CHUYÊN ĐỀ

GIẢI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn và độ dài cạnh của hình.

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Chọn hệ trục toạ độ Oxyz thích hợp (chú ý đến vị trí của gốc O)

Bước 2: Xác định toạ độ các điểm có liên quan

(có thể xác định toạ độ tất cả các điểm hoặc một số điểm cần thiết)

Khi xác định tọa độ các điểm ta có thể dựa vào :

- Ý nghĩa hình học của tọa độ điểm (khi các điểm nằm trên các trục tọa độ, mặt phẳng tọa độ).
- Dựa vào các quan hệ hình học như bằng nhau, vuông góc, song song ,cùng phương , thẳng hàng, điểm chia đọan thẳng để tìm tọa độ
- Xem điểm cần tìm là giao điểm của đường thẳng, mặt phẳng.
- Dựa vào các quan hệ về góc của đường thẳng, mặt phẳng.

Bước 3: Sử dụng các kiến thức về toạ độ để giải quyết bài toán

Các dạng toán thường gặp:

- Độ dài đọan thẳng
- Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng
- Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng
- Góc giữa hai đường thẳng
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
- Góc giữa hai mặt phẳng
- Thể tích khối đa diện
- Diện tích thiết diện
- Chứng minh các quan hệ song song , vuông góc
- Bài toán cực trị, quỹ tích

Bổ sung kiến thức :

1) Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt phẳng chiếu

$$S' = S.\cos\varphi$$

2) Cho khối chóp S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lấy ba điểm A', B', C' khác với S

Ta luôn có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Ta thường gặp các dạng sau

1. Hình chóp tam giác

a. Dạng tam diện vuông

Ví dụ 1. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB) là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích O.ABC nhỏ nhất.

<u>**Hướng dẫn giải**</u>

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).

d[M, (OAB)] = 3 $\Rightarrow$ $z_M = 3$.

Tương tự $\Rightarrow$ M(1; 2; 3).

pt(ABC): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

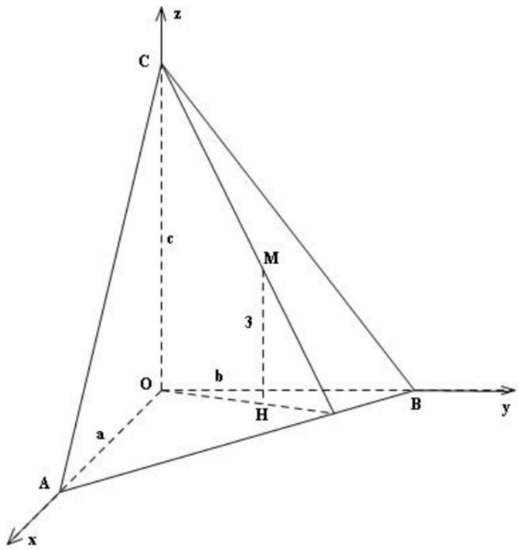
$M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ (1).

$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc$ (2).

(1) $\Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}}$

$\Rightarrow \frac{1}{6}abc \ge 27$.

(2)$\Rightarrow V_{min} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}$.



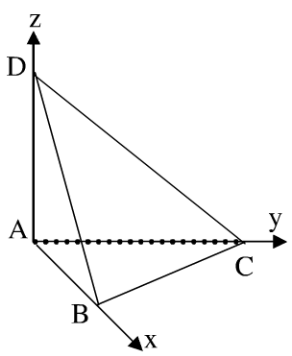
Ví dụ:

1) Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại A, AD = a, AC = b, AB = c.

Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c và chứng minh rằng : $2S \ge \sqrt{abc\left(a+b+c\right)}$

(Dự bị 2 – Đại học khối D – 2003)

Giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm là :A(0;0;0), B(c;0;0), C(0;b;0), D(0;0;a)

$\overrightarrow{BC} = \left(-c;b;0\right), \overrightarrow{BD} = \left(-c;0;a\right), \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = \left(ab;ac;bc\right)$

$S_{BCD} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$

đpcm $\Leftrightarrow \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \ge \sqrt{abc(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \ge abc(a+b+c)$

