TRẦN SĨ TÙNG

BÀI TẬP HÌNH HỌC 12

TẬP 3

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Xuctu.com®

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT & ĐẠI HỌC

Năm 2009

CHƯƠNG III
PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa và các phép toán

• Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

• Lưu ý:

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

+ **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$

+ **Điều kiện hai vectơ cùng phương:** $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *cùng phương* $(\vec{a}\neq\vec{0})\Leftrightarrow \exists! k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

+ **Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k** ($k\neq 1$), O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

• Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ ∃! m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

• Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

Khi đó: ∃! m, n, p ∈ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

• **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{AC}=\vec{v}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=\widehat{BAC}\ (0^0\leq\widehat{BAC}\leq180^0)$$

• **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

+ Với $\vec{u}=\vec{0}$ *hoặc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}$

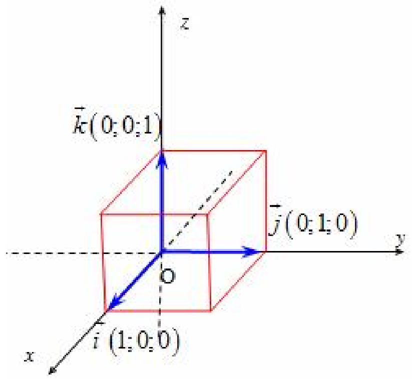
II. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ tọa độ Đêcac vuông góc trong không gian:

Cho ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy gọi là hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz hoặc đơn giản là hệ tọa độ Oxyz.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vectơ:



a) Định nghĩa: $\vec{u} = (x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3),\ k \in R$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0;0;0),\ \vec{i} = (1;0;0),\ \vec{j} = (0;1;0),\ \vec{k} = (0;0;1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \in R)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},\ (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ *(với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)*

3. Tọa độ của điểm:

a) Định nghĩa: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y;z)$ *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

Chú ý:
- *$M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$; $M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$; $M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$*
- *$M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0$; $M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0$; $M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$*

b) Tính chất: Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A),\ B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số *k (k≠1)*: $M\left(\dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_C}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vectơ: *(Chương trình nâng cao)*

a) Định nghĩa: Cho $\vec{a}=(a_1,\, a_2,\, a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\, b_2,\, b_3)$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

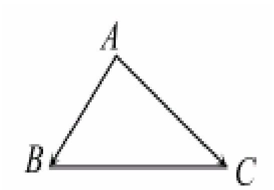
Chú ý: *Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.*

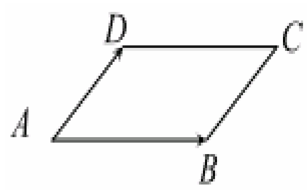
b) Tính chất:

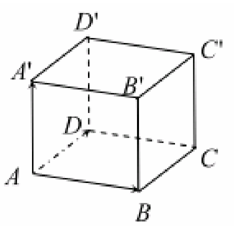
- $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$; $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$; $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$
- $[\vec{a},\, \vec{b}]\perp\vec{a}$; $[\vec{a},\, \vec{b}]\perp\vec{b}$
- $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
- $\vec{a},\, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $[\vec{a},\, \vec{b}]=\vec{0}$

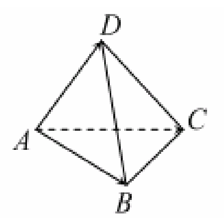
c) Ứng dụng của tích có hướng:

- ***Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:*** $\vec{a},\, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $[\vec{a},\, \vec{b}].\vec{c}=0$
- ***Diện tích hình bình hành ABCD:*** $S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- ***Diện tích tam giác ABC:*** $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ***Thể tích khối hộp ABCD.A′B′C′D′:*** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- ***Thể tích tứ diện ABCD:*** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$









Chú ý:

– ***Tích vô hướng*** *của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.*

– ***Tích có hướng*** *của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.*

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0 \\ \vec{a}\ \text{và}\ \vec{b}\ \text{cùng phương}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0} \\ \vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\ \text{đồng phẳng}\ \Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0 \end{array}}$$

5. Phương trình mặt cầu:

- Phương trình mặt cầu (S) tâm *I(a; b; c)*, bán kính *R*:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

- Phương trình $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm *I(–a; –b; –c)* và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

VẤN ĐỀ 1: Các phép toán về toạ độ của vectơ và của điểm

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.
– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

Bài 1. Viết tọa độ của các vectơ sau đây:

$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = 7\vec{i} - 8\vec{k}$; $\vec{c} = -9\vec{k}$; $\vec{d} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

Bài 2. Viết dưới dạng $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ mỗi vectơ sau đây:

$\vec{a} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$; $\vec{b} = (4; -5; 0)$; $\vec{c} = \left(\frac{4}{3}; 0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\vec{d} = \left(\pi; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Bài 3. Cho: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{u}$ với:

a) $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 3\vec{c}$ b) $\vec{u} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$ c) $\vec{u} = -4\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

d) $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ e) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ f) $\vec{u} = \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$

Bài 4. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$, biết rằng:

a) $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ với $\vec{a} = (1; -2; 1)$ b) $\vec{a} + \vec{x} = 4\vec{a}$ với $\vec{a} = (0; -2; 1)$

c) $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$

Bài 5. Cho $\vec{a} = (1; -3; 4)$.

a) Tìm y và z để $\vec{b} = (2; y; z)$ cùng phương với $\vec{a}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết rằng $\vec{a}$ *và* $\vec{c}$ ngược hướng và $|\vec{c}| = 2|\vec{a}|$.

Bài 6. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (4; 0; -1)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$. Tìm:

a) $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ b) $\vec{a}^2(\vec{b}.\vec{c})$ c) $\vec{a}^2\vec{b} + \vec{b}^2\vec{c} + \vec{c}^2\vec{a}$

d) $3\vec{a} - 2(\vec{a}.\vec{b})\vec{b} + \vec{c}^2\vec{b}$ e) $4\vec{a}.\vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$

Bài 7. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = (4; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ b) $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$

c) $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$ d) $\vec{a} = (3; 2; 2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; -1)$

e) $\vec{a} = (-4; 2; 4)$, $\vec{b} = (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 0)$ f) $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$

Bài 8. Tìm vectơ $\vec{u}$, biết rằng:

a) $\begin{cases} \vec{a} = (2; -1; 3),\ \vec{b} = (1; -3; 2),\ \vec{c} = (3; 2; -4) \\ \vec{a}.\vec{u} = -5, \quad \vec{u}.\vec{b} = -11, \quad \vec{u}.\vec{c} = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec{a} = (2; 3; -1),\ \vec{b} = (1; -2; 3),\ \vec{c} = (2; -1; 1) \\ \vec{u} \perp \vec{a}, \quad \vec{u} \perp \vec{b}, \quad \vec{u}.\vec{c} = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec{a} = (2; 3; 1),\ \vec{b} = (1; -2; -1),\ \vec{c} = (-2; 4; 3) \\ \vec{a}.\vec{u} = 3, \quad \vec{b}.\vec{u} = 4, \quad \vec{c}.\vec{u} = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \vec{a} = (5; -3; 2),\ \vec{b} = (1; 4; -3),\ \vec{c} = (-3; 2; 4) \\ \vec{a}.\vec{u} = 16, \quad \vec{b}.\vec{u} = 9, \quad \vec{c}.\vec{u} = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \vec{a} = (7; 2; 3),\ \vec{b} = (4; 3; -5),\ \vec{c} = (1; 1; -1) \\ \vec{a}.\vec{u} = -5, \quad \vec{b}.\vec{u} = -7, \quad \vec{c} \perp \vec{u} \end{cases}$

Bài 9. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Tìm m để:

a) $\begin{cases} \vec{a} = (2; 1; -2),\ \vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}) \\ \vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} \text{ và } \vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} \text{ vuông góc} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec{a} = (3; -2; 1),\ \vec{b} = (2; 1; -1) \\ \vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b} \text{ và } \vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b} \text{ vuông góc} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec{a} = (3; -2; 1),\ \vec{b} = (2; 1; -1) \\ \vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b} \text{ và } \vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b} \text{ cùng phương} \end{cases}$

Bài 10. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Tính $X,\ Y$ khi biết:

a) $\begin{cases}|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=6\\ X=|\vec{a}-\vec{b}|\end{cases}$ b) $\begin{cases}\vec{a}=(2;-1;-2),\ |\vec{b}|=6,\ |\vec{a}-\vec{b}|=4\\ Y=|\vec{a}+\vec{b}|\end{cases}$

c) $\begin{cases}|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=6,\ (\vec{a},\vec{b})=120^0\\ X=|\vec{a}-\vec{b}|,\ Y=|\vec{a}+\vec{b}|\end{cases}$ d) $\begin{cases}\vec{a}=(2;-1;-2),\ |\vec{b}|=6,\ (\vec{a},\vec{b})=60^0\\ X=|\vec{a}-\vec{b}|, Y=|\vec{a}+\vec{b}|\end{cases}$

Bài 11. Cho ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Tìm *m, n* để $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$:

a) $\vec{a}=(3;-1;-2),\ \vec{b}=(1;2;m),\ \vec{c}=(5;1;7)$

b) $\vec{a}=(6;-2;m),\ \vec{b}=(5;n;-3),\ \vec{c}=(6;33;10)$

c) $\vec{a}=(2;3;1),\ \vec{b}=(5;6;4),\ \vec{c}=(m;n;1)$

Bài 12. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ trong mỗi trường hợp sau đây:

a) $\vec{a}=(1;-1;1),\ \vec{b}=(0;1;2),\ \vec{c}=(4;2;3)$ b) $\vec{a}=(4;3;4),\ \vec{b}=(2;-1;2),\ \vec{c}=(1;2;1)$

c) $\vec{a}=(-3;1;-2),\ \vec{b}=(1;1;1),\ \vec{c}=(-2;2;1)$ d) $\vec{a}=(4;2;5),\ \vec{b}=(3;1;3),\ \vec{c}=(2;0;1)$

e) $\vec{a}=(2;3;1),\vec{b}=(1;-2;0),\vec{c}=(3;-2;4)$ f) $\vec{a}=(5;4;-8),\vec{b}=(-2;3;0),\vec{c}=(1;7;-7)$

g) $\vec{a}=(2;-4;3),\vec{b}=(1;2;-2),\vec{c}=(3;-2;1)$ h) $\vec{a}=(2;-4;3),\vec{b}=(-1;3;-2),\vec{c}=(3;-2;1)$

Bài 13. Tìm *m* để 3 vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng:

a) $\vec{a}=(1;m;2),\ \vec{b}=(m+1;2;1),\ \vec{c}=(0;m-2;2)$

b) $\vec{a}=(2m+1;1;2m-1);\ \vec{b}=(m+1;2;m+2),\ \vec{c}=(2m;m+1;2)$

c) $\vec{a}=(m+1;m;m-2),\ \vec{b}=(m-1;m+2;m),\ \vec{c}=(1;2;2)$

d) $\vec{a}=(1;-3;2),\ \vec{b}=(m+1;m-2;1-m),\ \vec{c}=(0;m-2;2)$

Bài 14. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{u}$. Chứng minh ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ theo các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

a) $\begin{cases}\vec{a}=(2;1;0),\ \vec{b}=(1;-1;2),\ \vec{c}=(2;2;-1)\\ \vec{u}=(3;7;-7)\end{cases}$ b) $\begin{cases}\vec{a}=(1;-7;9),\ \vec{b}=(3;-6;1),\ \vec{c}=(2;1;-7)\\ \vec{u}=(-4;13;-6)\end{cases}$

c) $\begin{cases}\vec{a}=(1;0;1),\ \vec{b}=(0;-1;1),\ \vec{c}=(1;1;0)\\ \vec{u}=(8;9;-1)\end{cases}$ d) $\begin{cases}\vec{a}=(1;0;2),\ \vec{b}=(2;-3;0),\ \vec{c}=(0;-3;4)\\ \vec{u}=(-1;-6;22)\end{cases}$

e) $\begin{cases}\vec{a}=(2;-3;1),\ \vec{b}=(-1;2;5),\ \vec{c}=(2;-2;6)\\ \vec{u}=(3;1;2)\end{cases}$ f) $\begin{cases}\vec{a}=(2;-1;1),\ \vec{b}=(1;-3;2),\ \vec{c}=(-3;2;-2)\\ \vec{u}=(4;3;-5)\end{cases}$

Bài 15. Chứng tỏ bốn vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ đồng phẳng:

a) $\vec{a}=(-2;-6;1),\ \vec{b}=(4;-3;-2),\ \vec{c}=(-4;-2;2),\vec{d}=(-2;-11;1)$

b) $\vec{a}=(2;6;-1),\ \vec{b}=(2;1;-1),\ \vec{c}=(-4;3;2),\vec{d}=(2;11;-1)$

Bài 16. Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng và vectơ $\vec{d}$. Chứng minh bộ ba vectơ sau không đồng phẳng:

a) $\vec{b},\ \vec{c},\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (với *m, n ≠ 0)* b) $\vec{a},\ \vec{c},\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (với *m, n ≠ 0)*

c) $\vec{a},\vec{b},\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, (với *m, n, p ≠ 0)* d) $\vec{b},\vec{c},\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, (với *m, n, p ≠ 0)*

e) $\vec{a},\vec{c},\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, (với *m, n, p ≠ 0)*

VẤN ĐỀ 2: Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học. Diện tích – Thể tích.

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.
– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.
– Công thức xác định toạ độ của các điểm đặc biệt.
– Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:

• *A, B, C thẳng hàng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$

• *ABCD là hình bình hành* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

• *Cho ΔABC có các chân E, F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC trên BC. Ta có:* $\overrightarrow{EB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FB} = \frac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$

• *A, B, C, D không đồng phẳng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ *không đồng phẳng* $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$

Bài 1. Cho điểm M. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M:

• Trên các mặt phẳng tọa độ: Oxy, Oxz, Oyz • Trên các trục tọa độ: Ox, Oy, Oz

a) $M(1;2;3)$ b) $M(3;-1;2)$ c) $M(-1;1;-3)$ d) $M(1;2;-1)$
e) $M(2;-5;7)$ f) $M(22;-15;7)$ g) $M(11;-9;10)$ h) $M(3;6;7)$

Bài 2. Cho điểm M. Tìm tọa độ của điểm M′ đối xứng với điểm M:

• Qua gốc toạ độ • Qua mp(Oxy) • Qua trục Oy

a) $M(1;2;3)$ b) $M(3;-1;2)$ c) $M(-1;1;-3)$ d) $M(1;2;-1)$
e) $M(2;-5;7)$ f) $M(22;-15;7)$ g) $M(11;-9;10)$ h) $M(3;6;7)$

Bài 3. Xét tính thẳng hàng của các bộ ba điểm sau:

a) $A(1;3;1), B(0;1;2), C(0;0;1)$ b) $A(1;1;1), B(-4;3;1), C(-9;5;1)$
c) $A(10;9;12), B(-20;3;4), C(-50;-3;-4)$ d) $A(-1;5;-10), B(5;-7;8), C(2;2;-7)$

Bài 4. Cho ba điểm A, B, C.

• Chứng tỏ ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
• Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.
• Xác định điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.
• Xác định toạ độ các chân E, F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC trên BC. Tính độ dài các đoạn phân giác đó.
• Tính số đo các góc trong ΔABC.
• Tính diện tích ΔABC. Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC.

a) $A(1;2;-3), B(0;3;7), C(12;5;0)$ b) $A(0;13;21), B(11;-23;17), C(1;0;19)$
c) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2), C(1;2;-3)$ d) $A(4;2;3), B(-2;1;-1), C(3;8;7)$
e) $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ f) $A(4;1;4), B(0;7;-4), C(3;1;-2)$
g) $A(1;0;0),\ B(0;0;1),\ C(2;1;1)$ h) $A(1;-2;6), B(2;5;1), C(-1;8;4)$

Bài 5. Trên trục Oy *(Ox)*, tìm điểm cách đều hai điểm:

a) $A(3;1;0)$, $B(-2;4;1)$ b) $A(1;-2;1), B(11;0;7)$ c) $A(4;1;4), B(0;7;-4)$
d) $A(3;-1;2), B(1;2;-1)$ e) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2)$ f) $A(4;2;3), B(-2;1;-1)$

Bài 6. Trên mặt phẳng Oxy *(Oxz, Oyz)*, tìm điểm cách đều ba điểm:

a) $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(3;1;-1)$ b) $A(-3;2;4), B(0;0;7), C(-5;3;3)$
c) $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ d) $A(0;13;21), B(11;-23;17), C(1;0;19)$
e) $A(1;0;2), B(-2;1;1), C(1;-3;-2)$ f) $A(1;-2;6), B(2;5;1), C(-1;8;4)$

Bài 7. Cho hai điểm A, B. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng Oyz *(Oxz, Oxy)* tại điểm M.

• Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào ? • Tìm tọa độ điểm M.

a) $A(2;-1;7),\ B(4;5;-2)$ b) $A(4;3;-2), B(2;-1;1)$ c) $A(10;9;12), B(-20;3;4)$

d) $A(3;-1;2), B(1;2;-1)$ e) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2)$ f) $A(4;2;3), B(-2;1;-1)$

Bài 8. Cho bốn điểm A, B, C, D.

• Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.
• Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD.
• Tính góc tạo bởi các cạnh đối diện của tứ diện ABCD.
• Tính thể tích của khối tứ diện ABCD.
• Tính diện tích tam giác BCD, từ đó suy ra độ dài đường cao của tứ diện vẽ từ A.

a) $A(2;5;-3),\ B(1;0;0),\ C(3;0;-2),\ D(-3;-1;2)$ b) $A(1;0;0),\ B(0;1;0),\ C(0;0;1),\ D(-2;1;-1)$

c) $A(1;1;0),\ B(0;2;1),\ C(1;0;2),\ D(1;1;1)$ d) $A(2;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;6),\ D(2;4;6)$

e) $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$ f) $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$

g) $A(2;4;1), B(-1;0;1), C(-1;4;2), D(1;-2;1)$ h) $A(-3;2;4), B(2;5;-2), C(1;-2;2), D(4;2;3)$

i) $A(3;4;8), B(-1;2;1), C(5;2;6), D(-7;4;3)$ k) $A(-3;-2;6), B(-2;4;4), C(9;9;-1), D(0;0;1)$

Bài 9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

• Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.
• Tính thể tích khối hộp.

a) $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5)$ b) $A(2;5;-3), B(1;0;0), C(3;0;-2), A'(-3;-1;2)$

c) $A(0;2;1), B(1;-1;1), D(0;0;0;), A'(-1;1;0)$ d) $A(0;2;2), B(0;1;2), C(-1;1;1), C'(1;-2;-1)$

Bài 10. Cho bốn điểm S(3; 1; –2), A(5; 3; 1), B(2; 3; –4), C(1; 2; 0).

a) Chứng minh SA ⊥ (SBC), SB ⊥ (SAC), SC ⊥ (SAB).
b) Chứng minh S.ABC là một hình chóp đều.
c) Xác định toạ độ chân đường cao H của hình chóp. Suy ra độ dài đường cao SH.

