua O. Chứng minh rằng tứ diện S.ABC là tứ diện đều.

Bài 4: Cho hình chóp O.ABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc nhị diện cạnh AB, BC, CA. Gọi H là hình chiếu của O trên (ABC).

1. Chứng minh H là trực tâm của ΔABC .
2. Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
3. Chứng minh $\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
4. Chứng minh $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{3}$.

Bài 5: Cho hình chóp O.ABC có các cạnh $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ đôi một vuông góc. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

1. Tính góc φ giữa OMN và OAB.
2. Tìm điều kiện của a, b, c để hình chiếu của O trên mặt phẳng ABC là trọng tâm ΔANP .

Bài 6: Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy. Biết $AB = 2, ((ABC)(SBC)) = 60^\circ$.

1. Tính độ dài SA.
2. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Bài 7: Cho hình chóp O.ABC có các cạnh $OA = a, OB = b, OC = c$ đôi một vuông góc.

1. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp.
2. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 8: (Đề thi đại học khối D – 2003) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là đường thẳng d . Trên d lấy hai điểm A và B với $AB = a$. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với d và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD) theo a .

Bài 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy ΔABC vuông tại B, $AB = a, BC = 2a$. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC.

1. Tính diện tích ΔMAB theo a .
2. Tính khoảng cách giữa MC và AB.

Bài 10: Cho tứ diện S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = SA = 6$. Cạnh SA vuông góc với đáy. Vẽ AH vuông góc với SB tại H, AK vuông góc với SC tại K.

1. Chứng minh HK vuông góc với CS.
2. Gọi I là giao điểm của HK và BC. Chứng minh B là trung điểm của CI.
3. Tính sin của góc giữa SB và (AHK).
4. Xác định tâm J và bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Bài 11: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại C, $AC = 2$, $BC = 4$.

Cạnh bên $SA = 5$ và vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm cạnh AB.

1. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SD.
2. Tính khoảng cách giữa BC và SD.

Bài 12: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến $mp(SBC)$.
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Bài 13: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy là a , đường cao $SH = h$. Mặt phẳng (α) đi qua AB và vuông góc với SC.

1. Tìm điều kiện của h theo a để (α) cắt cạnh SC tại K.
2. Tính diện tích tam giác ABK.
3. Tính h theo a để (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Chứng tỏ rằng, khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và mặt cầu nội tiếp trùng nhau.

2. Các bài toán về hình chóp tứ giác:

Bài 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm CD.

1. Tính diện tích ΔSBE .
2. Tính khoảng cách từ C đến (SBE).
3. (SBE) chia hình chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ C đến (SBD).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.

Bài 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

1. Chứng minh AH vuông góc với SB, AK vuông góc với SD.
2. Chứng minh BD song song với (α) .
3. Chứng minh HK đi qua trọng tâm G của ΔSAC
4. Tính thể tích hình khối ABCDKMH.

Bài 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = b$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M, N là trung điểm của SA, SD.

1. Tính khoảng cách từ A đến BCN
2. Tính khoảng cách giữa SB và CN.
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng SCD và SBC.
4. Tìm điều kiện của a và b để $\cos \widehat{CMN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Trong trường hợp đó, tính thể tích hình chóp S.BCNM.

Bài 18: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAD đều và vuông góc với (ABCD). Gọi H là trung điểm của AD.

1. Tính $d(D; (SBC)), d(HC; (SD))$.
2. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với SC tại I. Chứng tỏ (α) cắt các cạnh SB, SD.

Bài 19: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. SO vuông góc với đáy và $SO = 2a\sqrt{3}, AC = 4a, BD = 2a$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại B', C', D'.

1. Chứng minh $\Delta B'C'D'$ đều.
2. Tính theo a bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABCD.

Bài 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Đường cao SA = 2a. Trên cạnh CD lấy điểm M, đặt $MD = m (0 \leq m \leq a)$.

1. Tìm vị trí M để diện tích ΔSBM lớn nhất, nhỏ nhất.
2. Cho $m = \frac{a}{3}$, gọi K là giao điểm của BM và AD. Tính góc phẳng nhị diện $[A, SK, B]$.

3. Các bài toán về hình hộp - lăng trụ đứng:

Bài 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi I, K, M, N lần lượt là trung điểm của $A'D', BB', CD, BC$.

1. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
2. Tính khoảng cách giữa IK và AD .
3. Tính diện tích tứ giác $IKNM$.

Bài 22: (Đề thi đại học khối A – 2003) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc phần nhị diện $[B, A'C, D]$.

Bài 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

1. Chứng minh $A'C$ vuông góc với $AB'D'$
2. Tính góc giữa $DA'C'$ và $ABB'A'$.
3. Trên cạnh AD', DB lấy lần lượt các điểm M, N thỏa mãn $AM = DN = k(0 < k < a\sqrt{2})$.
 - a. Chứng minh MN song song với $mpA'D'BC$
 - b. Tìm k để MN nhỏ nhất. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD .

Bài 24: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 4, AA' = 6$. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'} (0 \leq m \leq 1)$. Gọi I, K là trung điểm của $AB, C'D'$.

1. Tính khoảng cách từ A đến $(A'BD)$.
2. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle A'BD$.
4. Tìm m để diện tích tứ giác $MINK$ lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 25: (Đề thi đại học khối A – 2003) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA', CC' .

1. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

2. Tính AA' theo a để $B'MDN$ là hình vuông.

Bài 26: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A . Cho $AB = a, AC = b, AA' = c$. Mặt phẳng (α) qua B và vuông góc với $B'C$.

1. Tìm điều kiện của a, b, c để (α) cắt cạnh CC' tại I (I không trùng với C, C').
2. Cho (α) cắt CC' tại I .
 - a. Xác định và tính diện tích của thiết diện.
 - b. Tính góc giữa thiết diện và mặt đáy.

Kết luận

Phương pháp tọa độ chỉ là một phương pháp hỗ trợ, không thể thay thế phương pháp tổng hợp. Phương pháp tọa độ mặc dù chưa phải là phương pháp tối ưu nhưng có thể áp dụng được trong một phạm vi rộng các bài toán (có chứa quan hệ vuông góc), có thể khắc phục được các khuyết điểm cơ bản của học sinh về tư duy và thời gian, nhưng nhược điểm lớn nhất của phương pháp này là biểu thức tính toán cồng kềnh, đòi hỏi kỹ năng tính toán tốt. Tuy nhiên, nếu biết vận dụng một cách thích hợp thì đây là một trong những phương pháp hết sức hiệu quả khi giải các bài toán hình học không gian.

Trong khoảng thời gian hết sức hạn hẹp, bài viết này không thể tránh khỏi những sai sót và hạn chế, rất mong sự góp ý của các quý thầy cô đồng nghiệp và các em học sinh để bài viết được hoàn thiện và có thể trở thành tài liệu tham khảo tốt cho học sinh.

Tác giả

Tài liệu tham khảo

- [1] Võ Thành Văn, *Chuyên đề ứng dụng tọa độ trong giải toán hình học không gian*), Nhà xuất bản đại học sư phạm, 2010.
- [2] www.mathcope.vn.
- [3] www.gigamedia.com.
- [4] www.toanhocvietnam.vn.
- [5] www.google.com.vn.