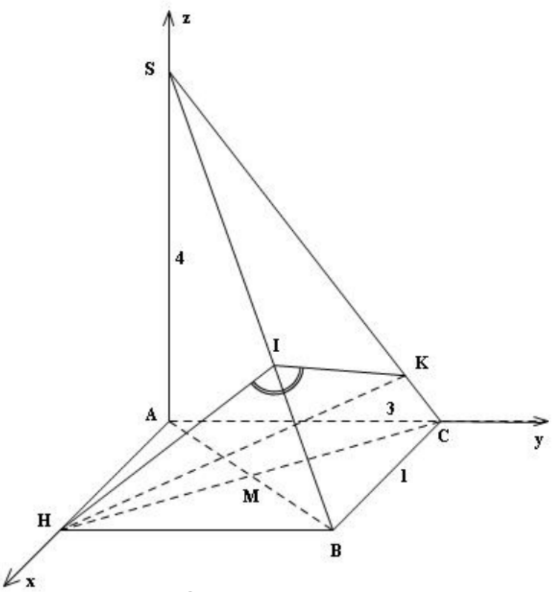
Theo BĐT Cauchy ta được :

$$\left.\begin{array}{l} a^2b^2 + b^2c^2 \ge 2ab^2c \\ b^2c^2 + c^2a^2 \ge 2bc^2a \\ c^2a^2 + a^2b^2 \ge 2ca^2b \end{array}\right\} \text{Cộng vế : } a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \ge abc(a+b+c)$$

b. Dạng khác

Ví dụ 2. Tứ diện S.ABC có cạnh SA vuông góc với đáy và ΔABC vuông tại C. Độ dài của các cạnh là SA = 4, AC = 3, BC = 1. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, H là điểm đối xứng của C qua M.
Tính cosin góc phẳng nhị diện [H, SB, C]

<u>**Hướng dẫn giải**</u>



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:
A(0; 0; 0), B(1; 3; 0), C(0; 3; 0), S(0; 0; 4) và H(1; 0; 0).
mp(P) qua H vuông góc với SB tại I cắt đường thẳng SC tại K, dễ thấy

$$[H, SB, C] = \left(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IK}\right) \ (1).$$

$\overrightarrow{SB} = (-1; -3; 4)$, $\overrightarrow{SC} = (0; -3; 4)$ suy ra:

ptts SB: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$, SC: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$

và (P): $x + 3y - 4z - 1 = 0$.

$\Rightarrow I\left(\frac{5}{8}; \frac{15}{8}; \frac{3}{2}\right), K\left(0; \frac{51}{25}; \frac{32}{25}\right)$

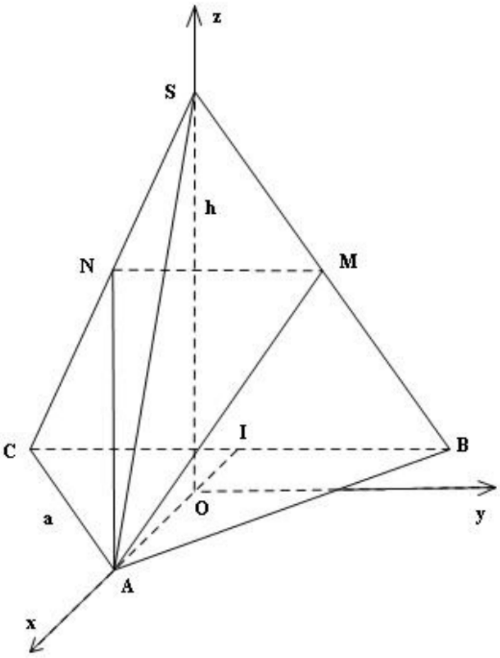
$\Rightarrow \cos[H, SB, C] = \dfrac{\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK}}{IH.IK} = \ldots$

Chú ý: Nếu C và H đối xứng qua AB thì C thuộc (P), khi đó ta không cần phải tìm K.

Ví dụ 3 (trích đề thi Đại học khối A – 2002). Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) vuông góc với (SBC).

<u>**Hướng dẫn giải**</u>

Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có:



$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Trong mp(ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt SO = h, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

$O(0;\ 0;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ h)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};\ 0;\ 0\right)$

$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ 0;\ 0\right)$, $B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$,

$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ -\frac{a}{2};\ 0\right)$, $M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};\ \frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right)$

và $N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};\ -\frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4};\ 0;\ \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right),\ \vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah;\ 0;\ \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

2. Hình chóp tứ giác

a) Hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy và đáy là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Ta chọn hệ trục tọa độ như dạng tam diện vuông.