Bài 11. Cho bốn điểm S(1; 2; 3), A(2; 2; 3), B(1; 3; 3), C(1; 2; 4).

a) Chứng minh SA ⊥ (SBC), SB ⊥ (SAC), SC ⊥ (SAB).
b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh SMNP là tứ diện đều.
c) Vẽ SH ⊥ (ABC). Gọi S′ là điểm đối xứng của H qua S. Chứng minh S′ABC là tứ diện đều.

Bài 12. Cho hình hộp chữ nhật OABC.DEFG. Gọi I là tâm của hình hộp.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.

b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{BI}$ theo các vectơ $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FI}$.

Bài 13. Cho hình lập phương ABCD.EFGH.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

Bài 14. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BB′. Chứng minh rằng MN ⊥ A′C.

Bài 15. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với cạnh bằng 1. Trên các cạnh BB′, CD, A′D′ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho B′M = CN = D′P = x $(0 < x < 1)$. Chứng minh AC′ vuông góc với mặt phẳng (MNP).

VẤN ĐỀ 3: Phương trình mặt cầu

Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần xác định **tâm I** *và* **bán kính R** *của mặt cầu.*

Dạng 1: *(S)* có tâm *I(a; b; c)* và bán kính *R:*

$$\textbf{(S):}\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Dạng 2: *(S)* có tâm *I(a; b; c)* và đi qua điểm A:

Khi đó bán kính R = IA.

Dạng 3: *(S)* nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

– *Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB:* $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2};\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2};\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

– *Bán kính* $R=IA=\dfrac{AB}{2}$.

Dạng 4: *(S)* đi qua bốn điểm A, B, C, D *(mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD):*

– *Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng:* $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ (*).

– *Thay lần lượt toạ độ của các điểm A, B, C, D vào (*), ta được 4 phương trình.*

– *Giải hệ phương trình đó, ta tìm được a, b, c, d* $\Rightarrow$ *Phương trình mặt cầu (S).*

Dạng 5: *(S)* đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước:

Giải tương tự như dạng 4.

Dạng 6: *(S)* có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu *(T)* cho trước:

– *Xác định tâm J và bán kính* R' *của mặt cầu (T).*

– *Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S).*

(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Chú ý: *Với phương trình mặt cầu (S):*

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \qquad \text{với } a^2+b^2+c^2-d>0$$

thì (S) có tâm *I(–a; –b; –c)* và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Bài 1. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu sau:

a) $x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$

b) $x^2+y^2+z^2+4x+8y-2z-4=0$

c) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

d) $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86=0$

e) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$

f) $x^2+y^2+z^2-6x-12y+12z+72=0$

g) $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$

h) $x^2+y^2+z^2-3x+4y=0$

i) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-3y+15z-2=0$

k) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+10=0$

Bài 2. Xác định *m, t, α, ...* để phương trình sau xác định một mặt cầu, tìm tâm và bán kính của các mặt cầu đó:

a) $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$

b) $x^2+y^2+z^2-2(3-m)x-2(m+1)y-2mz+2m^2+7=0$

c) $x^2+y^2+z^2+2(\cos\alpha+1)x-4y-2\cos\alpha.z+\cos 2\alpha+7=0$

d) $x^2+y^2+z^2+2(3-2\cos^2\alpha)x+4(\sin^2\alpha-1)y+2z+\cos 4\alpha+8=0$

e) $x^2+y^2+z^2-2\ln t.x+2y-6z+3\ln t+8=0$

f) $x^2+y^2+z^2+2(2-\ln t)x+4\ln t.y+2(\ln t+1)z+5\ln^2 t+8=0$

Bài 3. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và bán kính R:

a) $I(1;-3;5),\quad R=\sqrt{3}$ b) $I(5;-3;7),\quad R=2$ c) $I(1;-3;2),\quad R=5$ d) $I(2;4;-3),\quad R=3$

Bài 4. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A:

a) $I(2;4;-1),\ A(5;2;3)$ b) $I(0;3;-2),\ A(0;0;0)$ c) $I(3;-2;1),\ A(2;1;-3)$

d) $I(4;-4;-2),\ A(0;0;0)$ e) $I(4;-1;2),\ A(1;-2;-4)$

Bài 5. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB, với:

a) $A(2;4;-1),\ B(5;2;3)$ b) $A(0;3;-2),\ B(2;4;-1)$ c) $A(3;-2;1),\ B(2;1;-3)$

d) $A(4;-3;-3),\ B(2;1;5)$ e) $A(2;-3;5),\ B(4;1;-3)$ f) $A(6;2;-5),\ B(-4;0;7)$

Bài 6. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, với:

a) $A(1;1;0),\ B(0;2;1),\ C(1;0;2),\ D(1;1;1)$ b) $A(2;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;6),\ D(2;4;6)$

c) $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$ d) $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$

e) $A(6;-2;3), B(0;1;6), C(2;0;-1), D(4;1;0)$ f) $A(0;1;0), B(2;3;1), C(-2;2;2), D(1;-1;2)$

Bài 7. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trong mặt phẳng (P) cho trước, với:

a) $\begin{cases} A(1;2;0), B(-1;1;3), C(2;0;-1) \\ (P) \equiv (Oxz) \end{cases}$ b) $\begin{cases} A(2;0;1), B(1;3;2), C(3;2;0) \\ (P) \equiv (Oxy) \end{cases}$

Bài 8. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T), với:

a) $\begin{cases} I(-5;1;1) \\ (T): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} I(-3;2;2) \\ (T): x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+5=0 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu mặt cầu

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1, R_1)$ và $S_2(I_2, R_2)$.

- $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ *(S_1), (S_2) trong nhau*
- $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ *(S_1), (S_2) ngoài nhau*
- $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ *(S_1), (S_2) tiếp xúc trong*
- $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ *(S_1), (S_2) tiếp xúc ngoài*
- $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ *(S_1), (S_2) cắt nhau theo một đường tròn.*

Bài 1. Xét vị trí tương đối của hai mặt cầu:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z-4=0 \\ x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9 \\ x^2+y^2+z^2-6x-10y-6z-21=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-10z+5=0 \\ x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z-15=0 \\ x^2+y^2+z^2+4x-12y-2z+25=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z+5=0 \\ x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-2=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-3=0 \\ x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-2=0 \end{cases}$

Bài 2. Biện luận theo *m* vị trí tương đối của hai mặt cầu:

a) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=64 \\ (x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=(m+2)^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=81 \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(m-3)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25 \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=(m-1)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=16 \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(m+3)^2 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 5: Tập hợp điểm là mặt cầu – Tập hợp tâm mặt cầu

1. Tập hợp điểm là mặt cầu

Giả sử tìm tập hợp điểm M thoả tính chất (P) nào đó.

– Tìm hệ thức giữa các toạ độ x, y, z của điểm M. Chẳng hạn có dạng:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

$$\text{hoặc:}\quad x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$$

– Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

2. Tìm tập hợp tâm mặt cầu

– Tìm toạ độ của tâm I, chẳng hạn: $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$ $(*)$

– Khử t trong (*) ta có phương trình tập hợp điểm.

– Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

Bài 1. Cho hai điểm A(1; 2; 1), B(3; 1; –2). Tìm tập hợp các điểm M(x; y; z) sao cho:

a) $MA^2+MB^2=30$ b) $\dfrac{MA}{MB}=2$ c) $MA^2+MB^2=k^2\ (k>0)$

Bài 2. Cho hai điểm A(2; –3; –1), B(–4; 5; –3). Tìm tập hợp các điểm M(x; y; z) sao cho:

a) $MA^2+MB^2=124$ b) $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\widehat{AMB}=90^0$

d) MA = MB e) $MA^2+MB^2=2(k^2+1)\ (k>0)$

Bài 3. Tìm tập hợp các tâm I của mặt cầu sau khi *m* thay đổi:

a) $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2(m-3)z+19-2m=0$

b) $x^2+y^2+z^2+2(m-2)x+4y-2z+2m+4=0$

c) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2(m+1)z+2m^2+6=0$

d) $x^2+y^2+z^2-4(2+\cos m)x-2(5+2\sin m)y-6z+\cos 2m+1=0$

e) $x^2+y^2+z^2+2(3-4\cos m)x-2(4\sin m+1)y-4z-5-2\sin^2 m=0$

III. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến – Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

• Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là VTPT của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α).

• Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương là cặp VTCP của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α).

Chú ý: *• Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTPT của (α).*

• Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là một cặp VTCP của (α) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một VTPT của (α).

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0}$$

• Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một VTPT của (α).

• Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

3. Các trường hợp riêng

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
D = 0	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc toạ độ O
A = 0	$By + Cz + D = 0$	(α) // Ox hoặc (α) ⊃ Ox
B = 0	$Ax + Cz + D = 0$	(α) // Oy hoặc (α) ⊃ Oy
C = 0	$Ax + By + D = 0$	(α) // Oz hoặc (α) ⊃ Oz
A = B = 0	$Cz + D = 0$	(α) // (Oxy) hoặc (α) ≡ (Oxy)
A = C = 0	$By + D = 0$	(α) // (Oxz) hoặc (α) ≡ (Oxz)
B = C = 0	$Ax + D = 0$	(α) // (Oyz) hoặc (α) ≡ (Oyz)

Chú ý: *• Nếu trong phương trình của (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.*

• Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

(α) cắt các trục toạ độ tại các điểm (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)

4. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình: (α): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(β): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

• *(α), (β) cắt nhau* $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

• *(α) // (β)* $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ • *(α) ≡ (β)* $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

• *(α) ⊥ (β)* $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

5. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\boxed{d\left(M_0, (\alpha)\right) = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

VẤN ĐỀ 1: Viết phương trình mặt phẳng

*Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một **điểm** thuộc (α) và một **VTPT** của nó.*

Dạng 1: *(α)* đi qua điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có VTPT $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$:

$$(\alpha):\ A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

Dạng 2: *(α)* đi qua điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có cặp VTCP $\vec{a},\vec{b}$:

Khi đó một VTPT của (α) là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Dạng 3: *(α)* đi qua điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và song song với mặt phẳng *(β): Ax + By + Cz + D = 0*:

$$(\alpha):\ A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

Dạng 4: *(α)* đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C:

Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$

Dạng 5: *(α)* đi qua một điểm M và một đường thẳng (d) không chứa M:

– *Trên (d) lấy điểm A và VTCP* $\vec{u}$.

– *Một VTPT của (α) là:* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]$

Dạng 6: *(α)* đi qua một điểm M và vuông góc với một đường thẳng (d):

VTCP $\vec{u}$ *của đường thẳng (d) là một VTPT của (α).*

Dạng 7: *(α)* đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d_1, d_2:

– *Xác định các VTCP* $\vec{a},\vec{b}$ *của các đường thẳng d_1, d_2.*

– *Một VTPT của (α) là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– *Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc d_2 $\Rightarrow M\in(\alpha)$.*

Dạng 8: *(α)* chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 *(d_1, d_2 chéo nhau)*:

– *Xác định các VTCP* $\vec{a},\vec{b}$ *của các đường thẳng d_1, d_2.*

– *Một VTPT của (α) là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– *Lấy một điểm M thuộc d_1 $\Rightarrow M\in(\alpha)$.*

Dạng 9: *(α)* đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2:

– *Xác định các VTCP* $\vec{a},\vec{b}$ *của các đường thẳng d_1, d_2.*

– *Một VTPT của (α) là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Dạng 10: *(α)* đi qua một đường thẳng (d) và vuông góc với một mặt phẳng (β):

– *Xác định VTCP* $\vec{u}$ *của (d) và VTPT* $\vec{n}_\beta$ *của (β).*

– *Một VTPT của (α) là:* $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{n}_\beta\right]$.

– *Lấy một điểm M thuộc d $\Rightarrow M\in(\alpha)$.*

Dạng 11: *(α)* đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β), (γ):

– *Xác định các VTPT* $\vec{n}_\beta,\vec{n}_\gamma$ *của (β) và (γ).*

– *Một VTPT của (α) là:* $\vec{n}=\left[\vec{u}_\beta,\vec{n}_\gamma\right]$.

Dạng 12: *(α)* đi qua đường thẳng (d) cho trước và cách điểm M cho trước một khoảng k cho trước:

– *Giả sử (α) có phương trình:* $Ax+By+Cz+D=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

– *Lấy 2 điểm A, B $\in$ (d) $\Rightarrow$ A, B $\in$ (α) (ta được hai phương trình (1), (2)).*

– *Từ điều kiện khoảng cách* $d(M,(\alpha))=k$, *ta được phương trình (3).*

– *Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).*

Dạng 13: *(α)* là tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H:

– *Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.*

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$

Chú ý: *Để viết phương trình mặt phẳng cần nắm vững các cách xác định mặt phẳng đã học ở lớp 11.*

Bài 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có VTPT $\vec{n}$ cho trước:

a) $M(3;1;1),\ \vec{n} = (-1;1;2)$ b) $M(-2;7;0),\ \vec{n} = (3;0;1)$ c) $M(4;-1;-2),\ \vec{n} = (0;1;3)$

d) $M(2;1;-2),\ \vec{n} = (1;0;0)$ e) $M(3;4;5), \vec{n} = (1;-3;-7)$ f) $M(10;1;9),\ \vec{n} = (-7;10;1)$

Bài 2. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB cho trước, với:

a) $A(2;1;1),\ B(2;-1;-1)$ b) $A(1;-1;-4),\ B(2;0;5)$ c) $A(2;3;-4),\ B(4;-1;0)$

d) $A\left(\frac{1}{2};-1;0\right),\ B\left(1;-\frac{1}{2};5\right)$ e) $A\left(1;\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right),\ B\left(-3;\frac{1}{3};1\right)$ f) $A(2;-5;6),\ B(-1;-3;2)$

Bài 3. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và có cặp VTCP $\vec{a}, \vec{b}$ cho trước, với:

a) $M(1;2;-3),\ \vec{a} = (2;1;2),\ \vec{b} = (3;2;-1)$ b) $M(1;-2;3),\ \vec{a} = 3;-1;-2),\ \vec{b} = (0;3;4)$

c) $M(-1;3;4),\ \vec{a} = (2;7;2),\ \vec{b} = (3;2;4)$ d) $M(-4;0;5),\ \vec{a} = (6;-1;3);\ \vec{b} = (3;2;1)$

Bài 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và song song với mặt phẳng (β) cho trước, với:

a) $M(2;1;5),\ (\beta) = (Oxy)$ b) $M(1;-2;1),\ (\beta): 2x - y + 3 = 0$

c) $M(-1;1;0),\ (\beta): x - 2y + z - 10 = 0$ d) $M(3;6;-5),\ (\beta): -x + z - 1 = 0$

e) $M(2;-3;5),\ (\beta): x + 2y - z + 5 = 0$ f) $M(1;1;1),\ (\beta): 10x - 10y + 20z - 40 = 0$

Bài 5. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và lần lượt song song với các mặt phẳng toạ độ, với:

a) $M(2;1;5)$ b) $M(1;-2;1)$ c) $M(-1;1;0)$ d) $M(3;6;-5)$

e) $M(2;-3;5)$ f) $M(1;1;1)$ g) $M(-1;1;0)$ h) $M(3;6;-5)$

Bài 6. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng cho trước, với:

a) $A(1;-2;4),\ B(3;2;-1),\ C(-2;1;-3)$ b) $A(0;0;0),\ B(-2;-1;3),\ C(4;-2;1)$

c) $A(-1;2;3),\ B(2;-4;3),\ C(4;5;6)$ d) $A(3;-5;2),\ B(1;-2;0),\ C(0;-3;7)$

e) $A(2;-4;0),\ B(5;1;7),\ C(-1;-1;-1)$ f) $A(3;0;0),\ B(0;-5;0),\ C(0;0;-7)$

Bài 7. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm B, C cho trước, với:

a) $A(1;-2;4),\ B(3;2;-1),\ C(-2;1;-3)$ b) $A(0;0;0),\ B(-2;-1;3),\ C(4;-2;1)$

c) $A(-1;2;3),\ B(2;-4;3),\ C(4;5;6)$ d) $A(3;-5;2),\ B(1;-2;0),\ C(0;-3;7)$

e) $A(2;-4;0),\ B(5;1;7),\ C(-1;-1;-1)$ f) $A(3;0;0),\ B(0;-5;0),\ C(0;0;-7)$

Bài 8. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β) cho trước, với:

a) $\begin{cases} A(3;1;-1),\ B(2;-1;4) \\ (\beta): 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} A(-2;-1;3),\ B(4;-2;1) \\ (\beta): 2x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} A(2;-1;3),\ B(-4;7;-9) \\ (\beta): 3x + 4y - 8z - 5 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} A(3;-1;-2),\ B(-3;1;2) \\ (\beta): 2x - 2y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

Bài 9. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng (β), (γ) cho trước, với:

a) $M(-1;-2;5), (\beta): x + 2y - 3z + 1 = 0, (\gamma): 2x - 3y + z + 1 = 0$

b) $M(1;0;-2)$, $(\beta): 2x+y-z-2=0$, $(\gamma): x-y-z-3=0$

c) $M(2;-4;0)$, $(\beta): 2x+3y-2z+5=0$, $(\gamma): 3x+4y-8z-5=0$

d) $M(5;1;7)$, $(\beta): 3x-4y+3z+6=0$, $(\gamma): 3x-2y+5z-3=0$

Bài 10. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) cho trước, với:

a) $M(1;2;-3)$, $(P): 2x-3y+z-5=0$, $(Q): 3x-2y+5z-1=0$

b) $M(2;1;-1)$, $(P): x-y+z-4=0$, $(Q): 3x-y+z-1=0$

c) $M(3;4;1)$, $(P): 19x-6y-4z+27=0$, $(Q): 42x-8y+3z+11=0$

d) $M(0;0;1)$, $(P): 5x-3y+2z-5=0$, $(Q): 2x-y-z-1=0$

Bài 11. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q), đồng thời song song với mặt phẳng (R) cho trước, với:

a) $(P): y+2z-4=0$, $(Q): x+y-z-3=0$, $(R): x+y+z-2=0$

b) $(P): x-4y+2z-5=0$, $(Q): y+4z-5=0$, $(R): 2x-y+19=0$

c) $(P): 3x-y+z-2=0$, $(Q): x+4y-5=0$, $(R): 2x-z+7=0$

Bài 12. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q), đồng thời vuông góc với mặt phẳng (R) cho trước, với:

a) $(P): 2x+3y-4=0$, $(Q): 2y-3z-5=0$, $(R): 2x+y-3z-2=0$

b) $(P): y+2z-4=0$, $(Q): x+y-z+3=0$, $(R): x+y+z-2=0$

c) $(P): x+2y-z-4=0$, $(Q): 2x+y+z+5=0$, $(R): x-2y-3z+6=0$

d) $(P): 3x-y+z-2=0$, $(Q): x+4y-5=0$, $(R): 2x-z+7=0$

Bài 13. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q), đồng thời cách điểm M cho trước một khoảng bằng *k*, với:

a) $(P): x-y-2=0$, $(Q): 5x-13y+2z=0$, $M(1;2;3)$, $k=2$

VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Bài 1. Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng sau:

a) $\begin{cases}2x+3y-2z+5=0\\3x+4y-8z-5=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-4y+3z+6=0\\3x-2y+5z-3=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}5x+5y-5z-1=0\\3x+3y-3z+7=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}6x-4y-6z+5=0\\12x-8y-12z-5=0\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x-2y-4z+5=0\\5x-5y-10z+\dfrac{25}{2}=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-2y-6z-23=0\\3x-2y-6z+33=0\end{cases}$

Bài 2. Xác định *m, n* để các cặp mặt phẳng sau: • song song • cắt nhau • trùng nhau

a) $\begin{cases}3x+my-2z-7=0\\nx+7y-6z+4=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}5x-2y+mz-11=0\\3x+ny+z-5=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+my+3z-5=0\\nx-6y-6z+2=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}3x-y+mz-9=0\\2x+ny+2z-3=0\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x+y+3z-5=0\\mx-6y-6z-2=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-5y+mz-3=0\\2x+y-3z+1=0\end{cases}$

g) $\begin{cases}x+my-z+2=0\\2x+y+4nz-3=0\end{cases}$ h) $\begin{cases}2x-ny+2z-1=0\\3x-y+mz-2=0\end{cases}$ i) $\begin{cases}3x-(m-3)y+2z-5=0\\(m+2)x-2y+mz-10=0\end{cases}$

Bài 3. Xác định *m* để các cặp mặt phẳng sau vuông góc với nhau

a) $\begin{cases}2x-7y+mz+2=0\\3x+y-2z+15=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2m-1)x-3my+2z+3=0\\mx+(m-1)y+4z-5=0\end{cases}$

c) $\begin{cases} mx+2y+mz-12=0 \\ x+my+z+7=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-(m-3)y+2z-5=0 \\ (m+2)x-2y+mz-10=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-3y-3z=0 \\ mx+2y-7z-1=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x-5y+mz-3=0 \\ x+3y+2z+5=0 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 3: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song. Hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng . Điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng.