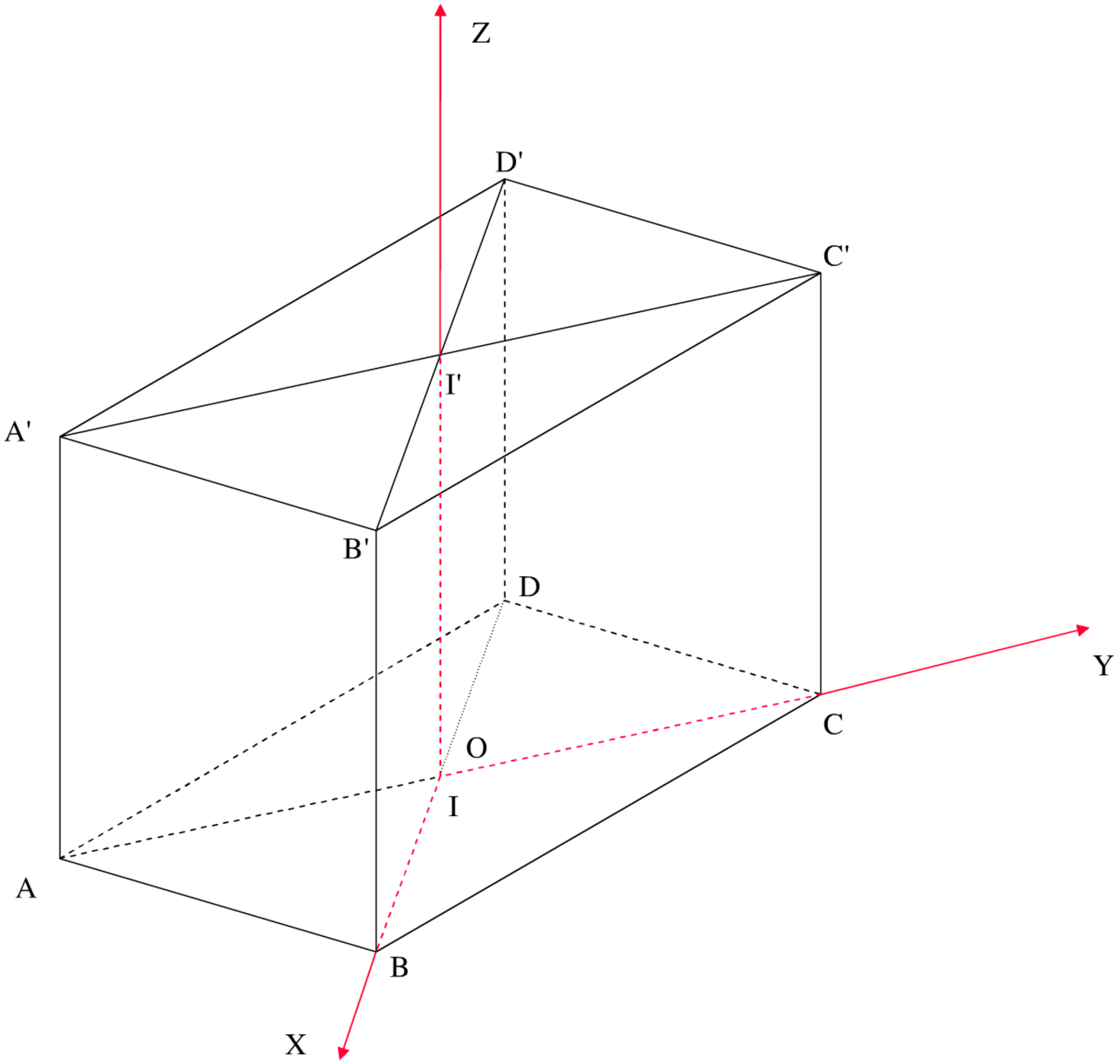
b) Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông (hoặc hình thoi) tâm O đường cao SO vuông góc với đáy. Ta chọn hệ trục tọa độ tia OA, OB, OS lần lượt là Ox, Oy, Oz. Giả sử SO = h, OA = a, OB = b ta có
O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(–a; 0; 0), D(0;–b; 0), S(0; 0; h).

c) Hình chóp S.ABCD có đáy hình chữ nhật ABCD và AB = b. ΔSAD đều cạnh a và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AD, trong (ABCD) ta vẽ tia Hy vuông góc với AD. Chọn hệ trục tọa độ Hxyz ta có:

$$H(0;\ 0;\ 0),\ A\left(\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right),\ B\left(\frac{a}{2};\ b;\ 0\right),\ C\left(-\frac{a}{2};\ b;\ 0\right),\ D\left(-\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right),\ S\left(0;\ 0;\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

3. Hình lăng trụ đứng

Tùy theo hình dạng của đáy ta chọn hệ trục như các dạng trên.
Ví dụ: Cho hình lập phương ABCD A'B'C'D'. CMR AC' vuông góc mp’ (A'BD)



Lời giải: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz

sao cho $O \equiv A$; $B \in Ox$; $D \in Oy$

và $A' \in Oz$ Giả sử hình lập phương

ABCD A'B'C'D' có cạnh là a đơn vị

$\Rightarrow$ A(0;0;0), B (a;0;0), D(0;a;0), A' (0;0;a) C'(1;1;1)$\Rightarrow$ Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (A'BD):

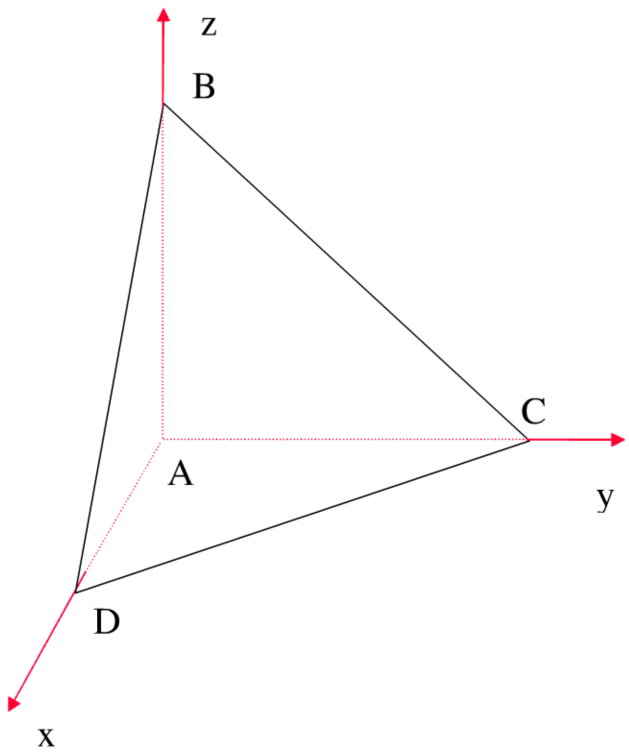
$x + y + z = a$ hay $x + y + z - a = 0$

$\Rightarrow$ Pháp tuyến của mặt phẳng (A'BC): $n_{(A'BC)} = (1;1;1)$ mà AC' = (1;1;1)

Vậy AC' vuông góc (A'BC)

2. Tứ diện ABCD: AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau; AB = 3; AC = AD= 4

Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD)



<u>Lời giải:</u>

+ Chọn hệ trục Oxyz sao cho A ≡ O

D ∈Ox; C ∈ Oy vµ B ∈ Oz

⇒ A(0;0;0); B(0;0;3); C(0;4;0); D(4;0;0)

⇒ Phương trình đoạn chắn của (BCD) là:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 3x + 3y + 4z - 12 = 0$$

Khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD) là:

Nhấn mạnh cho học sinh:

II. Phương pháp giải:

Để giải một bài toán hình học không gian bằng phương pháp sử dụng tọa độ Đề các trong không gian ta làm như sau:

* <u>*Bước 1:*</u> Thiết lập hệ tọa độ thích hợp, từ đó suy ra tọa độ các điểm cần thiết.

* <u>*Bước 2:*</u> Chuyển hẳn bài toán sang hình học giải tích trong không gian. Bằng cách:

+ Thiết lập biểu thức cho giá trị cần xác định.

+ Thiết lập biểu thức cho điều kiện để suy ra kết quả cần chứng minh.

+ Thiết lập biểu thức cho đối tượng cần tìm cực trị.

+ Thiết lập biểu thức cho đối tượng cần tìm quỹ tích

v.v…

III. Luyện tập.

Bài 1: Cho hình chóp SABC, các cạnh đều có độ dài bằng 1, O là tâm của ΔABC. I là trung điểm của SO.

1. Mặt phẳng (BIC) cắt SA tại M. Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện SBCM và tứ diện SABC.
2. H là chân đường vuông góc hạ từ I xuống cạnh SB. CMR: IH đi qua trọng tâm G của ΔSAC.

Lời giải:

Chọn hệ trục Oxyz sao cho O là gốc tọa độ

$A \in Ox$, $S \in Oz$, BC//Oy

Tọa độ các điểm: $A(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0)$; $B(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};0)$; $C(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0)$; $S(0;0\frac{\sqrt{6}}{3})$; $I(0;0;\frac{\sqrt{6}}{6})$

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(0;1;0)$; $\overrightarrow{IC}=(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{6}}{6})$; $\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IC}\right]=(-\frac{\sqrt{6}}{6};0;\frac{\sqrt{3}}{6})$

⇒ Phương trình mặt phẳng (IBC) là:

$$-\frac{\sqrt{6}}{6}(x-0)+0(y-0)+\frac{\sqrt{3}}{6}(z-\frac{\sqrt{6}}{6})=0$$

Hay: $-\sqrt{2}+z-\frac{\sqrt{6}}{6}=0$ mà ta lại có: $\overrightarrow{SA}=(\frac{\sqrt{3}}{3};0;-\frac{\sqrt{6}}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{SA}//\vec{u}_{SA}(1;0;-\sqrt{2})$

Phương trình đường thẳng SA: $x=\frac{\sqrt{3}}{3}+t;\ y=0; z=-\sqrt{2}t$.

+ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}+t & (1) \\ y=0 & (2) \\ y=-\sqrt{2}t & (3) \\ -\sqrt{2}x+z-\frac{\sqrt{6}}{6}=0\,(4) \end{cases}$ Thay (1) (2) (3) vào (4) có:

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{12}; y=0; z=\frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M(\frac{\sqrt{3}}{12};0;\frac{\sqrt{6}}{4})$; $\Rightarrow \overrightarrow{SM}=(\frac{\sqrt{3}}{12};0;-\frac{\sqrt{6}}{12}) \Rightarrow \overrightarrow{SA}=4\overrightarrow{SM}$

⇒ M nằm trên đoạn SA và $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_{(SBCM)}}{V(_{SABC})}=\frac{1}{4}$.

2. Do G là trọng tâm của ΔASC

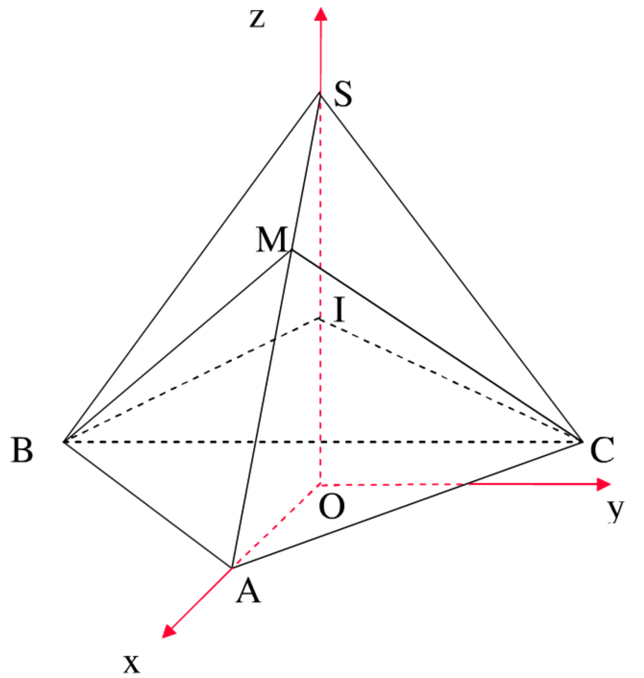
⇒ SG đi qua trung điểm N của AC

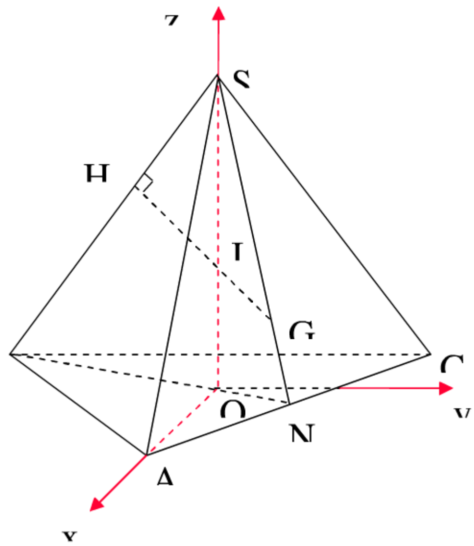
⇒ GI ⊂ (SNB) ⇒ GI và SB đồng phẳng (1)

Ta lại có tọa độ G $(\frac{\sqrt{3}}{18};\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{9}) \Rightarrow \overrightarrow{GI}=(-\frac{\sqrt{3}}{18};-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{18})$

$\Rightarrow \overrightarrow{GI}=(-\frac{\sqrt{3}}{18};-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{18}) \Rightarrow \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{SB}=0 \Rightarrow GI \perp SB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow GI \perp SB = H$





<u>Bài 2:</u> Cho hình lăng trụ ABCD $A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. AA_1 = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi D là trung điểm của BB_1; M di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diện tích ΔMC_1D.