• *Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$*

$$\boxed{d\left(M_0,(\alpha)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

• *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

Chú ý: *Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.*

• *Điểm H là hình chiếu của điểm M trên (P)* $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH}, \vec{n} \text{ cùng phương} \\ H \in (P) \end{cases}$

• *Điểm M′ đối xứng với điểm M qua (P)* $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$

Bài 1. Cho mặt phẳng (P) và điểm M.

• Tính khoảng cách từ M đến (P). • Tìm toạ độ hình chiếu H của M trên (P).

• Tìm toạ độ điểm M′ đối xứng với M qua (P).

a) $(P): 2x-y+2z-6=0,\quad M(2;-3;5)$ b) $(P): x+y+5z-14=0,\quad M(1;-4;-2)$

c) $(P): 6x-2y+3z+12=0,\quad M(3;1;-2)$ d) $(P): 2x-4y+4z+3=0,\quad M(2;-3;4)$

e) $(P): x-y+z-4=0,\quad M(2;1;-1)$ f) $(P): 3x-y+z-2=0,\quad M(1;2;4)$

Bài 2. Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng:

a) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-2y+z+1=0 \\ 6x-2y+z-3=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 3x+5y-z-1=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-y+8z+1=0 \\ 4x-y+8z+5=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 3x+5y-z-1=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+6y-3z+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$

Bài 3. Tìm tập hợp các điểm cách mặt phẳng một khoảng bằng k cho trước:

a) $6x-3y+2z-7=0,\quad k=3$ b) $3x-2y-6z+5=0,\quad k=4$

c) $6x-2y+3z+12=0,\quad k=2$ d) $2x-4y+4z-14=0,\quad k=3$

Bài 4. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng:

a) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-2y+z+1=0 \\ 6x-2y+z-3=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 3x+5y-z-1=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-y+8z+1=0 \\ 4x-y+8z+5=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 3x+5y-z-1=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+6y-3z+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$

Bài 5. Tìm tập hợp các điểm có tỷ số các khoảng cách đến hai mặt phẳng bằng k cho trước:

a) $\begin{cases} x+2y-2z-10=0 \\ 2x+4y-4z+3=0 \\ k=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-2y+z+1=0 \\ 6x-2y+z-3=0 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+3y-2z-1=0 \\ 2x+2y-z+6=0 \\ k=\dfrac{4}{7} \end{cases}$

Bài 6. Tìm điểm M trên trục *Ox (Oy, Oz)* cách đều điểm N và mặt phẳng (P):

a) $(P): 2x+2y+z-5=0,\ N(1;2;-2)$ b) $(P): x+y+5z-14=0,\ N(1;-4;-2)$

c) $(P): 6x-2y+3z+12=0,\ N(3;1;-2)$ d) $(P): 2x-4y+4z+3=0,\ N(2;-3;4)$

e) $(P): x-y+z-4=0,\ N(2;1;-1)$ f) $(P): 3x-y+z-2=0,\ N(1;2;4)$

Bài 7. Tìm điểm M trên trục *Ox (Oy, Oz)* cách đều hai mặt phẳng:

a) $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+z-5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-2z+1=0 \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 4x+2y-z-1=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-y+8z+1=0 \\ 4x-y+8z+5=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 3x+5y-z-1=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+6y-3z+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$

Bài 8. Tìm phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Q) cho trước. Tính khoảng cách giữa (P) và (Q):

a) $A(1;2;-3),\ (Q): 2x-4y-z+4=0$. b) $A(3;\ 1;-2),\ (Q): 6x-2y+3z+12=0$.

Bài 9. Tìm phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cách điểm A một khoảng *k* cho trước:

a) $(Q): x+2y-2z+5=0,\ A(2;-1;4),\ k=4$ b) $(Q): 2x-4y+4z+3=0,\ A(2;-3;4),\ k=3$

Bài 10. Tìm phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) cách mặt phẳng (Q) một khoảng *k*:

a) $(Q): 3x-y+2z-3=0,\ k=\sqrt{14}$ b) $(Q): 4x+3y-2z+5=0,\ k=\sqrt{29}$

VẤN ĐỀ 4: Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình: (α): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

(β): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Góc giữa (α), (β) **bằng** *hoặc* **bù** *với góc giữa hai VTPT* $\vec{n}_1,\vec{n}_2$.

$$\boxed{\cos\left((\alpha),(\beta)\right)=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$$

Chú ý: • $0^0 \le \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) \le 90^0$. • $(\alpha)\perp(\beta) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Bài 1. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

a) $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+z-5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-2z+1=0 \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 4x+2y-z-1=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x+4y-2z+7=0 \\ 2x+4z-5=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y-2z+3=0 \\ \sqrt{2}y+\sqrt{2}z+12=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}z+2=0 \\ 4x+2y+4z-9=0 \end{cases}$

Bài 2. Tìm *m* để góc giữa hai mặt phẳng sau bằng α cho trước:

a) $\begin{cases} (2m-1)x-3my+2z+3=0 \\ mx+(m-1)y+4z-5=0 \\ \alpha=90^0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+2y+mz-12=0 \\ x+my+z+7=0 \\ \alpha=45^0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (m+2)x+2my-mz+5=0 \\ mx+(m-3)y+2z-3=0 \\ \alpha=90^0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx-y+mz+3=0 \\ (2m+1)x+(m-1)y+(m-1)z-6=0 \\ \alpha=30^0 \end{cases}$

Bài 3. Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi α,β,γ lần lượt là các góc hợp bởi các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA) với mặt phẳng (ABC). Bằng phương pháp toạ độ, chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn b) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

VẤN ĐỀ 5: Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.
Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

Cho mặt phẳng (α): $Ax+By+Cz+D=0$ *và mặt cầu (S):* $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

- (α) *và (S) không có điểm chung* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))>R$
- (α) *tiếp xúc với (S)* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))=R$ (α) *là tiếp diện*

Để tìm toạ độ tiếp điểm ta có thể thực hiện như sau:
– Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc với (α).
– Tìm toạ độ giao điểm H của d và (α).
H là tiếp điểm của (S) với (α).

- (α) *cắt (S) theo một đường tròn* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))<R$

Để xác định tâm H và bán kính r của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau:
– Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc với (α).
– Tìm toạ độ giao điểm H của d và (α).
H là tâm của đường tròn giao tuyến của (S) với (α).
Bán kính r của đường tròn giao tuyến: $r=\sqrt{R^2-IH^2}$

Bài 1. Xét vị trí tương đối giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S):

a) $\begin{cases}(P): 2x+2y+z-1=0\\(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0\end{cases}$

b) $\begin{cases}(P): 2x-3y+6z-9=0\\(S): (x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=16\end{cases}$

c) $\begin{cases}(P): x+y-2z-11=0\\(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+2=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}(P): x-2y+2z+5=0\\(S): x^2+y^2+z^2-6x-4y-8z+13=0\end{cases}$

e) $\begin{cases}(P): x+2y+2z=0\\(S): x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+10=0\end{cases}$

f) $\begin{cases}(P): z-3=0\\(S): x^2+y^2+z^2-6x+2y-16z+22=0\end{cases}$

Bài 2. Biện luận theo m, vị trí tương đối giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S):

a) $(P): 2x-2y-z-4=0$; $(S): x^2+y^2+z^2-2(m-1)x+4my+4z+8m=0$

b) $(P): 4x-2y+4z-5=0$; $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=(m-1)^2$

c) $(P): 3x+2y-6z+7=0$; $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=(m+2)^2$

d) $(P): 2x-3y+6z-10=0$; $(S): x^2+y^2+z^2+4mx-2(m+1)y-2z++3m^2+5m-4=0$

Bài 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước:

a) $I(3;-5;-2)$, $(P): 2x-y-3z+1=0$

b) $I(1;4;7)$, $(P): 6x+6y-7z+42=0$

c) $I(1;1;2)$, $(P): x+2y+2z+3=0$

d) $I(-2;1;1)$, $(P): x+2y-2z+5=0$

Bài 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) cho trước:

a) $(S): (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ tại $M(-1;3;0)$

b) $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$ tại $M(4;3;0)$

c) $(S): (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$ tại $M(7;-1;5)$

d) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ và song song với mặt phẳng $3x-2y+6z+14=0$.

e) $(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z-11=0$ và song song với mặt phẳng $4x+3z-17=0$.

f) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ và song song với mặt phẳng $x+2y+2z+5=0$.

g) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0$ và chứa đường thẳng $d: x=4t+4,\ y=3t+1,\ z=t+1$

h) Tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD tại A với A(6; –2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; –1), D(4; 1; 0).

i) Tiếp xúc với mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$ và song song với 2 đường thẳng: $d_1 : \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}$, $d_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}$.

Bài tập ôn: Phương trình mặt phẳng

Bài 1. Cho tứ diện ABCD.

• Viết phương trình các mặt của tứ diện.
• Viết phương trình mặt phẳng chứa một cạnh và song song với cạnh đối diện.
• Viết phương trình mặt phẳng đi qua một đỉnh và song song với mặt đối diện.
• Viết phương trình mặt phẳng đi qua cạnh AB và vuông góc với (BCD).
• Viết phương trình mặt phẳng trung trực của các cạnh tứ diện.
• Tìm toạ độ các điểm A′, B′, C′, D′ lần lượt là các điểm đối xứng với các điểm A, B, C, D qua các mặt đối diện.
• Tính khoảng cách từ một đỉnh của tứ diện đến mặt đối diện.
• Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD. Xác định tâm I và bán kính R của (S).
• Viết phương trình các tiếp diện của (S) tại các đỉnh A, B, C, D của tứ diện.
• Viết phương trình các tiếp diện của (S) song song với các mặt của tứ diện.

a) $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(4;0;6)$ b) $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$

c) $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$ d) $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$

e) $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$ f) $A(0;1;0), B(2;3;1), C(-2;2;2), D(1;-1;2)$

Bài 2. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt cắt ba trục toạ độ tại các điểm: A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; –3) và E(–2; 0; 0), F(0; 1; 0), G(0; 0; 1).

a) Tìm phương trình tổng quát của (P) và (Q).
b) Tính độ dài đường cao của hình chóp O.ABC.
c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q).

Bài 3. Cho bốn điểm: A(1; 1; 1), B(3; 3; 1), C(3; 1; 3) và D(1; 3; 3).

a) Chứng minh ABCD là một tứ diện đều.
b) Chứng minh tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối đôi một vuông góc.
c) Tìm phương trình tổng quát của các mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).
d) Tính góc giữa các cặp mặt phẳng: (ABC) và (ABD), (BCD) và (ACD).

IV. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tham số của đường thẳng

• **Phương trình tham số** của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$:

$$\boxed{(d):\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t \\ z=z_o+a_3t \end{cases} \quad (t\in R)}$$

• Nếu $a_1a_2a_3\neq 0$ thì $\boxed{(d):\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}}$ *đgl* ***phương trình chính tắc*** *của d.*

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d, d' có phương trình tham số lần lượt là:

$$d:\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases} \quad \text{và} \quad d':\begin{cases} x=x'_0+t'a'_1 \\ y=y'_0+t'a'_2 \\ z=z'_0+t'a'_3 \end{cases}$$

• $d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ cùng phương} \\ \text{hệ } \begin{cases} x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1 \\ y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2 \\ z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3 \end{cases} (\text{ẩn } t,t') \text{ vô nghiệm} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ cùng phương} \\ M_0(x_0;y_0;z_0)\notin d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ cùng phương} \\ \vec{a},\overrightarrow{M_0M'_0} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a},\vec{a}']=\vec{0} \\ \left[\vec{a},\overrightarrow{M_0M'_0}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$$

• $d\equiv d' \Leftrightarrow \text{hệ } \begin{cases} x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1 \\ y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2 \\ z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3 \end{cases} (\text{ẩn } t,t') \text{ có vô số nghiệm}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ cùng phương} \\ M_0(x_0;y_0;z_0)\in d' \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M'_0} \text{ đôi một cùng phương}$$

$$\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{a}']=\left[\vec{a},\overrightarrow{M_0M'_0}\right]=\vec{0}$$

• d, d' cắt nhau $\Leftrightarrow \text{hệ } \begin{cases} x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1 \\ y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2 \\ z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3 \end{cases} (\text{ẩn } t,\ t') \text{ có đúng một nghiệm}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ không cùng phương} \\ \vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M'_0} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a},\vec{a}']\neq\vec{0} \\ [\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{M_0M'_0}=0 \end{cases}$$

• d, d' chéo nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ không cùng phương} \\ \text{hệ } \begin{cases} x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1 \\ y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2 \\ z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3 \end{cases} (\text{ẩn } t,t') \text{ vô nghiệm} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M'_0} \text{ không đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{M_0M'_0}\neq 0$$

• $d\perp d' \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{a}' \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{a}'=0$

3. Vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và đường thẳng *d*: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$

Xét phương trình: $A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0$ (ẩn *t*) (*)

- *$d \parallel (\alpha)$ ⇔ (*) vô nghiệm*
- *d cắt (α) ⇔ (*) có đúng một nghiệm*
- *$d \subset (\alpha)$ ⇔ (*) có vô số nghiệm*

4. Vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt cầu

Cho đường thẳng *d*: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ (1) và mặt cầu *(S)*: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (2)

Để xét VTTĐ của *d* và *(S)* ta thay (1) vào (2), được một phương trình (*).

- *d và (S) không có điểm chung ⇔ (*) vô nghiệm ⇔ d(I, d) > R*
- *d tiếp xúc với (S) ⇔ (*) có đúng một nghiệm ⇔ d(I, d) = R*
- *d cắt (S) tại hai điểm phân biệt ⇔ (*) có hai nghiệm phân biệt ⇔ d(I, d) < R*

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng *(chương trình nâng cao)*

Cho đường thẳng *d* đi qua M_0 và có VTCP $\vec{a}$ và điểm M.

$$\boxed{d(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}}$$

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *(chương trình nâng cao)*

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.

d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\vec{a}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\vec{a}_2$

$$\boxed{d(d_1,d_2) = \frac{\left|\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2\right]\right|}}$$

Chú ý: *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 với mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1.*

7. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α).

8. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các VTCP $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

Góc giữa d_1, d_2 ***bằng*** *hoặc* ***bù*** *với góc giữa $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.*

$$\cos\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = \frac{\left|\vec{a}_1.\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right|.\left|\vec{a}_2\right|}$$

9. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d′ của nó trên (α).

$$\boxed{\sin\left(\widehat{d,(\alpha)}\right) = \frac{\left|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}}$$

VẤN ĐỀ 1: Lập phương trình đường thẳng

*Để lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định một **điểm** thuộc d và một **VTCP** của nó.*

Dạng 1: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$:

$$\boxed{(d):\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases} \quad (t \in R)}$$

Dạng 2: *d* đi qua hai điểm *A, B*:

Một VTCP của d là $\overrightarrow{AB}$.

Dạng 3: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước:

Vì d // Δ nên VTCP của Δ cũng là VTCP của d.

Dạng 4: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước:

Vì d ⊥ (P) nên VTPT của (P) cũng là VTCP của d.

Dạng 5: *d* là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q):

• *Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP.*

– *Tìm toạ độ một điểm A ∈ d: bằng cách giải hệ phương trình* $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ *(với việc chọn giá trị cho một ẩn)*

– *Tìm một VTCP của d:* $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$

• *Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.*

Dạng 6: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2:

Vì $d \perp d_1$, $d \perp d_2$ *nên một VTCP của d là:* $\vec{a}=\left[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}\right]$

Dạng 7: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

• *Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của* M_0 *trên đường thẳng Δ.*

$$\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, *H.*

• *Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d; (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khi đó d =* $(P) \cap (Q)$

Dạng 8: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2:

• *Cách 1: Gọi* $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$. *Từ điều kiện M,* M_1, M_2 *thẳng hàng ta tìm được* M_1, M_2. *Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.*

• *Cách 2: Gọi (P) =* (M_0,d_1), *(Q) =* (M_0,d_2). *Khi đó d = (P) ∩ (Q). Do đó, một VTCP của d có thể chọn là* $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$.