<u>Lời giải:</u>

+ Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho A ≡ O; B ∈ Oy; A_1 ∈ Oz. Khi đó.A(0;0;0), B(0;a;0); A_1 (0;0;2a)

$C_1(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2a)$ và D(0;a;a)

Do M di động trên AA_1, tọa độ M (0;0;t)với t ∈ [0;2a]

Ta có : $S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{DM}\right]\right|$

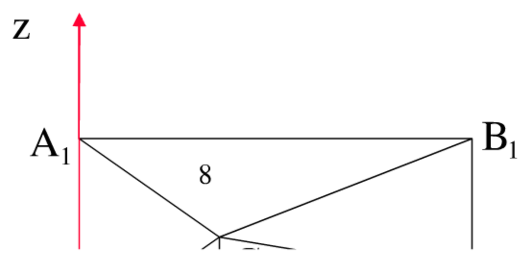
Ta cĩ: $\overrightarrow{DC_1} = (\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};a)$ $\Rightarrow \left[\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DM}\right] = = \frac{-a}{2}(t-3a;\sqrt{3}(t-a);a\sqrt{3})$

$\overrightarrow{DM} = (0;-a;t-a)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DM}\right] = \frac{a}{2}\sqrt{(t-3a)^2+3(t-a)^2+3a^2}$

$= \frac{a}{2}\sqrt{4t^2-12at+15a^2}$

$S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\sqrt{4t^2-12at+15a^2}$



Giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của S_{DC_1M} tùy thuộc vào giá trị hàm số

Xét f(t) = $4t^2 - 12at + 15a^2$

f(t) = $4t^2 - 12at + 15a^2$ $\quad$ ($t \in [0;2a]$)

f'(t) = 8t – 12a

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3a}{2}$$

Lập BBT giá trị lớn nhất của $S_{DC_1M} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$ khi t =0 hay M≡ A

Chú ý

+ Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nhưng không nhất thiết phải bằng đáy. Chân đường cao là trọng tâm của đáy.

+ Tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng đáy.

+ Hình hộp có đáy là hình bình hành nhưng không nhất thiết phải là hình chữ nhật.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TAM GIÁC

Bài 1 (trích đề thi Đại học khối D – 2002). Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc (ABC), AC = AD = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD).

Bài 2. Cho D ABC vuông tại A có đường cao AD và AB = 2, AC = 4. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho SA = 6. Gọi E, F là trung điểm của SB, SC và H là hình chiếu của A trên EF.

1. Chứng minh H là trung điểm của SD.
2. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACE).
3. Tính thể tích hình chóp A.BCFE.

Bài 3. Cho hình chóp O.ABC có các cạnh OA = OB = OC = 3cm và vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H là hình chiếu của điểm O lên (ABC) và các điểm A', B', C' lần lượt là hình chiếu của H lên (OBC), (OCA), (OAB).

1. Tính thể tích tứ diện HA'B'C'.
2. Gọi S là điểm đối xứng của H qua O. Chứng tỏ S.ABC là tứ diện đều.

Bài 4. Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi a, b, g lần lượt là góc nhị diện cạnh AB, BC, CA. Gọi H là hình chiếu của đỉnh O trên (ABC).

1. Chứng minh H là trực tâm của D ABC .

2. Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

3. Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4. Chứng minh $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$.

Bài 5. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB.

1. Tính góc φ giữa (OMN) và (OAB).
2. Tìm điều kiện a, b, c để hình chiếu của O trên (ABC) là trọng tâm ΔANP.
3. Chứng minh rằng góc phẳng nhị diện [N, OM, P] vuông khi và chỉ khi $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy. Biết AB = 2, $\widehat{(ABC),(SBC)} = 60^0$.

1. Tính độ dài SA.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC).
3. Tính góc phẳng nhị diện [A, SB, C].

Bài 7. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một.

1. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp.
2. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 8 (trích đề thi Đại học khối D – 2003). Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là đường thẳng (d). Trên (d) lấy hai điểm A và B với AB = a. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với (d) và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD) theo a.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a. Cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SC.

1. Tính diện tích ΔMAB theo a.
2. Tính khoảng cách giữa MB và AC theo a.
3. Tính góc phẳng nhị diện [A, SC, B].

Bài 10. Cho tứ diện S.ABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = SA = 6. Cạnh SA vuông góc với đáy. Vẽ AH vuông góc với SB tại H, AK vuông góc với SC tại K.

1. Chứng minh HK vuông góc với CS.
2. Gọi I là giao điểm của HK và BC. Chứng minh B là trung điểm của CI.
3. Tính sin của góc giữa SB và (AHK).
4. Xác định tâm J và bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông tại C, AC = 2, BC = 4. Cạnh bên SA = 5 và vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm cạnh AB.

1. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AC và SD.
2. Tính khoảng cách giữa BC và SD.
3. Tính cosin góc phẳng nhị diện [B, SD, C].

Bài 12. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Bài 13. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a, đường cao SH = h. Mặt phẳng (α) đi qua AB và vuông góc với SC.

1. Tìm điều kiện của h theo a để (α) cắt cạnh SC tại K.
2. Tính diện tích ΔABK.
3. Tính h theo a để (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Chứng tỏ rằng khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.

2. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TỨ GIÁC

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, SA = a và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm CD.

1. Tính diện tích ΔSBE.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBE).
3. (SBE) chia hình chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBD).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.
3. Tính góc phẳng nhị diện [B, SC, D].

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh 3cm. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3\sqrt{2}$ cm. Mp(α) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

1. Chứng minh AH vuông góc với SB, AK vuông góc với SD.
2. Chứng minh BD song song với (α).
3. Chứng minh HK đi qua trọng tâm G của ΔSAC.
4. Tính thể tích hình khối ABCDKMH.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, AB = a, AD = b. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N là trung điểm cạnh SA, SD.

1. Tính khoảng cách từ A đến (BCN).
2. Tính khoảng cách giữa SB và CN.
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).
4. Tìm điều kiện của a và b để $\cos\widehat{CMN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Trong trường hợp đó tính thể tích hình chóp S.BCNM.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. ΔSAD đều và vuông góc với (ABCD). Gọi H là trung điểm của AD.

1. Tính d(D, (SBC)), d(HC, SD).
2. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với SC tại I. Chứng tỏ (α) cắt các cạnh SB, SD.
3. Tính góc phẳng nhị diện [B, SC, D].

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. SO vuông góc với đáy và $SO = 2a\sqrt{3}$, AC = 4a, BD = 2a. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại B', C', D'.

1. Chứng minh $\Delta B'C'D'$ đều.
2. Tính theo a bán kính mặt cầu nội tiếp S.ABCD.

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a. Đường cao SA = 2a. Trên cạnh CD lấy điểm M, đặt MD = m $(0 \le m \le a)$.

1. Tìm vị trí điểm M để diện tích ΔSBM lớn nhất, nhỏ nhất.
2. Cho $m = \frac{a}{3}$, gọi K là giao điểm của BM và AD. Tính góc phẳng nhị diện [A, SK, B].

3. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH HỘP – LĂNG TRỤ ĐỨNG

Bài 21. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh a. Gọi I, K, M, N lần lượt là trung điểm của A’D’, BB’, CD, BC.

1. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
2. Tính khoảng cách giữa IK và AD.
3. Tính diện tích tứ giác IKNM.

Bài 22 (trích đề thi Đại học khối A – 2003). Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. Tính góc phẳng nhị diện [B, A’C, D].

Bài 23. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh a. Tìm điểm M trên cạnh AA’ sao cho (BD’M) cắt hình lập phương theo thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

Bài 24. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh a.

1. Chứng minh A'C vuông góc với (AB'D').
2. Tính góc giữa (DA'C) và (ABB'A').
3. Trên cạnh AD', DB lấy lần lượt các điểm M, N thỏa AM = DN = k $(0 < k < a\sqrt{2})$.
   a. Chứng minh MN song song (A'D'BC).
   b. Tìm k để MN nhỏ nhất. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

Bài 25. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = 2, AD = 4, AA' = 6. Các điểm M, N thỏa $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'}\ (0 \le m \le 1)$. Gọi I, K là trung điểm của AB, C'D'.
1. Tính khoảng cách từ điểm A đến (A'BD).
2. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'BD$.
4. Tính m để diện tích tứ giác MINK lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 26. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có độ dài cạnh là 2cm. Gọi M là trung điểm AB, N là tâm hình vuông ADD'A'.
1. Tính bán kính R của mặt cầu (S) qua C, D', M, N.
2. Tính bán kính r của đường tròn (C) là giao của (S) và mặt cầu (S') qua A', B, C', D.
3. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (CMN) và hình lập phương.

Bài 27 (trích đề thi Đại học khối B – 2003) Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA', CC'.
1. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.
2. Tính AA' theo a để B'MDN là hình vuông.

Bài 28. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A. Cho AB = a, AC = b, AA' = c. Mặt phẳng (α) qua B và vuông góc với B'C.
1. Tìm điều kiện của a, b, c để (α) cắt cạnh CC' tại I (I không trùng với C và C').
2. Cho (α) cắt CC' tại I.
   a. Xác định và tính diện tích của thiết diện.
   b. Tính góc phẳng nhị diện giữa thiết diện và đáy.