Dạng 9: *d* nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Tìm các giao điểm A = $d_1 \cap (P)$, *B =* $d_2 \cap (P)$. *Khi đó d chính là đường thẳng AB.*

Dạng 10: *d* song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, *mặt phẳng (Q) chứa Δ và* d_2.

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Dạng 11: *d* là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

• *Cách 1: Gọi M ∈* d_1, *N ∈* d_2. *Từ điều kiện* $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, *ta tìm được M, N.*

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• *Cách 2:*

– *Vì d ⊥ d_1 và d ⊥ d_2 nên một VTCP của d có thể là:* $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$.

– *Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, bằng cách:*

+ *Lấy một điểm A trên d_1.*

+ *Một VTPT của (P) có thể là:* $\vec{n}_P = \left[\vec{a}, \vec{a}_{d_1}\right]$.

– *Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_2.*

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Dạng 12: *d* là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P):

• *Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) bằng cách:*

– *Lấy M ∈ Δ.*

– *Vì (Q) chứa Δ và vuông góc với (P) nên* $\vec{n}_Q = \left[\vec{a}_\Delta, \vec{n}_P\right]$.

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Dạng 13: *d* đi qua điểm M, vuông góc với d_1 và cắt d_2:

• *Cách 1: Gọi N là giao điểm của d và d_2. Từ điều kiện MN ⊥ d_1, ta tìm được N.*

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• *Cách 2:*

– *Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d_1.*

– *Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M và d_2.*

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Bài 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm M và có VTCP $\vec{a}$ cho trước:

a) $M(1;2;-3),\ \vec{a}=(-1;3;5)$ b) $M(0;-2;5),\ \vec{a}=(0;1;4)$ c) $M(1;3;-1),\ \vec{a}=(1;2;-1)$

d) $M(3;-1;-3),\ \vec{a}=(1;-2;0)$ e) $M(3;-2;5),\ \vec{a}=(-2;0;4)$ f) $M(4;3;-2),\ \vec{a}=(-3;0;0)$

Bài 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm A, B cho trước:

a) $A(2;3;-1),\ B(1;2;4)$ b) $A(1;-1;0),\ B(0;1;2)$ c) $A(3;1;-5),\ B(2;1;-1)$

d) $A(2;1;0),\ B(0;1;2)$ e) $A(1;2;-7),\ B(1;2;4)$ f) $A(-2;1;3),\ B(4;2;-2)$

Bài 3. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng Δ cho trước:

a) $A(3;2;-4),\ \Delta \equiv Ox$ b) $A(2;-5;3)$, *Δ đi qua* $M(5;3;2), N(2;1;-2)$

c) $A(2;-5;3),\ \Delta: \begin{cases} x=2-3t \\ y=3+4t \\ z=5-2t \end{cases}$ d) $A(4;-2;2),\ \Delta: \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

e) $A(1;-3;2),\ \Delta: \begin{cases} x=3+4t \\ y=2-2t \\ z=3t-1 \end{cases}$ f) $A(5;2;-3),\ \Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{4}$

Bài 4. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước:

a) $A(-2;4;3),\ (P): 2x-3y+6z+19=0$ b) $A(1;-1;0)$, (P): *các mp toạ độ*

c) $A(3;2;1),\ (P): 2x-5y+4=0$ d) $A(2;-3;6),\ (P): 2x-3y+6z+19=0$

Bài 5. Viết phương trình tham số của đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) cho trước:

a) $\begin{cases} (P): 6x+2y+2z+3=0 \\ (Q): 3x-5y-2z-1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (P): 2x-3y+3z-4=0 \\ (Q): x+2y-z+3=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (P): 3x+3y-4z+7=0 \\ (Q): x+6y+2z-6=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases}(P): 2x+y-z+3=0\\(Q): x+y+z-1=0\end{cases}$ e) $\begin{cases}(P): x+z-1=0\\(Q): y-2=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}(P): 2x+y+z-1=0\\(Q): x+z-1=0\end{cases}$

Bài 6. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước:

a) $A(1;0;5),\ d_1: \begin{cases}x=1+2t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=1-3t\end{cases}$ b) $A(2;-1;1),\ d_1: \begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=1+3t\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}$

c) $A(1;-2;3),\ d_1: \begin{cases}x=1-t\\y=-2-2t\\z=3-3t\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}$ d) $A(4;1;4),\ d_1: \begin{cases}x=-7+3t\\y=4-2t\\z=4+3t\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=1+t\\y=-9+2t\\z=-12-t\end{cases}$

e) $A(2;-1;-3),\ d_1: \begin{cases}x=1+3t\\y=1+t\\z=-2+2t\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=2t\\y=-3+4t\\z=2-t\end{cases}$ f) $A(3;1;-4), d_1: \begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=-2t\end{cases}, d_2: \begin{cases}x=t\\y=1-2t\\z=0\end{cases}$

Bài 7. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng Δ cho trước:

a) $A(1;2;-2),\ \Delta: \begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ b) $A(-4;-2;4),\ d: \begin{cases}x=-3+2t\\y=1-t\\z=-1+4t\end{cases}$

c) $A(2;-1;-3),\ \Delta: \begin{cases}x=1+3t\\y=1+t\\z=-2+2t\end{cases}$ d) $A(3;1;-4), \Delta: \begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=-2t\end{cases}$

e) $A(1;-2;3),\ \Delta: \begin{cases}x=1-t\\y=-2-2t\\z=3-3t\end{cases}$ f) $A(2;-1;1),\ \Delta: \begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3\end{cases}$

Bài 8. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước:

a) $A(1;0;5),\ d_1: \begin{cases}x=1+2t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=1-3t\end{cases}$ b) $A(2;-1;1),\ d_1: \begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=1+3t\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}$

c) $A(-4;-5;3), d_1: \begin{cases}x=-1+3t\\y=-3-2t\\z=2-t\end{cases}, d_2: \begin{cases}x=2+2t\\y=-1+3t\\z=1-5t\end{cases}$ d) $A(2;1;-1),\ d_1: \begin{cases}x=1+3t\\y=-2+4t\\z=-3+5t\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=-t\\y=t\\z=2t\end{cases}$

e) $A(2;3;-1),\ d_1: \begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=1+3t\end{cases},\ d_2: \begin{cases}x=-4+3t\\y=1+t\\z=-2+3t\end{cases}$ f) $A(3;-2;5), d_1: \begin{cases}x=-3+3t\\y=1+4t\\z=2+2t\end{cases}, d_2: \begin{cases}x=3+2t\\y=1-t\\z=2-3t\end{cases}$

Bài 9. Viết phương trình tham số của đường thẳng nằm trong mặt phẳng *(P)* và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước:

a) $\begin{cases}(P): y+2z=0\\ d_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4},\ d_2: \begin{cases}x=2-t\\y=4+2t\\z=1\end{cases}\end{cases}$ b) $\begin{cases}(P): 6x+2y+2z+3=0\\ d_1: \begin{cases}x=1+2t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases}, d_2: \begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=1-3t\end{cases}\end{cases}$

c) $\begin{cases}(P): 2x-3y+3z-4=0\\ d_1: \begin{cases}x=-7+3t\\y=4-2t\\z=4+3t\end{cases}, d_2: \begin{cases}x=1+t\\y=-9+2t\\z=-12-t\end{cases}\end{cases}$ d) $\begin{cases}(P): 3x+3y-4z+7=0\\ d_1: \begin{cases}x=1-t\\y=-2-2t\\z=3-3t\end{cases}, d_2: \begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}\end{cases}$

Bài 10. Viết phương trình tham số của đường thẳng song song với đường thẳng Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước:

a) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2} \\ d_1: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1} \\ d_2: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{1} \\ d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-2}{3} \\ d_2: \dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z}{1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-2}{3} \\ d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-2}{3} \\ d_2: \dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z}{1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1} \\ d_1: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{1} \\ d_2: \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1} \end{cases}$

Bài 11. Viết phương trình tham số của đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cho trước:

a) $d_1: \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+4t \\ z = -2+4t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4-t \\ z = 1-2t \end{cases}$

b) $d_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+t \\ z = 2+3t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1+2t \\ z = -4+4t \end{cases}$

c) $d_1: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 3-t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+t \\ z = 1+2t \end{cases}$

d) $d_1: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -3-t \\ z = 1+2t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$

Bài 12. Viết phương trình tham số của đường thẳng d là hình chiếu của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (P) cho trước:

a) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{3} \\ (P): 2x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{3} \\ (P): 3x + 4y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2} \\ (P): 2x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1} \\ (P): x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{1} \\ (P): x + 2y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{-1} \\ (P): 2x - y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \Delta: \begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases} \\ (P): 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \Delta: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases} \\ (P): x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Bài 13. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 cho trước:

a) $A(0;1;1)$, $d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$, $d_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$

b) $A(1;1;1)$, $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$, $d_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1+2t \\ z = -1-t \end{cases}$

c) $A(-1;2;-3)$, $d_1: \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z}{-3}$, $d_2: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-5}$

Bài 14. Cho tứ diện ABCD có A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1); D(1; 1; 1). Viết phương trình tham số của các đường thẳng sau:

a) Chứa các cạnh của tứ diện tứ diện ABCD.

b) Đường thẳng qua C và vuông góc với mp(ABD).

c) Đường thẳng qua A và qua trọng tâm của tam giác BCD.

Bài 15. Cho tam giác ABC có A(1; 2; 5) và hai trung tuyến: $(d_1): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{1}$, $(d_2): \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1}$. Viết phương trình tham số của các đường thẳng sau:

a) Chứa các cạnh của tam giác ABC.

b) Đường phân giác trong của góc A.

Bài 16. Cho tam giác ABC có $A(3;-1;-1), B(1;2;-7), C(-5;14;-3)$. Viết phương trình tham số của các đường thẳng sau:

a) Trung tuyến AM.

b) Đường cao BH.

c) Đường phân giác trong BK.

d) Đường trung trực của BC trong ΔABC.

Bài 17. Cho bốn điểm $S(1;2;-1)$, $A(3;4;-1), B(1;4;1), C(3;2;1)$.

a) Chứng minh S.ABC là một hình chóp.

b) Viết phương trình tham số của các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp.

c) Viết phương trình đường vuông góc chung của SA và BC.

Bài 18. Cho bốn điểm $S(1;-2;3)$, $A(2;-2;3), B(1;-1;3), C(1;-2;5)$.

a) Chứng minh S.ABC là một tứ diện.

b) Viết phương trình các hình chiếu của SA, SB trên mặt phẳng (ABC).

VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Để xét VTTĐ giữa hai đường thẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

- *Phương pháp hình học: Dựa vào mối quan hệ giữa các VTCP và các điểm thuộc các đường thẳng.*
- *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.*

Bài 1. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước:

a) $d_1: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$; $\quad d_2: \{x = -1+t; y = -t; z = -2+3t$

b) $d_1: \{x = 5+2t; y = 1-t; z = 5-t$; $\quad d_2: \{x = 3+2t'; y = -3-t'; z = 1-t'$

c) $d_1: \{x = 2+2t;\ y = -1+t;\ z = 1$; $\quad d_2: \{x = 1;\ y = 1+t;\ z = 3-t$

d) $d_1: \dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z-3}{3}$; $\quad d_2: \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z-5}{2}$

e) $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{4}$; $\quad d_2: \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$

f) $d_1: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+1}{-8}$; $\quad d_2: \dfrac{x-7}{-6} = \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{z}{12}$

g) $d_1: \begin{cases} x-2y+2z-2=0 \\ 2x+y-2z+4=0 \end{cases}$; $\quad d_2: \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$

h) $d_1: \{x = 9t; y = 5t; z = t-3$; $\quad d_2: \begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

Bài 2. Chứng tỏ rằng các cặp đường thẳng sau đây chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của chúng:

a) $d_1: \{x = 1-2t; y = 3+t; z = -2-3t$; $d_2: \{x = 2t'; y = 1+t'; z = 3-2t'$

b) $d_1: \{x = 1+2t; y = 2-2t; z = -t$; $d_2: \{x = 2t'; y = 5-3t'; z = 4$

c) $d_1: \{x = 3-2t; y = 1+4t; z = 4t-2$; $d_2: \{x = 2+3t'; y = 4-t'; z = 1-2t'$

d) $d_1: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$; $d_2: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{4}$

e) $d_1: \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$; $d_2: \dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

f) $d_1: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$; $d_2: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$

g) $d_1: \begin{cases} x-2y+2z-2=0 \\ 2x+y-2z+4=0 \end{cases}$; $\quad d_2: \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$

Bài 3. Tìm giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2:

a) $d_1: \{x = 3t; y = 1-2t; z = 3+t$; $\quad d_2: \{x = 1+t'; y = 2t'; z = 4+t'$

b) $d_1: \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$; $\quad d_2: \{x = 1+t; y = -2+t; z = 3-t$

c) $d_1: \begin{cases} x-2y-z-4=0 \\ 2x+y+z+6=0 \end{cases}$; $\quad d_2: \begin{cases} x-z-2=0 \\ y+2z+7=0 \end{cases}$

d) $d_1: \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$; $\quad d_2: \begin{cases} 3x+y-z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$

Bài 4. Tìm *m* để hai đường thẳng d_1 *và* d_2 cắt nhau. Khi đó tìm toạ độ giao điểm của chúng:

a) $d_1:\{x=1+mt; y=t; z=-1+2t;$ $\qquad d_2:\{x=1-t'; y=2+2t'; z=3-t'$

b) $d_1:\{x=1-t; y=3+2t; z=m+t;$ $\qquad d_2:\{x=2+t'; y=1+t'; z=2-3t'$

c) $d_1:\begin{cases}2x+y-z-4=0\\x+y-3=0\end{cases};$ $\qquad d_2:\begin{cases}x+2y+mz-3=0\\2x+y+z-6=0\end{cases}$

VẤN ĐỀ 3: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

- *Phương pháp hình học: Dựa vào mối quan hệ giữa VTCP của đường thẳng và VTPT của mặt phẳng.*
- *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt phẳng.*

Bài 1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng *d và* mặt phẳng *(P)*. Tìm giao điểm (nếu có) của chúng:

a) $d:\{x=2t; y=1-t; z=3+t;$ $\qquad (P): x+y+z-10=0$

b) $d:\{x=3t-2; y=1-4t; z=4t-5;$ $\qquad (P): 4x-3y-6z-5=0$

c) $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1};$ $\qquad (P): 3x+5y-z-2=0$

d) $d:\dfrac{x+11}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3};$ $\qquad (P): 3x-3y+2z-5=0$

e) $d:\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3};$ $\qquad (P): x+2y-4z+1=0$

f) $d:\begin{cases}3x+5y+7z+16=0\\2x-y+z-6=0\end{cases};$ $\qquad (P): 5x-z-4=0$

g) $d:\begin{cases}2x+3y+6z-10=0\\x+y+z+5=0\end{cases};$ $\qquad (P): y+4z+17=0$

Bài 2. Cho đường thẳng *d và* mặt phẳng *(P)*. Tìm *m, n* để:

i) *d* cắt *(P)*. $\qquad$ ii) *d // (P)*. $\qquad$ iii) $d\perp(P)$. $\qquad$ iv) $d\subset(P)$.

a) $d:\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y+2}{2m-1}=\dfrac{z+3}{2};$ $\qquad (P): x+3y-2z-5=0$

b) $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{m}=\dfrac{z-1}{m-2};$ $\qquad (P): x+3y+2z-5=0$

c) $d:\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\4x-3y+4z+2=0\end{cases};$ $\qquad (P): 2x-y+(m+3)z-2=0$

d) $d:\{x=3+4t;\ y=1-4t;\ z=-3+t;$ $\qquad (P): (m-1)x+2y-4z+n-9=0$

e) $d:\{x=3+2t; y=5-3t; z=2-2t;$ $\qquad (P): (m+2)x+(n+3)y+3z-5=0$

Bài 3. Cho đường thẳng *d và* mặt phẳng *(P)*. Tìm *m, n* để:

a) $d:\{x=m+t; y=2-t; z=3t$ cắt $(P): 2x-y+z-5=0$ tại điểm có tung độ bằng 3.

b) $d:\begin{cases}x-2y-3=0\\y+2z+5=0\end{cases}$ cắt $(P): 2x+y+2z-2m=0$ tại điểm có cao độ bằng –1.

c) $d:\begin{cases}x+2y-3=0\\3x-2z-7=0\end{cases}$ cắt $(P): x+y+z+m=0$

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt cầu ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

- *Phương pháp hình học: Dựa vào khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng và bán kính.*
- *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt cầu.*

Bài 1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng *d và* mặt cầu *(S)*. Tìm giao điểm (nếu có) của chúng:

a) $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$

b) $d: \begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases}$; $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=16$

c) $d: \begin{cases} x-2y-z-1=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-14=0$

d) $d: \begin{cases} x-2y-z-1=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$; $(S): x^2+y^2+z^2+4x-2y-10z-8=0$

e) $d: \{x=-2-t; y=t; z=3-t$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0$

f) $d: \{x=1-2t; y=2+t; z=3+t$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$

g) $d: \{x=1-t; y=2-t; z=4$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$

Bài 2. Biện luận theo *m,* vị trí tương đối giữa đường thẳng *d và* mặt cầu *(S)*:

a) $d: \begin{cases} x-2y-z+m=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$; $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=8$

b) $d: \{x=1-t;\ y=m+t;\ z=\ 2+t$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$

c) $d: \begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x+z-1=0 \end{cases}$; $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+m=0$

Bài 3. Viết phương trình mặt cầu *(S)* có tâm *I* và tiếp xúc với đường thẳng *d*:

a) $I(1;-2;1)$; $d: \{x=1+4t; y=3-2t; z=4t-2$

b) $I(1;2;-1)$; $d: \{x=1-t; y=2; z=2t$

c) $I(4;2;-1)$; $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$

d) $I(1;2;-1)$; $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$

e) $I(1;2;-1)$; $d: \begin{cases} x-2y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

Bài 4. Cho mặt cầu *(S)* có tâm I(2; 1; 3) và bán kính R = 3. Viết phương trình tiếp tuyến *d* của *(S)*, biết:

a) *d* đi qua A(0; 0; 5) ∈ *(S)* và có VTCP $\vec{a} = (1;2;2)$.

b) *d* đi qua A(0; 0; 5) ∈ *(S)* và vuông góc với mặt phẳng: $(\alpha): 3x-2y+2z+3=0$.

Bài 5. Cho tứ diện ABCD. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện, với:

a) A(1; 1; 1), B(3; 3; 1), C(3; 1; 3), D(1; 3; 3).

b) A(1; 0; 2), B(2; –1; 1), C(0; 2; 1), D(–1; 3; 0).

c) A(3; 2; 1), B(1; –2; 1), C(–2; 2; –2), D(1; 1; –1).

d) A(1; 0; 11), B(0; 1; 10), C(1; 1; 8), D(–3; 1; 2).

VẤN ĐỀ 5: Khoảng cách

1. *Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d*

- *Cách 1: Cho đường thẳng d đi qua M_0 và có VTCP $\vec{a}$.*

$$\boxed{d(M,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}}$$

- *Cách 2: – Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng d.*
  – d(M,d) = MH.
- *Cách 3: – Gọi N(x; y; z) ∈ d. Tính MN^2 theo t (t tham số trong phương trình đường thẳng d).*
  – Tìm t để MN^2 nhỏ nhất.
  – Khi đó N ≡ H. Do đó d(M,d) = MH.

2. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.

d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\vec{a}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\vec{a}_2$

$$\boxed{d(d_1,d_2)=\frac{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right|}}$$

Chú ý: *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 với mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1.*

3. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song* *bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.*

4. *Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song*

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α).

Bài 1. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng *d*:

a) $A(2;3;1),\ d:\begin{cases}x=1-4t\\y=2+2t\\z=4t-1\end{cases}$ b) $A(1;2;-6),\ d:\begin{cases}x=2+2t\\y=1-t\\z=t-3\end{cases}$

c) $A(1;0;0),\ d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$ d) $A(2;3;1),\ d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$

e) $A(1;-1;1),\ d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ f) $A(2;3;-1),\ d:\begin{cases}x+y-2z-1=0\\x+3y+2z+2=0\end{cases}$

Bài 2. Chứng minh hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau. Tính khoảng cách giữa chúng:

a) $d_1:\{x=1-2t;y=3+t;z=-2-3t;$ $d_2:\{x=2t';y=1+t';z=3-2t'$

b) $d_1:\{x=1+2t;y=2-2t;z=-t;$ $d_2:\{x=2t';y=5-3t';z=4$

c) $d_1:\{x=3-2t;y=1+4t;z=4t-2;$ $d_2:\{x=2+3t';y=4-t';z=1-2t'$

d) $d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2};$ $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{4}$

e) $d_1:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1};$ $d_2:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

f) $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2};$ $d_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$

g) $d_1:\begin{cases}x-2y+2z-2=0\\2x+y-2z+4=0\end{cases};$ $d_2:\begin{cases}2x+y-z+2=0\\x-y+2z-1=0\end{cases}$

Bài 3. Chứng minh hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau. Tính khoảng cách giữa chúng:

a) $d_1: \{x = 3 + 2t,\ y = 4 + 3t,\ z = 2 + t;$ $\quad d_2: \{x = 4 + 4t,\ y = 5 + 6t,\ z = 3 + 2t$

b) $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z-3}{8};$ $\quad d_2: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-3}{9} = \dfrac{z+1}{-12}$

c) $d_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{3};$ $\quad d_1: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-1}{6}$

d) $d_1: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases};$ $\quad d_2: \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$

Bài 4. Chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P). Tính khoảng cách giữa chúng:

a) $d: \{x = 3t - 2; y = 1 - 4t; z = 4t - 5;$ $\quad (P): 4x - 3y - 6z - 5 = 0$

b) $d: \{x = 1 - 2t; y = t; z = 2 + 2t;$ $\quad (P): x + z + 8 = 0$

c) $d: \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases};$ $\quad (P): 2x - 2y + 4z + 5 = 0$

d) $d: \begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases};$ $\quad (P): 2x - y - 2z - 2 = 0$

VẤN ĐỀ 6: Góc

1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các VTCP $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

*Góc giữa d_1, d_2 **bằng** hoặc **bù** với góc giữa $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.*

$$\cos(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|}$$

2. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d′ của nó trên (α).

$$\sin\left(\widehat{d, (\alpha)}\right) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Bài 1. Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) $d_1: \{x = 1 + 2t,\ y = -1 + t,\ z = 3 + 4t;$ $\quad d_2: \{\ x = 2 - t,\ y = -1 + 3t,\ z = 4 + 2t$

b) $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-4}{2};$ $\quad d_2: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{6} = \dfrac{z+4}{-2}$

c) $d_1: \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases};$ $\quad d_2: \{x = 9t;\ y = 5t;\ z = -3 + t$

d) $d_1: \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ x - 7y + 3z - 17 = 0 \end{cases};$ $\quad d_2: \{x = 2 + 3t;\ y = -1;\ z = 4 - t$

e) $d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+2}{4};$ $\quad d_2: \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x + 3z - 2 = 0 \end{cases}$

f) $d_1: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ và d_2 là các trục toạ độ.

g) $d_1:\begin{cases}x-y+z-4=0\\2x-y+z+1=0\end{cases}$; $\quad d_2:\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\x+y+z=0\end{cases}$

h) $d_1:\begin{cases}2x-y+3z-4=0\\3x+2y-z+7=0\end{cases}$; $\quad d_2:\begin{cases}x+y-2z+3=0\\4x-y+3z+7=0\end{cases}$

Bài 2. Chứng minh hai đường thẳng sau vuông góc với nhau:

a) $d_1:\begin{cases}7x-2z-15=0\\7y+5z+34=0\end{cases}$; $\quad d_2:\begin{cases}x-y-z-7=0\\3x-4y-11=0\end{cases}$

b)

Bài 3. Tìm *m* để góc giữa hai đường thẳng sau bằng α:

a) $d_1:\{x=-1+t; y=-t\sqrt{2}; z=2+t;$ $\quad d_2:\{x=2+t; y=1+t\sqrt{2}; z=2+mt;\ \alpha=60^0$.

b)

Bài 4. Tính góc giữa đường thẳng *d* và mặt phẳng *(P)*::

a) $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{3}$; $\quad (P): 2x-y-2z-10=0$.

b) $d:\{x=1; y=2+t\sqrt[4]{5}; z=3+t;$ $\quad (P): x\sqrt[4]{5}+z+4=0$

c) $d:\begin{cases}x+4y-2z+7=0\\3x+7y-2z=0\end{cases}$; $\quad (P): 3x+y-z+1=0$

d) $d:\begin{cases}x+2y-z+3=0\\2x-y+3z+5=0\end{cases}$; $\quad (P): 3x-4y+2z-5=0$

Bài 5. Cho tứ diện ABCD có A(3; 2; 6), B(3; –1; 0), C(0; –7; 3), D(–2; 1; –1).

a) Chứng minh các cặp cạnh đối của tứ diện đôi một vuông góc với nhau.

b) Tính góc giữa AD và mặt phẳng (ABC).

c) Tính góc giữa AB và trung tuyến AM của tam giác ACD.

d) Chứng minh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Tính thể tích của tứ diện ABCD.

Bài 6. Cho tứ diện SABC có S(1; 2; 1), A(3; 2; 1), B(1; 3; 1), C(1; –2; 5).

a) Viết phương trình của các mặt phẳng (ABC), (SAB), (SAC).

b) Tính góc tạo bởi SC và (ABC) và góc tạo bởi SC và AB.

c) Tính các khoảng cách từ C đến (SAB) và từ B đến (SAC).

d) Tính khoảng cách từ C đến AB và khoảng cách giữa SA và BC.

Bài 7. Cho tứ diện SABC có S(1; –2; 3), A(2; –2; 3), B(1; –1; 3), C(1; –2; 5).

a) Tìm phương trình các hình chiếu của SA, SB trên mặt phẳng (ABC).

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính góc tạo bởi SM và NP và góc tạo bởi SM và (ABC).

c) Tính các khoảng cách giữa SM và NP, SP và MN.

VẤN ĐỀ 7: Một số vấn đề khác

1. Viết phương trình mặt phẳng

• ***Dạng 1:*** *Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và đường thẳng d:*

– *Trên đường thẳng d lấy hai điểm B, C.*

– *Một VTPT của (P) là:* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

• ***Dạng 2:*** *Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng song song d_1, d_2:*

– *Xác định VTCP* $\vec{a}$ *của d_1 (hoặc d_2).*

– *Trên d_1 lấy điểm A, trên d_2 lấy điểm B. Suy ra A, B* $\in$ *(P).*

– *Một VTPT của (P) là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]$.

• ***Dạng 3:*** *Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2:*

– *Lấy điểm* $A \in d_1$ *(hoặc* $A \in d_2$*)* $\Rightarrow A \in (P)$.

– *Xác định VTCP* $\vec{a}$ *của d_1,* $\vec{b}$ *của d_2.*

– *Một VTPT của (P) là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

• ***Dạng 4:*** *Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 (d_1, d_2 chéo nhau):*

– *Xác định các VTCP* $\vec{a},\vec{b}$ *của các đường thẳng d_1, d_2.*

– *Một VTPT của (P) là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– *Lấy một điểm M thuộc* $d_1 \Rightarrow M \in (P)$.

• ***Dạng 5:*** *Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2:*

– *Xác định các VTCP* $\vec{a},\vec{b}$ *của các đường thẳng d_1, d_2.*

– *Một VTPT của (P) là:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

2. Xác định hình chiếu H của một điểm M lên đường thẳng d

• *Cách 1:* – *Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d.*

– *Khi đó:* $H = d \cap (P)$

• *Cách 2: Điểm H được xác định bởi:* $\begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_d \end{cases}$

3. Điểm đối xứng M′ của một điểm M qua đường thẳng d

• *Cách 1:* – *Tìm điểm H là hình chiếu của M trên d.*

– *Xác định điểm M′ sao cho H là trung điểm của đoạn MM′.*

• *Cách 2:* – *Gọi H là trung điểm của đoạn MM′. Tính toạ độ điểm H theo toạ độ của M, M′.*

– *Khi đó toạ độ của điểm M′ được xác định bởi:* $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \vec{a}_d \\ H \in d \end{cases}$.

4. Xác định hình chiếu H của một điểm M lên mặt phẳng (P)

• *Cách 1:* – *Viết phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (P).*

– *Khi đó:* $H = d \cap (P)$

• *Cách 2: Điểm H được xác định bởi:* $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH},\ \vec{n}_P \text{ cùng phương} \end{cases}$

5. Điểm đối xứng M′ của một điểm M qua mặt phẳng (P)

• *Cách 1:* – *Tìm điểm H là hình chiếu của M trên (P).*

– *Xác định điểm M′ sao cho H là trung điểm của đoạn MM′.*

• *Cách 2:* – *Gọi H là trung điểm của đoạn MM′. Tính toạ độ điểm H theo toạ độ của M, M′.*

– *Khi đó toạ độ của điểm M′ được xác định bởi:* $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH},\ \vec{n}_P \text{ cùng phương} \end{cases}$.

Bài 1. Viết phương trình của mặt phẳng *(P)* đi qua điểm A và đường thẳng *d*:

a) $A(2;-3;1)$, $d:\begin{cases} x=4+2t \\ y=2-3t \\ z=3+t \end{cases}$ b) $A(1;4;-3)$, $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=1-3t \end{cases}$

c) $A(4;-2;3)$, $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-5}{2}$ d) $A(2;-1;5)$, $d:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{3}$

e) $A(-2;1;4)$, $d:\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x+2y+2z+5=0 \end{cases}$ f) $A(3;-2;4)$, $d:\begin{cases} x+3y-2z+1=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$

Bài 2. Viết phương trình của mặt phẳng *(P)* đi qua hai đường thẳng song song d_1, d_2:

a) $d_1:\{x=2+3t; y=4+2t; z=t-1;$ $d_2:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$

b) $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{4}$, $d_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-4}{4}$

c) $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z-3}{8}$; $d_2:\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{-12}$

d) $d_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$; $d_2:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{6}$

Bài 3. Viết phương trình của mặt phẳng *(P)* đi qua hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2:

a) $d_1:\{x=3t; y=1-2t; z=3+t;$ $d_2:\{x=1+t'; y=2t'; z=4+t'$

b) $d_1:\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$; $d_2:\{x=1+t; y=-2+t; z=3-t$

c) $d_1:\begin{cases} x-2y-z-4=0 \\ 2x+y+z+6=0 \end{cases}$; $d_2:\begin{cases} x-z-2=0 \\ y+2z+7=0 \end{cases}$

d) $d_1:\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$; $d_2:\begin{cases} 3x+y-z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$

Bài 4. Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2:

a) $d_1:\{x=1-2t; y=3+t; z=-2-3t$; $d_2:\{x=2t'; y=1+t'; z=3-2t'$

b) $d_1:\{x=1+2t; y=2-2t; z=-t$; $d_2:\{x=2t'; y=5-3t'; z=4$

c) $d_1:\{x=3-2t; y=1+4t; z=4t-2$; $d_2:\{x=2+3t'; y=4-t'; z=1-2t'$

d) $d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$; $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{4}$

e) $d_1:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$; $d_2:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

f) $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$; $d_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$

g) $d_1:\begin{cases} x-2y+2z-2=0 \\ 2x+y-2z+4=0 \end{cases}$; $d_2:\begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$

Bài 5. Tìm toạ độ hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng *d* và điểm M′ đối xứng với M qua đường thẳng *d*:

a) $M(1;2;-6)$, $d:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=t-3 \end{cases}$ b) $M(2;3;1)$, $d:\begin{cases} x=1-4t \\ y=2+2t \\ z=4t-1 \end{cases}$

c) $M(2;1;-3)$, $d:\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases}$ d) $M(1;2;-1)$, $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=3t \end{cases}$

e) $M(1;2;-1)$, $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ f) $M(2;5;2)$, $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$

g) $M(2;1;-3)$, $d:\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{cases}$ h) $M(2;1;-3)$, $d:\begin{cases} y+z-4=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$

Bài 6. Tìm toạ độ hình chiếu H của điểm M trên mặt phẳng *(P)* và điểm M′ đối xứng với M qua mặt phẳng *(P)*:

a) $(P): 2x-y+2z-6=0$, $M(2;-3;5)$ b) $(P): x+y+5z-14=0$, $M(1;-4;-2)$

c) $(P): 6x-2y+3z+12=0$, $M(3;1;-2)$ d) $(P): 2x-4y+4z+3=0$, $M(2;-3;4)$

e) $(P): x-y+z-4=0$, $M(2;1;-1)$ f) $(P): 3x-y+z-2=0$, $M(1;2;4)$

BÀI TẬP ÔN PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Bài 1. Tìm trên trục Ox điểm M cách đều đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-2z=0$.

Bài 2. Cho 2 điểm A(1; 0; 0) và B(0; 2; 0). Viết phương trình của mp(α) qua AB và tạo với mp(Oxy) một góc 60^0.

Bài 3. Viết phương trình của đường thẳng (d) qua A(3; –1; 1) nằm trong mp(α): x – y + z – 5 = 0 và hợp với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$ một góc 45^0.

Bài 4. Gọi (α) là mặt phẳng qua A(2; 0; 1) và B(–2; 0; 5) và hợp với mp(*Oxz*) một góc 45^0. Tính khoảng cách từ O đến mp(α).

Bài 5. Chứng minh rằng 2 đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ và $\Delta_2:\begin{cases} x=7+3t \\ y=2+2t \\ z=-1-3t \end{cases}$ cùng nằm trong một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng ấy.

Bài 6. Cho hai điểm A(1; 2; –1), B(7; –2; 3) và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$

a) Chứng minh rằng đường thẳng *d* và đường thẳng AB cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Tìm điểm I thuộc *d* sao cho IA + IB nhỏ nhất.

Bài 7. Trong không gian *Oxyz* cho 4 điểm A(1; 2; 3), B(–2; 1; 0), C(–1; 0; 2), D(0; 2; 3).

1) Chứng minh ABCD là một tứ diện. Tính thể tích tứ diện đó.

2) Tìm điểm M sao cho : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

3) Xác định toạ độ trọng tâm tứ diện ABCD.

4) Viết phương trình mặt phẳng trung trực của các đoạn thẳng AB, AC, BC.

5) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với trục *Oz*.

6) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và B và vuông góc với mặt phẳng $2x+3y-z=0$.

7) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với hai mặt phẳng 2x + 3y – z = 0, x + 2y – 3z = 0.

8) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và chắn các nửa trục dương Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm I , J, K sao cho thể tích tứ diện OIJK nhỏ nhất.
9) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và chắn các nửa trục dương Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm I , J, K sao cho OI + OJ + OK nhỏ nhất.
10) Viết phương trình mặt phẳng đi qua C, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng x + 2y – 3z = 0.
11) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và qua giao tuyến của hai mặt phẳng :
(P): x + y + z – 4 =0, (Q):3x – y + z – 1 = 0.
12) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng : $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{-2}$.
13) Tìm điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d: $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ và tính khoảng cách từ A đến đường thẳng d: $\begin{cases} x+y-3z+3 = 0 \\ 2x-y-3z+1=0 \end{cases}$
14) Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm A và mặt phẳng (P): x + 3y + 2 = 0.
15) Viết phương trình đường thẳng qua A, song song với mặt phẳng (P): x – y – z – 4 = 0 và vuông góc với đường thẳng Δ: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3}$.
16) Viết phương trình đường thẳng qua A vuông góc và cắt đường thẳng: $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=z+3$.
17) Tìm điểm P thuộc mặt phẳng (P): 2x – 3y – z +2 = 0 sao cho PA+PB nhỏ nhất.
18) Chứng minh rằng đường thẳng AB và đường thẳng d : $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3}$ cùng thuộc một mặt phẳng. Tìm điểm N thuộc d sao cho NA + NB nhỏ nhất.
19) Viết phương trình đường thẳng qua A, vuông góc với đường thẳng: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ và cắt đường thẳng: $\begin{cases} x+y-z+2 = 0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$.
20) Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng AB lên mặt phẳng (P): x + 3y – z = 0.
21) Tính góc tạo bởi đường thẳng AB với mặt phẳng (BCD).
22) G là trọng tâm ΔABC, G' là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P): 2x – 3y + z +3 = 0. Chứng minh rằng: $G'A^2+G'B^2+G'C^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi G' là hình chiếu của G lên (P). Tìm toạ độ điểm G'.
23) Lập phương trình mặt cầu đi qua A, B, C và có tâm thuộc mp(Oxy)
24) Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu *(S)*: $x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$ tại B.
25) Lập phương trình mặt phẳng qua A và tiếp xúc với mặt cầu *(S)* có phương trình:
$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0.$$
26) Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

V. GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ

Để giải các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: ***Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp***.

Bước 2: Dựa vào giả thiết bài toán xác định tọa độ các điểm có liên quan.

Bước 3: Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán.