Bài tập :

MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

<u>Bài 1:</u> Cho hình chóp SABC có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA=$a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy
1) Tính khỏang cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
2) Tính khỏang cách từ tâm O hình vuông ABCD đến mặt phẳng (SBC).
3) Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SAC).

<u>Bài 2:</u> Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy.Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và (ABCD) bằng 60^0
1) Tính MN và SO.
2) Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) .

<u>Bài 3</u>: Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh bằng a và AC=a, Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH$\perp$(ABCD) với SH=a
1) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).
2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

<u>Bài 4:</u> Cho góc tam diện Oxyz, trên Ox, Oy, Oz lấy các điểm A,B,C
1) Hãy tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) theo OA=a, OB=b, OC=c
2) Giả sử A cố định còn B, C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn OA=OB+OC . Hãy xác định vị trí của B và C sao cho thể tích tứ diện OABC là lớn nhất.

<u>Bài 5:</u> Cho tứ diện OABC (vuông tại O), biết rằng OA,OB,OC lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) các góc α,β,γ . Chứng minh rằng:

1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$

2) $S^2_{\Delta OAB}+S^2_{\Delta OBC}+S^2_{\Delta OCA}=S^2_{\Delta ABC}$

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, sa vuông góc với đáy. Gọi M,N là hai điểm theo thứ tự thuộc BC,DC sao cho $BM=\frac{a}{2}, DN=\frac{3a}{4}$. CMR hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài 7: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, CMR hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Bài 8: Trong không gian cho các điểm A,B,C theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một sao cho OA=a , OB=$a\sqrt{2}$. OC=c (a,c>0). Gọi D là điểm đối diện với O của hình chữ nhật AOBD và M là trung điểm của đoạn BC. (P) là mặt phẳng qua A,M và cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với AM.

a) Gọi E là giao điểm của (P) với OC , tính độ dài đoạn OE.

b) Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp C.AOBD bởi mặt phẳng (P).

c) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P).

Bài 9: Cho tứ diện SABC có SC=CA=AB=$a\sqrt{2}$, $SC\perp(ABC)$, ΔABC vuông tại A, các điểm M thuộc SA và N thuộc BC sao cho AM=CN=t (0<t<2a)

1) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị của t để MN ngắn nhất.

2) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi có AC=4, BD=2 và tâm O.SO=1 vuông góc với đáy. Tìm điểm M thuộc đoạn SO cách đều hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD).

Bài 11: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD,CD. Lấy $P\in BB'$ sao cho BP=3PB'. Tính diện tích thiết diện do (MNP) cắt hình lập phương .

Bài 12: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB=a, AD=2a, AA'=a

1) Tính theo a khoảng cách giữa AD' và B'C.

2) Gọi M là điểm chia đoạn AD theo tỷ số $\frac{AM}{MD}=3$. Hãy tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB'C).

3) Tính thể tích tứ diện AB'D'C.

Bài 13: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a..Gọi M, N là trung điểm của BC và DD'

1) CMR $AC'\perp(A'BD)$.

2) CMR $MN//(A'BD)$.

3) Tính khoảng cách giữa BD nà MN theo a

Bài 14: Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc A=60^0 . B'O vuông góc với đáy ABCD, cho BB'=a

1) Tính góc giữa cạnh bên và đáy.

2) Tính khoảng cách từ B, B' đến mặt phẳng (ACD').

Bài 15: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a tâm I . Trên hai tia Ax, By cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lần lượt lấy hai điểm M,N . Đặt AM=x, CN=y

1) Tính thể tích hình chóp ABCMN.

2) CMR điều kiện cần và đủ để góc MIN=90^0 là $2xy=a^2$.

<u>Bài 16</u>: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân ABC với cạnh huyền $AB = 4\sqrt{2}$
Cạnh bên $SC \perp (ABC)$ và $SC = 2$ .Gọi M là trung điểm của AC, N là trung điểm AB

1) Tính góc của hai đường thẳng SM và CN

2) Tính độ dài đọan vuông góc chung của SM và CN.

<u>Bài 17</u>: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1

1) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' .Chứng minh rằng $A'C \perp MN$.
Tính độ dài đọan MN

2) Gọi P là tâm của mặt $CDD'C'$. Tính diện tích ΔMNP .

<u>Bài 18</u>: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) theo a, biết rằng
$SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

<u>Bài 19</u>: Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA;OB;OC đôi một vuông góc . Gọi $\alpha;\beta;\gamma$ lần lượt là các góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OBC);(OCA) và (OAB).Chứng minh rằng :

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$$

<u>Bài 20</u>: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA=a . Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE.

<u>Bài 21</u>: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với AB=AC=a và góc BAC = 120^0, cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).