Chú ý: *Thông thường ta dựa vào các yếu tố đường thẳng vuông góc với mặt phẳng để chọn hệ trục Oxyz sao cho dễ xác định toạ độ các điểm liên quan.*

MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1:

Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. H là hình chiếu của O trên (ABC).

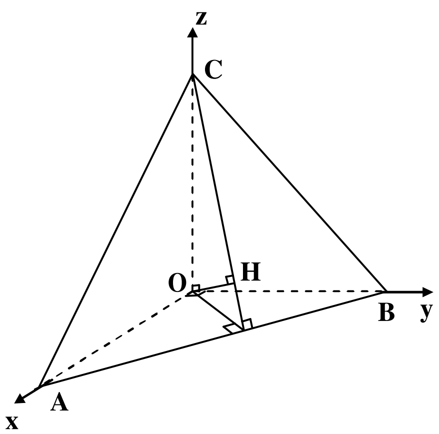
1. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn.
2. Chứng minh H là trực tâm ΔABC.
3. Chứng minh $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.
4. Gọi $\alpha = \left(\widehat{(OAB),(ABC)}\right)$, $\beta = \left(\widehat{(OBC),(BCA)}\right)$, $\gamma = \left(\widehat{(OAC),(ACB)}\right)$.

   Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Giải:

Chọn hệ trục Oxyz sao cho: O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) (a, b, c > 0)

1. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn:



Ta có: $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = (-a; b; 0)(-a; 0; c) = a^2 > 0$

$\Rightarrow \widehat{BAC}$ nhọn

Tương tự: $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ nhọn.

Vậy ΔABC có ba góc nhọn.

2. Chứng minh H là trực tâm ΔABC:

Ta có phương trình mp (ABC):

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \iff bcx + acy + abz - abc = 0$

$OH \perp (ABC) \Rightarrow \vec{u}_{OH} = \vec{n}_{(ABC)} = (bc; ac; ab)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng OH: $\begin{cases} x = bct \\ y = act \\ z = abt \end{cases} \quad (t \in R)$

Thay x, y, z vào phương trình mp(ABC): $(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)t = abc$

$\Rightarrow t = \dfrac{abc}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

$\Rightarrow H\left(\dfrac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};\ \dfrac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};\ \dfrac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = \dfrac{a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}(-ab^2 - ac^2; bc^2;\ b^2c) \\ \overrightarrow{BH} = \dfrac{b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}(ac^2;\ -a^2b - bc^2;\ a^2c) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}\ .\ \overrightarrow{BC} = \dfrac{a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}(-ab^2 - ac^2; bc^2;\ b^2c)(0;\ -b;\ c) = 0 \\ \overrightarrow{BH}\ .\ \overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}(ac^2;\ -a^2b - bc^2;\ a^2c)(-a;\ 0;\ c) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow$ H là trực tâm ΔABC.

3. Chứng minh $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

$OH = d(O, (ABC)) = \dfrac{|-abc|}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \quad \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$

$\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

4. Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Nhận xét: $|\cos\alpha| = \left|\cos\left(\widehat{(OAB), (ABC)}\right)\right| = \left|\cos\left(\vec{n}_{(OAB)}, \vec{n}_{(ABC)}\right)\right|$

Gọi $\vec{n} = \vec{n}_{(ABC)} = (bc;\ ac;\ ab)$

$\vec{n}_1 = \vec{n}_{(OAB)} = \vec{k} = (0, 0, 1);\quad \vec{n}_2 = \vec{n}_{(OBC)} = \vec{i} = (1, 0, 0);\quad \vec{n}_3 = \vec{n}_{(OAC)} = \vec{j} = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2(\vec{n}_1, \vec{n}) + \cos^2(\vec{n}_2, \vec{n}) + \cos^2(\vec{n}_3, \vec{n})$

$= \dfrac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} + \dfrac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} + \dfrac{a^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

Vậy: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Ví dụ 2:

Cho tam giác đều ABC có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm AH. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O, lấy điểm S sao cho OS = 2a.

1. Tính cosin của góc φ tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).
2. Trên đoạn OH lấy điểm I. Đặt OI = m (0 < m < a). Mặt phẳng (α) qua I, vuông góc với AH cắt các cạnh AB, AC, SC, SB lần lượt tại M, N, P, Q.

   a. Tính diện tích thiết diện MNPQ theo a và x.

   b. Tìm m để diện tích MNPQ lớn nhất.

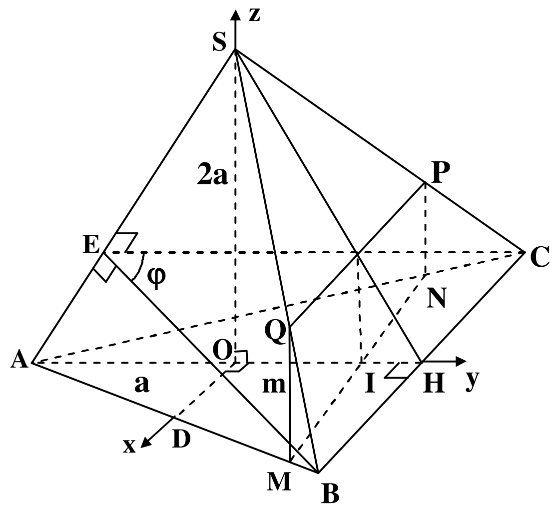
Giải:

Gọi D là trung điểm AB

$\Rightarrow OD \perp OH$

$$AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{4a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow OD = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

$$O(0;\ 0;\ 0),\ D\left(\frac{a}{\sqrt{3}};\ 0;\ 0\right),\ H(0;\ a\ 0),\ S(0;\ 0;\ 2a)$$

$$\Rightarrow A(0;\ -a;\ 0),\ B\left(\frac{2a}{\sqrt{3}};\ a;\ 0\right),\ C\left(-\frac{2a}{\sqrt{3}};\ a;\ 0\right)$$

1. Tính cosφ:

Vẽ $BE \perp SA$ tại E $\Rightarrow CE \perp SA$ (vì $SA \perp (BCE)) \Rightarrow \varphi = \widehat{BEC}$

$$\overrightarrow{SA} = (0;\ a;\ 2a) = a(0;\ 1;\ 2)$$

Phương trình đường thẳng SA: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -a + t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in R)$

Phương trình mp(BCE): $(y - a) + 2z = 0$

Thay x, y, z vào phương trình (BCE), ta được: $-2a + t + 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{2a}{5}$

$$\Rightarrow E\left(0;\ -\frac{3a}{5};\ \frac{4a}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB} = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}};\ \frac{8a}{5};\ \frac{-4a}{5}\right) = \frac{2a}{5\sqrt{3}}(5;\ 4\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{EC} = \left(-\frac{2a}{\sqrt{3}};\ \frac{8a}{5};\ -\frac{4a}{5}\right) = -\frac{2a}{5\sqrt{3}}(5;\ -4\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \cos(\overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{EC}) = \frac{-\frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{\sqrt{3}}(5;\ 4\sqrt{3};\ -2\sqrt{3})(5;\ -4\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})}{\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{85}\sqrt{85}} = \frac{35}{85} = \frac{7}{17}$$

Vậy $\cos\varphi = \frac{7}{17}$.

2. Ta có: I(0; m; 0), $\overrightarrow{OH} = a(0; 1; 0)$

$\Rightarrow$ phương trình mp(MNPQ): y – m = 0

a. Tính S_{MNPQ}:

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}};\ 2a;\ 0\right) = \frac{2a}{\sqrt{3}}(1;\ \sqrt{3};\ 0);\qquad \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{2a}{\sqrt{3}};\ 2a;\ 0\right) = -\frac{2a}{\sqrt{3}}(1;\ -\sqrt{3};\ 0)$$

$$\overrightarrow{SB} = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}};\ a;\ -2a\right) = \frac{a}{\sqrt{3}}(2;\ \sqrt{3};\ -2\sqrt{3});\quad \overrightarrow{SC} = \left(-\frac{2a}{\sqrt{3}};\ a;\ -2a\right) = -\frac{a}{\sqrt{3}}(2;\ -\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$$

Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = t \\ y = -a + \sqrt{3}t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in R)$

$$M = AB \cap (MNPQ) \Rightarrow M\left(\frac{a+m}{\sqrt{3}};\ m;\ 0\right)$$

Phương trình đường thẳng AC: $\begin{cases} x = t \\ y = -a - \sqrt{3}t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in R)$

$$N = AC \cap (MNPQ) \Rightarrow N\left(\frac{-a-m}{\sqrt{3}};\ m;\ 0\right)$$

Phương trình đường thẳng SB: $\begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = 2a - 2\sqrt{3}t \end{cases} \quad (t \in R)$

$$Q = SB \cap (MNPQ) \Rightarrow Q\left(\frac{2m}{\sqrt{3}};\ m;\ 2a - 2m\right)$$

Phương trình đường thẳng SC: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -\sqrt{3}t \\ z = 2a + 2\sqrt{3}t \end{cases} \quad (t \in R)$

$$P = SC \cap (MNPQ) \Rightarrow P\left(-\frac{2m}{\sqrt{3}};\ m;\ 2a - 2m\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{m-a}{\sqrt{3}};\ 0;\ 2a-2m\right);\quad \overrightarrow{MP} = \left(\frac{-a-3m}{\sqrt{3}};\ 0;\ 2a-2m\right);\quad \overrightarrow{MN} = \left(\frac{-2a-2m}{\sqrt{3}};\ 0;\ 0\right)$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(\left|[\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MP}]\right| + \left|[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}]\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|\left(0;\ \frac{8m(m-a)}{\sqrt{3}};\ 0\right)\right| + \left|\left(0;\ \frac{4m^2-4a^2}{\sqrt{3}};\ 0\right)\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8m(a-m)}{\sqrt{3}} + \frac{4a^2-4m^2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{3}}m^2 + \frac{4a}{\sqrt{3}}m + \frac{2a^2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{2}{\sqrt{3}}(-3m^2 + 2am + a^2)$$

b/ Tìm m để $(S_{MNPQ})_{max}$:

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$	$\frac{a}{3}$	$+\infty$
$-3m^2+2am+a^2$	$-\infty$ ↗	$\frac{4a^2}{3}$	↘ $-\infty$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \le \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{4a^2}{3} = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}}$$

Vậy $(S_{MNPQ})_{\max} = \dfrac{8a^2}{3\sqrt{3}}$ khi $m = \dfrac{a}{3}$.

<u>*Cách khác*</u>: $$S_{MNPQ} = 2\sqrt{3}(a-m)\left(m+\frac{a}{3}\right) \underset{(côsi)}{\le} 2\sqrt{3}\left[\frac{(a-m)+\left(m+\frac{a}{3}\right)}{2}\right]^2 = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow (S_{MNPQ})_{\max} = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow a-m = m+\frac{a}{3} \Leftrightarrow m = \frac{a}{3}.$$

<u>Ví dụ 3:</u>

Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. OA= a, OB = b, OC = c.

1. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp (S) của OABC. Tính bán kính r của (S).
2. Gọi M, N, P là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (OMN) và (OMP) vuông góc $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

<u>Giải</u>:

Chọn hệ trục Oxyz sao cho: O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)

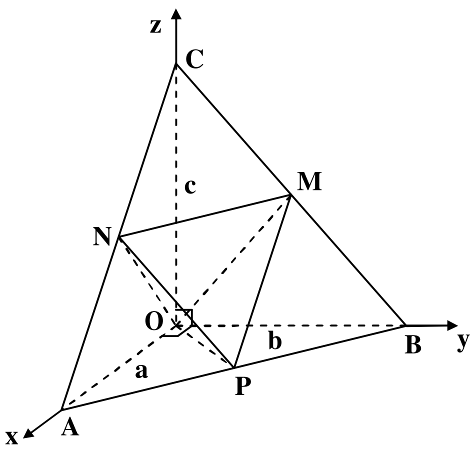
1. Tính r:

Ta có: $V_{I.AOB} + V_{I.OBC} + V_{I.OCA} + V_{I.ABC} = V_{OABC}$

$$\Rightarrow \frac{r}{3}(S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} + S_{\Delta ABC}) = \frac{abc}{6}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\left|[(-a;\ b;\ 0),\ (-a;\ 0;\ c)]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{r}{6}\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right) = \frac{abc}{6}$$



Vậy $r = \dfrac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

2. Chứng minh (OMN) ⊥ (OMP) ⇔ $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Ta có: $M\left(0;\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right), N\left(\frac{a}{2};0;\frac{c}{2}\right), P\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right)$

$$\vec{n}_{(OMN)}=[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}]=\left(\frac{bc}{4};\frac{ac}{4};-\frac{ab}{4}\right)$$

$$\vec{n}_{(OMP)}=[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}]=\left(-\frac{bc}{4};\frac{ac}{4};-\frac{ab}{4}\right)$$

$$\Rightarrow (OMN)\perp(OMP)\Leftrightarrow \vec{n}_{(OMN)}.\vec{n}_{(OMP)}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b^2c^2}{16}+\frac{a^2c^2}{16}+\frac{a^2b^2}{16}=0 \Leftrightarrow a^2(c^2+b^2)=b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Ví dụ 4:

Cho hình chữ nhật ABCD có AB= a, AD = 2a. Trên tia $Az\perp(ABCD)$ lấy điểm S. Mặt phẳng (α) qua CD cắt SA, SB lần lượt tại K và L.

1. Cho SA = 2a, AK = k $(0\le k\le 2a)$
   a. Tính diện tích tứ giác CDKL. Tính k theo a để S_{CDKL} lớn nhất, nhỏ nhất.
   b. Chứng tỏ khoảng cách giữa hai đường thẳng KD và BC không đổi.
   c. Tính k theo a để (α) chia hình chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.
2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SC, SD. Tìm quỹ tích giao điểm I của AN, BM khi S di động trên tia Az.

Giải:

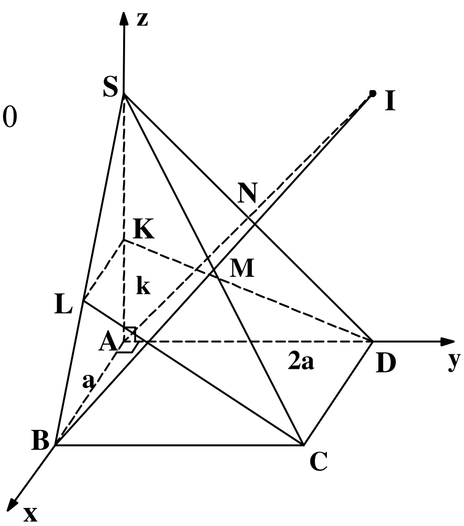
1. Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; 2a; 0), D(0; 2a; 0), S(0; 0; 2a)

$AK=k\Rightarrow K(0;0;k),\ 0\le k\le 2a$

$\vec{n}_\alpha=[\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KD}]=a(0;k;2a)$

Phương trình $(\alpha): k(y-2a)+2az=0\Leftrightarrow ky+2az-2ak=0$

$\overrightarrow{SB}=a(1;0;-2)$



Phương trình đường thẳng SB: $\begin{cases}x=a+t\\ y=0\\ z=-2t\end{cases}\quad (t\in R)$

$$(\alpha)\cap SB=L\Rightarrow L\left(a-\frac{k}{2};0;k\right)$$

a/ $S_{CDKL}=S_{\Delta CKL}+S_{\Delta CKD}$:

$$=\frac{1}{2}\left(\left|[\overrightarrow{CK},\overrightarrow{CL}]\right|+\left|[\overrightarrow{CK},\overrightarrow{CD}]\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|[(-a;-2a;k,-\frac{k}{2};-2a;k]\right|+\left|[(-a;-2a;k,(-a;0;0)]\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2a-k}{2}\sqrt{4a^2+k^2}+a\sqrt{4a^2+k^2}\right)=\frac{4a-k}{4}\sqrt{4a^2+k^2}$$

Xét $f(k)=\dfrac{4a-k}{4}\sqrt{4a^2+k^2}\ \Rightarrow\ f'(k)=\dfrac{-2k^2+4ak-4a^2}{4\sqrt{k^2+4a^2}}<0$

Bảng biến thiên:

k	$-\infty$	0		2a	$+\infty$
$f'(k)$			$-$		
$f(k)$		$2a^2$	$\searrow$	$a^2\sqrt{2}$	

Vậy: $S_{\max}=2a^2 \Leftrightarrow k=0$

$S_{\min}=a^2\sqrt{2} \Leftrightarrow k=2a.$

b/ d(KD, BC) $=\dfrac{\left|[\overrightarrow{KD},\overrightarrow{BC}]\,\overrightarrow{DC}\right|}{\left|[\overrightarrow{KD},\overrightarrow{BC}]\right|}=\dfrac{\left|[0;\ 2a;\ -k),\ (0;\ 2a;\ 0)](a;\ 0;\ 0)\right|}{\left|[0;\ 2a;\ -k),\ (0;\ 2a;\ 0]\right|}$ = a (không đổi)

* *Chú ý*: CD là đoạn vuông góc chung của KD và BC.

c/ *Tính k để* $V_{S.CDKL}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$

Ta có: $d(S,(\alpha))=\dfrac{\left|4a^2-2ak\right|}{\sqrt{k^2+4a^2}}$

$\Rightarrow V_{S.CDKL}=\dfrac{1}{3}d(S,(\alpha)).S_{CDKL}=\dfrac{a(2a-k)4a-k}{6}$

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{4a^3}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{a(2a-k)(4a-k)}{6}=\dfrac{4a^3}{6}$

$\Leftrightarrow k=(3-\sqrt{5})a \qquad (do\ k\le 2a)$

2. Quỹ tích I:

$S\in Az \Rightarrow S(0;\ 0;\ s),\ s>0 \Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};\ a;\ \dfrac{s}{2}\right),\ N\left(0;\ a;\ \dfrac{s}{2}\right)$

$\overrightarrow{BM}=-\dfrac{1}{2}(a;\ -2a;\ -s);\qquad \overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}(0;2a;\ s)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng BM: $\begin{cases}x=a+at_1\\ y=-2at_1\\ z=-st_1\end{cases}\quad (t_1\in R)$

Phương trình đường thẳng AN: $\begin{cases}x=0\\ y=2at_2\\ z=st_2\end{cases}\quad (t_2\in R)$

$I=(AN)\cap(BM)\ \Rightarrow\ I(0;\ 2a;\ s)$

Ta có: $\overrightarrow{ID}=(0;\ 0;\ -s)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{ID}//\overrightarrow{AS}.$

Vậy quỹ tích I là nửa đường thẳng $Dt\perp(ABCD)$ (trừ điểm D, do s > 0).

Ví dụ 5:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy $a\sqrt{2}$; $\widehat{ASB}=\alpha$.

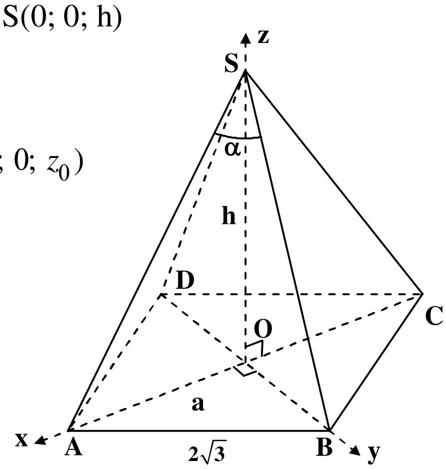
1. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
2. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.
3. Tìm α để tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau.

Giải:

Ta có: AC = BD = 2a. Gọi SO là đường cao và SO= h.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: O(0; 0; 0), A(a; 0; 0),S(0; 0; h)

$\Rightarrow C(-a;\ 0;0),\ D(0;\ -a;\ 0)$



1. Tâm I và R của (S) ngoại tiếp chóp S.ABCD

Do S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên $I\in OS \Rightarrow I(0;\ 0;\ z_0)$

Phương trình mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2z_0z+d=0$

$$A,\ S\in(S)\quad\Rightarrow\begin{cases}a^2+d=0\\ h^2-2z_0h+d=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}d=-a^2\\ z_0=\dfrac{h^2-a^2}{2h}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(0;\ 0;\ \frac{h^2-a^2}{2h}\right),\ R=\sqrt{\left(\frac{h^2-a^2}{2h}\right)+a}=\frac{h^2+a^2}{2h}$$

Mặt khác: $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}}{SA.SB}=\dfrac{(a;\ 0;\ -h)(0;\ a;\ -h)}{a^2+h^2}=\dfrac{h^2}{a^2+h^2}$

$\Rightarrow h=\sqrt{\dfrac{a^2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ (α nhọn do ΔSAB cân tại S).

Vậy: $R=\dfrac{a}{2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}$

$$OI=\frac{a(2\cos\alpha-1)}{2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}$$

2. Tâm J và r của (S′) nội tiếp chóp S.ABCD:

Ta có: $J\in OS\ \Rightarrow J(0;\ 0;\ r),\ OJ=r$

$$V_{S.ABCD}=\frac{r}{3}.S_{tp};\qquad V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.h(a\sqrt{2})^2=\frac{2a^2h}{3}$$

$$S_{xp}=4S_{\Delta SAB}=4.\frac{1}{2}SA.SB\sin\alpha=2(a^2+h^2)\sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{tp}=S_{xp}+S_{ABCD}=2(a^2+h^2)\sin\alpha+2a^2$$

$$\Rightarrow r=\frac{a^2h}{a^2+(a^2+h^2)\sin\alpha}=\frac{a\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}$$

Vậy: $OJ=\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=r.$

3. Tìm α để I ≡ J

$$I \equiv J \Leftrightarrow OI = OJ \Leftrightarrow \frac{a(2\cos\alpha - 1)}{2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\alpha - 1)(1+\sin\alpha-\cos\alpha) = 2\cos\alpha(1-\cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow (1-2\cos\alpha sin\alpha) + (\sin\alpha - \cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \quad (do \sin\alpha + 1 - \cos\alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 45^o \qquad (do\, \alpha\ nhọn)$$

Vậy $I \equiv J \Leftrightarrow \alpha = 45^o$.

Ví dụ 6:

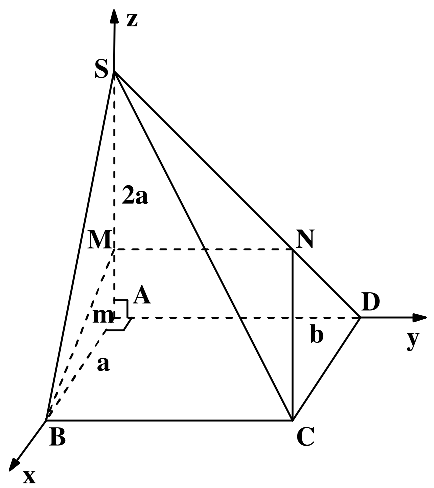
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là đáy hình chữ nhật với AB = a, AD = b, SA = 2a vuông góc với đáy. Trên cạnh SA lấy điểm M, AM = m ($0 \le m \le 2a$)

1. Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì. Tính diện tích thiết diện?
2. Tìm vị trí M để diện tích thiết diện lớn nhất.
3. Tìm vị trí M để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; b; 0), S(0; 0; 2a)

$\Rightarrow C(a;\, b;\, 0),\ M(0;\, 0;\, m)\ \ (0 \le m \le 2a)$.



Ta có: $\vec{n}_{(MBC)} = [\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}] = b(m;\, 0;\, a)$

$\overrightarrow{SD} = (0;\, b;\, -2a)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (MBC): $mx + az - ma = 0$

Phương trình đường thẳng SD: $\begin{cases} x = 0 \\ y = b + bt \quad (t \in R) \\ z = -2at \end{cases}$

Gọi $N = SD \cap (MBC) \Rightarrow N\left(0;\, \dfrac{2ab - mb}{2a};\, m\right)$

1. Hình tính và diện tích BCMN

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \left(0;\, \dfrac{2ab-mb}{2a};\, 0\right)$; $\overrightarrow{BC} = (0;\, b;\, 0)$; $\overrightarrow{MB} = (a;\, 0;\, -m)$

$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel BC \\ BC \perp MB \end{cases} \Rightarrow BCMN$ là hình thang vuông.

$$S_{BCMN} = \frac{MB}{2}(MN + BC) = \frac{\sqrt{a^2+m^2}}{2}\left(\frac{2ab-mb}{2a} + b\right) = \frac{4ab-mb}{4a}\sqrt{a^2+m^2}$$

2. Tìm vị trí M để S_{BCNM} lớn nhất:

Ta có: $S_{(m)} = \dfrac{b}{4a}(4a-m)\sqrt{m^2+a^2}$

$$\Rightarrow S'_{(m)} = \frac{b}{4a}\left[-\sqrt{m^2+a^2}+\frac{(4a-m)m}{\sqrt{m^2+a^2}}\right] = \frac{b}{4a}.\frac{-2m^2+4am-a^2}{\sqrt{m^2+a^2}}$$

$$S'_{(m)} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{a(2\pm\sqrt{2})}{2}$$

m	$-\infty$	0		$\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$		$\frac{a(2+\sqrt{2})}{2}$		$2a$	$+\infty$
$S'_{(m)}$			$-$	0	$+$	0	$-$		
$S_{(m)}$		ab	$\searrow$	$\frac{ab\sqrt{71-8\sqrt{2}}}{8}$	$\nearrow$	$\frac{ab\sqrt{71+8\sqrt{2}}}{8}$	$\searrow$	$\frac{ab\sqrt{5}}{2}$	

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{ab\sqrt{71+8\sqrt{2}}}{8} \Leftrightarrow m = \frac{a(2+\sqrt{2})}{2}$$

$$S_{\min} = \frac{ab\sqrt{71-8\sqrt{2}}}{8} \Leftrightarrow m = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$$

3. Tìm vị trí M để $V_{S.BCNM} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

Ta có: $d(S, (MBC)) = \frac{|2a^2-ma|}{\sqrt{m^2+a^2}}$

$$\Rightarrow V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}.\frac{2a^2-ma}{\sqrt{m^2+a^2}}.\frac{4ab-mb}{4a}\sqrt{m^2+a^2} = \frac{b(4a-m)(2a-m)}{12}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.2a.ab = \frac{2a^2b}{3}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{(4a-m)(2a-m)}{4} = a^2$

$\Leftrightarrow m^2-6am+4a^2=0 \Leftrightarrow m=(3-\sqrt{5})a$ *(vì $m \le 2a$)*

Vậy $AM = (3-\sqrt{5})a.$

Ví dụ 7:

Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a.

1. Chứng minh $A'C \perp (AB'D')$. Tính góc φ giữa (DA′C) và (ABB′A′).
2. Trên cạnh AD′, DB lấy điểm M, N thỏa AM = DN = k $(0 < k < a\sqrt{2})$.

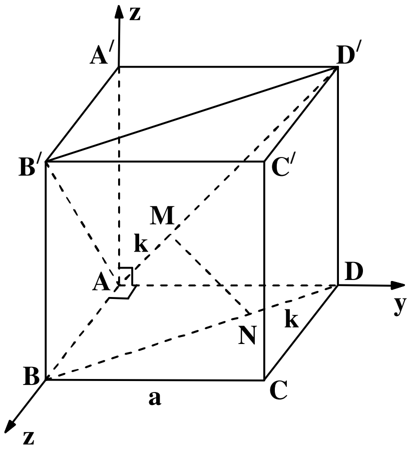
   a. Chứng minh MN // (A′D′BC)

   b. Tìm k để MN_{min}. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD′, DB.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; a; 0)
$A'(0; 0; a)$, $B'(a; 0; a)$, $C'(a; a; a)$, $D'(0; a; a)$

AM = DN = k $\Rightarrow M\left(0; \frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{k}{\sqrt{2}}\right), N\left(\frac{k}{\sqrt{2}}; a-\frac{k}{\sqrt{2}}; 0\right)$



1. Chứng minh $A'C \perp (AB'D')$:

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{A'C} = (a; a; -a) \\ \overrightarrow{AB'} = (a; 0; a) \\ \overrightarrow{AD'} = (0; a; a) \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n}_{(AB'D')} = \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'} = (-a^2; -a^2; a^2)$

$\left[\overrightarrow{A'C}, \vec{n}_{(AB'D')}\right] = \left[(a; a; -a), (-a^2; -a^2; a^2)\right] = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} \parallel \vec{n}_{(AB'D')}$

Vậy $A'C \perp (AB'D')$

Cách khác: $\begin{cases} \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AB'} = 0 \\ \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'C \perp AB' \\ A'C \perp AD' \end{cases} \Rightarrow A'C \perp (AB'D')$

Tính φ: $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DC}] = (0;\ a^2;\ a^2)$

$\vec{n}_2 = \vec{n}_{(ABB'A')} = \vec{j} = (0; 1; 0)$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\varphi = 45^o$.

2. *a. Chứng minh MN // (A'D'BC):*

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{\sqrt{2}}(k; a\sqrt{2}-2k; -k)$

$\vec{n} = \vec{n}_{(A'D'BC)} = [\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}] = -a^2(1; 0; 1)$

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\vec{n} = \frac{-a^2}{\sqrt{2}}(k-k) = 0$

$\Rightarrow MN \parallel (A'D'BC) \qquad (do\ M \notin (A'D'BC))$

b/ Tìm k để MN$_{min}$:

Ta có: $MN^2 = \frac{1}{2}(6k^2 - 4\sqrt{2}ak + 2a^2)$

k	$-\infty$	0		$\frac{a\sqrt{2}}{3}$		$a\sqrt{2}$	$+\infty$
MN^2			$\searrow$	$\frac{a^2}{3}$	$\nearrow$		

$\Rightarrow MN_{\min} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow k = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Khi $k = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $\overrightarrow{MN} = \dfrac{a}{3}(1;\ 1;\ -1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = \dfrac{a}{3}(1;\ 1;\ -1)(0;\ a;\ a) = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\ \overrightarrow{BD} = \dfrac{a}{3}(1;\ 1;\ -1)(-a;\ a;\ 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \perp AD' \\ MN \perp BD \end{cases}$$

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD.

Ví dụ 8:

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M là trung điểm AB, N là tâm của hình vuông ADD'A'.

1. Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm C, D', M, N.
2. Tính bán kính r của đường tròn (C) là giao của (S) và mặt cầu (S') đi qua A', B', C, D.
3. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (CMN) và hình lập phương.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; a; 0)
A'(0; 0; a), B'(a; 0; a), C'(a; a; a), D'(0; a; a)

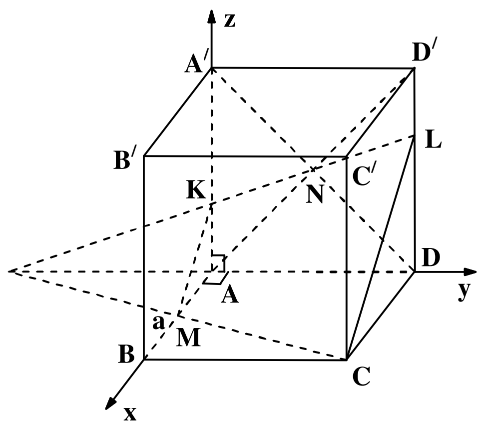
$\Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};\ 0;\ 0\right), N\left(0;\ \dfrac{a}{2};\ \dfrac{a}{2}\right)$

1. Tính R:

Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + d = 0$

$C, D', M, N \in (S)$, suy ra:

$$\begin{cases} 2a^2 - 2\alpha a - 2\beta a + d = 0 & (1) \\ 2a^2 - 2\beta a - 2\gamma a + d = 0 & (2) \\ \dfrac{a^2}{4} - \alpha a + d & (3) \\ \dfrac{a^2}{2} - \beta a - \gamma a + d = 0 & (4) \end{cases}$$



(1) – (2) suy ra: α = γ

(2) – (4) suy ra: d = a^2

(3) $\Rightarrow \alpha = \gamma = \dfrac{5a}{4}$

(4) $\Rightarrow \beta = \dfrac{a}{4}$

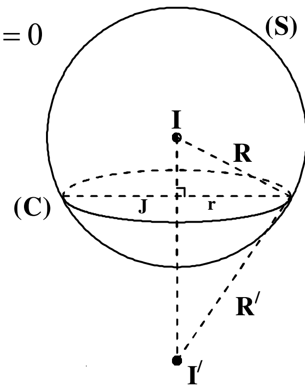
$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{5a}{2}x - \dfrac{a}{2}y - \dfrac{5a}{2}z + a^2 = 0$

$R^2 = \left(\frac{5a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5a^2}{4}\right) + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - a^2 = \frac{35a^2}{16}$

Vậy $R = \frac{a}{4}\sqrt{35}$.

2. Tính r:

Phương trình mặt cầu (S′): $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha'^2 x - 2\beta' y - 2\gamma' z + d' = 0$



$A', B', C', D \in (S')$, suy ra:

$$\begin{cases} a^2 - 2\gamma' a + d' = 0 \\ a^2 - 2\alpha' a + d' = 0 \\ 3a^2 - 2\alpha' a - 2\beta' a - 2\gamma' a + d' = 0 \\ a^2 - 2\beta' a + d' = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{a}{2}, d' = 0$

$\Rightarrow (S'): x^2 + y^2 + z^2 - ax - ay - az = 0$ và bán kính $R' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Dễ thấy C(a; a; 0) $\in (S') \Rightarrow C \in (C)$

Gọi I, I', J là tâm của (S), (S′) và (C)

$\Rightarrow I\left(\frac{5a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{5a}{4}\right), I'\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

Ta có: $JC \perp II'$

$\Rightarrow r = d(C, II') = \frac{\left|[\overrightarrow{II'}, \overrightarrow{CI}]\right|}{II'}$

$\overrightarrow{II'} = \left(-\frac{3a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{-3a}{4}\right); \overrightarrow{CI} = \left(\frac{a}{4}; \frac{-3a}{4}; \frac{5a}{4}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{II'}, \overrightarrow{CI}] = \frac{a^2}{4}(-1; 3; 2)$

$\Rightarrow r = a\sqrt{\frac{14}{19}}$

3. Tính S:

$\vec{n}_{(CMN)} = [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] = -\frac{a^2}{4}(2; -1; 3)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (CMN): $2x - y + 3z - a = 0$

Phương trình đường thẳng AA′: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} (t \in R)$

Phương trình đường thẳng DD′: $\begin{cases} x = 0 \\ y = a \\ z = t \end{cases} (t \in R)$

Gọi $K = (CMN) \cap AA'$, $L = (CMN) \cap DD'$

$\Rightarrow K\left(0;\ 0;\ \frac{a}{3}\right),\ L\left(0;\ a;\ \frac{2a}{3}\right)$

$\Rightarrow S = S_{CMKL} = \frac{1}{2}\left(\left|[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CK}]\right| + \left|[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CL}]\right|\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left\|\left[\left(-\frac{a}{2}; -a;\ 0\right),\ \left(-a; -a;\ \frac{a}{3}\right)\right]\right\| + \left\|\left[\left(-a; -a;\ \frac{a}{3}\right), \left(-a;\ 0;\ \frac{2a}{3}\right)\right]\right\|\right)$

$\Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{14}}{4}.$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, *OB*=*a*, *OC*=$a\sqrt{3}$, (*a*>0) và đường cao *OA*=$a\sqrt{3}$. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *BC*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *OM*.

HD: Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $O(0;0;0)$, $A(0;0;a\sqrt{3})$, $B(a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$.

$\Rightarrow d(AB;\ OM) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Bài 2. Cho hình chóp *O.ABC* có các cạnh OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB) là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích O.ABC nhỏ nhất.

HD: Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

$\Rightarrow V_{\min} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}$

Bài 3. Tứ diện *S.ABC* có cạnh *SA* vuông góc với đáy và ΔABC vuông tại *C*. Độ dài của các cạnh là *SA* = 4, *AC* = 3, *BC* = 1. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *AB*, *H* là điểm đối xứng của *C* qua *M*. Tính cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (*SHB*) và (*SBC*).

HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: *A*(0;0;0), *B*(1;3;0), *C*(0;3;0), *S*(0;0;4) và *H*(1;0;0).

Bài 4. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác *ABC* vuông cân tại *A*, *AB* = *AC* = *a* (*a* > 0), hình chiếu của *S* trên đáy trùng với trọng tâm *G* của Δ*ABC*. Đặt *SG* = *x* (*x* > 0). Xác định giá trị của *x* để góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60^o.

HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: *A*(0;0;0), *B*(a;0;0), *C*(0; *a*; 0), $G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3};\ 0\right)$, $S\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2};\ x\right)$.

$\Rightarrow x = \frac{a}{3}.$

Bài 5. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có độ dài cạnh đáy là *a*. Gọi *M*, *N* là trung điểm *SB*, *SC*. Tính theo *a* diện tích Δ*AMN*, biết (*AMN*) vuông góc với (*SBC*).

HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: O(0; 0; 0), S(0; 0; h), $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};\ 0;\ 0\right)$ *(SO = h).*

$\Rightarrow (AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right\| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Bài 6. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ các các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $C'B'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C'$.

HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho:

$A(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A'(0;0;a)$, $B'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$, $C'\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$

$\Rightarrow d\left(A'B;B'C'\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 7. Tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, $AB = 3$, $AC = AD = 4$. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD).

HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: $A(0;0;0)$; $B(0;0;3)$; $C(0;4;0)$; $D(4;0;0)$.

Bài 8. Cho hình chóp $SABC$ có độ dài các cạnh đều bằng 1, O là trọng tâm của tam giác ΔABC. I là trung điểm của SO.

a) Mặt phẳng (BIC) cắt SA tại M. Tìm tỉ số thể tích của tứ diện SBCM và tứ diện SABC.

b) H là chân đường vuông góc hạ từ I xuống cạnh SB. Chứng minh rằng IH qua trọng tâm G của ΔSAC.

HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: O(0; 0; 0), $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};0\right)$; $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0\right)$;

$S\left(0;0\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; $I\left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

$\Rightarrow \frac{V_{(SBCM)}}{V(_{SABC})}=\frac{1}{4}$

Bài 9. Cho hình lăng trụ $ABCD.\ A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $AA_1 = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi D là trung điểm của BB_1; M di động trên cạnh AA_1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MC_1D.

HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $A_1\ (0;0;2a)$, $C_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2a\right)$, $D(0;a;a)$

$\Rightarrow$ *Giá trị lớn nhất* $S_{DC_1M}=\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ *khi* $M\equiv A$

Bài 10. Cho tứ diện SABC có đáy là ΔABC vuông cân tại B, AB = a, $SA\perp(ABC)$ và SA = a. $AH\perp SB$ tại H, $AK\perp SC$ tại K.

a. Chứng minh $HK\perp SC$.

b. Gọi $I=HK\cap BC$. Chứng minh B là trung điểm CI.

c. Tính sin góc φ giữa SB và (AHK).

d. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABC.

ĐS: a/ $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{SC}=0$; c/ $\frac{2}{\sqrt{6}}$; d/ $SJ=JC,\ R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 11. Cho tứ diện SABC có đáy là ΔABC vuông cân tại B, AB = a, $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi D là trung điểm của AC.

a. Chứng minh khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến (SBC).

b. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc SC, (α) cắt SC và SB tại M và N. Tính thể tích hình chóp SAMN.

c. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

ĐS: a/ $d_A = \frac{a\sqrt{6}}{3}; d_B = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ b/ $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ d/ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 12. Cho ΔABC đều cạnh a. Trên đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại A lấy điểm S, SA = h.

a. Tính d(A, (SBC)) theo a và h.

b. Đường thẳng $\Delta \perp (SBC)$ tại trực tâm H của ΔSBC, chứng tỏ Δ luôn qua điểm cố định khi S di động trên d.

c. Δ cắt d tại S/. Tính h theo a để SS/ nhỏ nhất.

ĐS: a/ $\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}}$; b/ *Trọng tâm ΔABC* d/ $a\sqrt{2}; h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (P) qua A và $(\alpha) \perp SC$; (P) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

a. Chứng minh $AH \perp SB$, $AK \perp SD$.

b. Chứng minh BD // (α) và BD // HK.

c. Chứng minh HK đi qua trọng tâm G của ΔSAC.

d. Tính $V_{S.AHMK}$.

ĐS: a/ $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{SD} = 0$ b/ $\overrightarrow{BD}.\vec{n}_\alpha = 0$; $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HK}$;

c/ $HG // GK$; d/ $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Bài 14. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình chữ nhật có AB = a, AD = b, SA = 2a. N là trung điểm SD.

a. Tính d(A, (BCN)), d(SB, CN).

b. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

c. Gọi M là trung điểm SA. Tìm điều kiện a và b để $\cos\widehat{CMN} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Trong trường hợp đó tính $V_{S.BCNM}$.

ĐS: a/ $\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{2ab}{\sqrt{4a^2+5b^2}}$; b/ $\frac{b}{\sqrt{20a^2+5b^2}}$; c/ $a = b; V = \frac{a^3}{4}$.

Bài 15. Trong mp(P) cho hình vuông ABCD. Trên tia $Az \perp (\alpha)$ lấy điểm S. Đường thẳng $(\Delta_1) \perp (SBC)$ tại S cắt (P) tại M, $(\Delta_2) \perp (SCD)$ tại S cắt (P) tại N. Gọi I là trung điểm MN.

a. Chứng minh A, B, M thẳng hàng; A, D, N thẳng hàng.

b. Khi S di động trên Az, chứng tỏ I thuộc đường thẳng cố định.

c. Vẽ $AH \perp SI$ tại H. Chứng minh AH là đường cao tứ diện ASMN và H là trực tâm ΔSMN.

d. Cho OS = 2, AB = 1. Tính V_{ASMN}.

ĐS: a/ $\overrightarrow{MA} = h^2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NA} = h^2\overrightarrow{AD}$; b/ $I\left(-\frac{h^2}{2}; -\frac{h^2}{2}; 0\right) \in AC$;

c/ $AH \perp (SMN)$; $MN \perp SH$; $SM \perp AH$; d/ $\frac{16}{3}$.

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M, N. Đặt CM = x, CN= y (0 < x, y < a).

a. Tìm hệ thức giữa x và y để góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) bằng 45^o.

b. Tìm hệ thức giữa x và y để $(SAM) \perp (SMN)$

ĐS: a/ $4a^4 - 4a^3(x+y) + 2axy(x+y) - x^2y^2 = 0$ b/ $x^2 - ax + ay = 0$

Bài 17. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, đường cao SO, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$.

a. Tính thể tích hình chóp. Xác định tâm Ivà bán kính R của hình cầu (S) nội tiếp hình chóp.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, AD, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt SB, SD tại Q và R. Tính diện tích thiết diện.

c. Chứng tỏ rằng mặt phẳng (MNP) chia hình chóp ra hai phần có thể tích bằng nhau.

ĐS: a/ $V = \frac{4a^3}{3}; OI = R = \frac{a}{2}$ b/ $a^2\sqrt{2}$ c/ $\frac{2a^3}{3}$.

Bài 18. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, đường cao SO. Mặt bên tạo với đáy góc 60^0. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và tạo với đáy góc 30^0 cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M, N.

a. Tính góc giữa AN với (ABCD) và BD.

b. Tính khoảng cách giữa AN và BD.

c. Tính thể tích hình khối ABCDMN.

ĐS: a/ $\sin\varphi = \sqrt{\frac{3}{13}}$ b/ $a\sqrt{\frac{3}{22}}$ c/ $\frac{5a^3\sqrt{3}}{48}$.

Bài 19. Cho hình vuông ABCD cạnh $a\sqrt{2}$ tâm O. Trên tia $Oz \perp (ABCD)$ lấy điểm S, mặt phẳng (SAD) tạo với đáy góc α.

a. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SA và CD.

b. Mặt phẳng (β) qua AC và vuông góc (SAD) chia hình chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

ĐS: a/ $a\sqrt{2}.\sin\alpha$ b/ $\cos^2\alpha$.

Bài 20. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có AB= 2, AD = 4, AA′ = 6. Gọi I, J là trung điểm AB, CD′. Gọi M, N thỏa $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'}$ $(0 \le m \le 1)$

a. Tính khoảng cách từ A đến (BDA′).

b. Chứng minh I, M, J, N đồng phẳng.

c. Xác định tâm K và bán kính R của mặt cầu (S) ngoại tiếp ABDA′.

d. Tính bán kính r của đường tròn giao của (S) và (BDA′).

ĐS: a/ $\frac{12}{7}$ b/ $[\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}].\overrightarrow{IM} = 0$ c/ $K(1; 2; 3)$, $R = \sqrt{14}$; d/ $\frac{5\sqrt{26}}{7}$.

Bài 21. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có các cạnh bằng 2. Gọi M, N là trung điểm AB và DD′.

a. Chứng minh MN // (BDC′). Tính MN và d(MN, (BDC′)).

b. Gọi P là trung điểm C′D′. Tính $V_{C.MNP}$ và góc giữa MN và BD.

c. Tính bán kính R của đường tròn ($A'BD$).

ĐS: a/ $\overrightarrow{MN}.\vec{n} = 0;\ MN = \sqrt{6};\ d = \dfrac{\sqrt{3}}{3};$ b/ $V = 1;\ \varphi = 30^o;$ c/ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 22. Cho lăng trụ OAB.O′A′D đáy ΔOAB vuông tại O, OA= a, OB = b, OO/ = h. Mặt phẳng (P) qua O vuông góc AB′.

a. Tìm điều kiện a, b, h để (α) cắt cạnh AB, AA' tại I, J (I, J không trùng A, B, A').

b. Với điều kiện trên hãy tính: $S_{\Delta OIJ}$ và tỉ số thể tích 2 phần do thiết diện chia lăng trụ.

ĐS: a/ $a < h$ b/ $S = \dfrac{a^3b\sqrt{a^2+b^2+h^2}}{2h(a^2+b^2)};\ \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{a^4}{3a^2h^2+3b^2h^2-a^4}$

Bài 23. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông tại A, $SC \perp (ABC)$ và SC = AB = AC = $a\sqrt{2}$. Các điểm M thuộc SA và N thuộc BC sao cho AM = CN = t (0 < t < 2a)

a. Tính độ dài đoạn MN, tìm t để đoạn MN ngắn nhất.

b. Khi MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

ĐS: a/ $MN = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2};\ \min = \dfrac{a\sqrt{6}}{3},\ t = \dfrac{2a}{3}$ b/ $MN \perp AM,\ MN \perp CN$.

Bài 24. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có AB= 3, BC = 4. Cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và SA = 4.

a. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

b. Trên AB lấy 1 điểm E với AE = x. Mặt phẳng (P) qua E song song với SA và BC cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện. Tìm x để diện tích này lớn nhất.

ĐS: a/ $SI = IC;\ R = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$ b/ $\max S = 4,\ x = \dfrac{3}{2}$.

Bài 25. Cho tam giác đều SAD và hình vuông ABCD cạnh a nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I là trung điểm của AD, M là trung điểm của AB, F là trung điểm của SB.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng $(CMF) \perp (SIB)$.

b. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SD giữa CM và SA.

ĐS: b/ $\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 26. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^o$. Gọi M là trung điểm cạnh AA′ và N là trung điểm cạnh CC′.

a. Chứng minh rằng 4 điểm B′, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

b. Tính cạnh AA′ theo a để tứ giác B′MDN là hình vuông.

ĐS: b/ $a\sqrt{2}$.

ĐỀ THI CHUNG CỦA BỘ GD-ĐT

Bài 1: (A–2002) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

ĐS: $S = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Bài 2: (A–2002) Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ x+2y-2z+4=0 \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t. \end{cases}$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2.

b. Cho điểm M(2; 1; 4). Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

ĐS: a/ $(P): 2x - z = 0$ b/ $H(2; 3; 3)$.

Bài 3: (B–2002) Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

b. Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

ĐS: a/ $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$; b/ $MP \perp C_1N$.

Bài 4: (D–2002) Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

ĐS: $\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$.

Bài 5: (D–2002) Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng

(P): 2x – y + 2 = 0 và đường thẳng d_m: $\begin{cases} (2m+1)x+(1-m)y+m-1=0 \\ mx+(2m+1)z+4m+2=0 \end{cases}$ (m là tham số).

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

ĐS: $m = -\dfrac{1}{2}$.

Bài 6: (A–2003) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[B, A'C, D]$.

ĐS: 120^o

Bài 7: (A–2003) Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc của hệ tọa độ, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), $A'(0; 0; b)$ (a >0, b > 0). Gọi M là trung điểm cạnh CC'.

a. Tính thể tích khối tứ diện $BDA'M$ theo a và b.

b. Xác định tỷ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

<u>ĐS</u>: a/ $\frac{a^2b}{4}$; b/ $\frac{a}{b}=1$.

<u>Bài 8</u>: (B–2003) Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^o$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và Nlà trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

<u>ĐS</u>: $a\sqrt{2}$.

<u>Bài 9</u>: (B–2003) Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hai điểm A(2; 0; 0), B(0; 0; 8) và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC}=(0;6;0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

<u>ĐS</u>: 5.

<u>Bài 10</u>: (D–2003) Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho đường thẳng:

$$(d_k):\begin{cases}x+3ky-z+2=0\\kx-y+z+1=0\end{cases}$$

Tìm k để đường thẳng (d_k) vuông góc với mặt phẳng (P): x – y – 2z + 5 = 0.

<u>ĐS</u>: k = 1.

<u>Bài 11</u>: (D–2003) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với AB= a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

<u>ĐS</u>: $R=\frac{a\sqrt{3}}{2};\ AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

<u>Bài 12</u>: (A–2004) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), $S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

<u>ĐS</u>: a/ 30^o; $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

<u>Bài 13</u>: (B–2004) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ($(0^o<\varphi<90^o)$. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

<u>ĐS</u>: $\sqrt{2}.\tan\varphi$; $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}.\tan\varphi$

<u>Bài 14</u>: (B–2004) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(-4; -2; 4) và đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=1-t\\z=-1+4t.\end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

ĐS: $(\Delta): \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

Bài 15: (D–2004) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Biết A(a; 0; 0), B(-a; 0; 0), C(0; 1; 0), B_1(-a; 0; b), a > 0, b > 0.

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.

b. Cho a, b thay đổi, nhưng luôn thỏa mãn a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

ĐS: a/ $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; b/ $\sqrt{2}$; $a = b = 2$.

Bài 16: (D–2004) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P): x + y + z – 2 = 0. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

ĐS: $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Bài 17: (A–2005) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 9 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.

b) Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), biết Δ đi qua A và vuông góc với d.

ĐS: *a)* $I_1(-3;5;7)$, $I_2(3;-7;1)$ *b) A(0; –1; 4);* Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}$

Bài 18: **(B–2005)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ với A(0; –3; 0), B(3; 0; 0), C(0; 3; 0), B′(4; 0; 4).

a) Tìm toạ độ các đỉnh A′, C′. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC′B′).

b) Gọi M là trung điểm của A′B′. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC′. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A′C′ tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN.

ĐS: *a) A′ (0; –3; 4), C′ (0; 3; 4); (S):* $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}$

b) (P): $x + 4y - 2z + 12 = 0$; $MN = \frac{\sqrt{17}}{2}$

Bài 19: **(D–2005)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

b) Mặt phẳng toạ độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc toạ độ).

ĐS: *a) (P):* $15x + 11y - 17z - 10 = 0$ *b)* $S_{\Delta OAB} = 5$

Bài 20: (A–2006) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A′(0; 0; 1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A′C và MN.

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa A′C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α, biết $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

ĐS: a) $d(A'C, MN) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) (Q_1): $2x - y + z - 1 = 0$, (Q_2): $x - 2y - z + 1 = 0$

Bài 21: (A–2006) Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O′ lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO′AB.

ĐS: $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Bài 22: (B–2006) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad và \quad d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với d_1 và d_2.

b) Tìm toạ độ các điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng.

ĐS: a) (P): $x + 3y + 5z - 3 = 0$ b) *M(0; 1; –1), N(0; 1; 1).*

Bài 23: (B–2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

ĐS: $V_{AINB} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Bài 24: (D–2006) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1} \quad và \quad d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$$

a) Tìm toạ độ điểm A′ đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

ĐS: a) *A′(–1; –4; 1)* b) Δ: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

Bài 25: (D–2006) Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

ĐS: $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$.

Bài 26: (A–2007) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \quad và \quad d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): $7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

ĐS: b) d: $\frac{x-2}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-4}$.

Bài 27: (A–2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

ĐS: $V_{CMNP}=\frac{\sqrt{3}a^3}{96}$.

Bài 28: (B–2007) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình: (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$, (P): $2x-y+2z-14=0$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

ĐS: a) (Q): $y-2z=0$ b) $M(-1;-1;-3)$.

Bài 29: (B–2007) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

ĐS: $d(MN, AC)=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Bài 30: (D–2007) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(1; 4; 2), B(–1; 2; 4) và đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$.

a) Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

ĐS: a) d: $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{1}$ b) M(–1; 0; 4).

Bài 31: (D–2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh ΔSCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

ĐS: $d(H, (SCD))=\frac{a}{3}$.

Bài 32: (A–2008) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng

$$d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$$

a) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

ĐS: a) H(3; 1; 4) b) (P): $x-4y+z-3=0$

Bài 33: (A–2008) Cho lăng trụ ABC.A′B′C′ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A′ trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A′.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA′, B′C′.

ĐS: $V = \dfrac{a^3}{2}$ $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$

Bài 34: (B–2008) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(0; 1; 2), B(2; –2; 1), C(–2; 0; 1).

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

b) Tìm toạ độ của điểm M thuộc mặt phẳng $2x+2y+z-3=0$ sao cho MA = MB = MC.

ĐS: *a)* $x+2y-4z+6=0$ *b) M(2; 3; –7).*

Bài 35: (B–2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

ĐS: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$; $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài 36: (D–2008) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3).

a) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

b) Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

ĐS: *a)* $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z=0$ *b) H(2; 2; 2).*

Bài 37: (D–2008) Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên AA′ = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A′B′C′ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B′C.

ĐS: $V = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$; $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 38: (A–2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

ĐS: $V = \dfrac{3\sqrt{15}a^3}{5}$.

Bài 39: (A–2009) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

ĐS: *H(3; 0; 2),* *r = 4.*

Bài 40: (A–2009) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-1=0$ va hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+9}{6}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

ĐS: $M\left(\frac{18}{35};\frac{53}{35};\frac{3}{35}\right)$.

Bài 41: (B–2009) Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A′B′C′ có BB′ = a, góc giữa đường thẳng BB′ và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B′ lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A′.ABC theo a.

ĐS: $V = \frac{9a^3}{208}$.

Bài 42: (B–2009) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1; 2; 1), B(–2; 1; 3), C(2; –1; 1) và D(0; 3; 1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

ĐS: *(P):* $4x+2y+7z-15=0$ *hoặc (P):* $2x+3z-5=0$.

Bài 43: (B–2009) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm A(–3; 0; 1), B(1; –1; 3). Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

ĐS: $\Delta: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Bài 44: (D–2009) Cho hình lăng trụ đứng ABC. A′B′C′ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA′ = 2a, A′C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A′C′, I là giao điểm của AM và A′C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

ĐS: $V = \frac{4a^3}{9}$, $d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Bài 45: (D–2009) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0) và mặt phẳng (P): $x+y+z-20=0$. Xác định toạ độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

ĐS: $D\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-1\right)$.

Bài 46: (D–2009) Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x+2y-3z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

ĐS: $d: \begin{cases} x=-3+t \\ y=1-2t \\ z=1-t \end{cases}$.

Chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp và các em học sinh đã đọc tập tài liệu này.

transitung_tv@yahoo.com