CÁC BÀI TOÁN VỀ NGUYÊN LÝ ĐẾM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Chỉnh hợp

Cho một tập hợp gồm n phần tử ($1 \le n \in \mathbb{N}$). Mỗi bộ sắp thứ tự gồm k phần tử trong số n phần tử đã cho được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phân tử đó.

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là: $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

2. Hoán vị: Một chỉnh hợp chập n của n phần tử được gọi là mọt hóan vị của n phần tử đó. Số các hoán vị của n phần tử là: $P_n = A_n^n = n(n-1)....2.1 = n!$

3. Tổ hợp: Cho một tập hợp n phần tử phân biệt. Mỗi tập con gồm k phần tử phân biệt không sắp thứ tự ($0 \le k \le n$), lấy trong số n phân tử đã cho là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử là: $C_n^k = \dfrac{1}{k!} \cdot A_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

4. Qui tắc cộng

Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là các tập hợp hữu hạn không giao nhau: $X_i \cap X_j = \varnothing$ thì

$|X_1 \cup X_2 ... X_{n-1} \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + ... + |X_{n-1}| + |X_n|$ với $|X_i|$ là số phần tử.

• *Ý nghĩa số học:*

Giả sử một phép chọn được thực hiện qua n bước độc lập với nhau trong đó:

Bước 1 có p_1 cách thực hiện; Bước 2 có p_2 cách; … Bước n có p_n cách.

Khi đó có $p_1 + p_2 + ... + p_n$ cách khác nhau thực hiện phép chọn.

5. Qui tắc nhân

Cho Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là các tập hợp hữu hạn với số phần tử: $|X_i| = p_i$, khi đó:

$$|X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1} \times X_n| = p_1 \times p_2 \times ... \times p_{n-1} \times p_n$$

• *Ý nghĩa số học:*

Giả sử một phép chọn được thực hiện qua n bước liên tiếp trong đó:

Bước 1 có p_1 cách thực hiện; Bước 2 có p_2 cách ; … Bước n có p_n cách .

Khi đó có $p_1 \times p_2 \times ... \times p_{n-1} \times p_n$ cách khác nhau thực hiện phép chọn.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN TRONG NGUYÊN LÝ ĐẾM

II.1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG GIẢI BÀI TOÁN VỀ CẤU TẠO SỐ

Giả sử m, n là các số nguyên dương với $m \le n$ thì:

1) Số cách viết m trong n chữ số khác nhau vào m vị trí định trước là A_n^m

2) Số cách viết m chữ số khác nhau trong n vị trí định trước là A_n^m

(ở $n-m$ vị trí còn lại không thay đổi chữ số)

3) Số cách viết m chữ số giống nhau trong n vị trí định trước là $C_n^{n-m} = C_n^m$

4) Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số 0, số các số có m chữ số tạo thành từ chúng là $(n-1)A_{n-1}^{m-1}$

Thực vậy, có $(n-1)$ cách chọn chữ số đứng đầu, sau đó áp dụng mệnh đề 2.

Sau đây là các dạng toán thường gặp.

A. Dạng 1. SỐ TẠO THÀNH CHỨA CÁC CHỮ SỐ ĐỊNH TRƯỚC.

Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số 0, từ chúng viết được bao nhiêu số có m chữ số khác nhau sao cho trong đó có k chữ số định trước (thuộc n chữ số trên) với $k < m \le n$.

Cách giải: Số tạo thành gồm m vị trí $\overline{a_1a_2...a_m}$. Gọi tập hợp k chữ số đinh trước là X. Ta xét hai bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về tập hợp X và chữ số 0 như sau:

1) Trong X chứa chữ số 0

Ta có $(m-1)$ cách chọn vị trí cho số 0;

Số cách chọn $(k-1)$ chữ số khác 0 thuộc X trong $(m-1)$ vị trí còn lại là A_{m-1}^{m-k} theo mệnh đề (1).

Theo qui tắc nhân, ta được số các số đó là $S = (m-1)A_{m-1}^{k-1} \cdot A_{n-k}^{m-k}$

2) Trong X không chứa chữ số 0

Bước 1: Tính số các số tạo thành chứa chữ số 0.

Lần lượt có $(m-1)$ cách chọn vị trí cho 0 ;

Số cách viết k chữ số thuộc X vào $(m-1)$ vị trí còn lại là A_{m-1}^{k} theo mệnh đề 2;

Số cách chọn $(m-k-1)$ trong số $(n-k-1)$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $(m-k-1)$ vị trí còn lại là A_{n-k-1}^{m-k-1} theo mệnh đề 1. Theo qui tắc nhân, ta được số các số đó là: $S_1 = (m-1)A_{m-1}^{k} \cdot A_{n-k-1}^{m-k-1}$

Bước 2: Tính số các số tạo thành không chứa chữ số 0.

Số cách viết k chữ số thuộc X trong m vị trí là A_{m}^{k} theo mệnh đề 2;

Số cách chọn $(m-k)$ trong số $(n-k-1)$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $(m-k)$ vị trí còn lại là A_{n-k-1}^{m-k} theo mệnh đề 1. Theo qui tắc nhân, ta được số các số đó là: $S_2 = A_{m}^{k} \cdot A_{n-k-1}^{m-k}$

Bước 3: Theo qui tắc cộng, ta được số các số tạo thành thỏa mãn bài toán là: $S = S_1 + S_2$

Bài mẫu. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1?

Giải: Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 0.

Với mỗi cách chọn trên lại có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 1 và có A_8^4 cách chọn vị trí cho 4 trong 8 chữ số còn lại.

Vậy có tất cả $5.5.A_8^4 = 42000$ số gồm 6 chữ số khác nhau và trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1.

B. Dạng 2. SỐ TẠO THÀNH KHÔNG CHỨA HAI CHỮ SỐ ĐỊNH TRƯỚC CẠNH NHAU

Cho tập hợp gồm n chữ số, từ chúng viết được bao nhiêu số có m $(m \le n)$ chữ số khác nhau mà trong đó có hai chữ số định trước nào đó không đứng cạnh nhau.

Cách giải: Số tạo thành có dạng $\overline{a_1a_2...a_m}$ và 2 chữ số định trước là x, y (thuộc n chữ số đã cho) . Ta xét ba bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về chữ số x, y và chữ số 0 như sau:

1) Nếu n chữ số đã cho chứa chữ số 0 và hai chữ số định trước x, y khác 0.

Bước 1: Tính số các số tạo thành một cách bất kì

Có $n-1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0 và áp dụng mệnh đề 2 được số các số đó là: $S_1 = (n-1)A_{n-1}^{m-1}$

Bước 2: Tính số các số có 2 chữ số x, y cạnh nhau theo thứ tự $\overline{xy}$ và $\overline{yx}$.

TH1: $\overline{a_1a_2} = \overline{xy}$. Khi đó mỗi số $\overline{a_3...a_m}$ ứng với một chỉnh hợp chập $(m-2)$ của $(n-2)$ chữ số khác x, y. Số các số đó là: $S_2 = A_{n-2}^{m-2}$ theo mệnh đề 1.

TH2: $\overline{a_1a_2} \neq \overline{xy}$. Lần lượt ta có $(n-3)$ cách chọn chữ số cho $a_1 \neq 0, x, y$; $(m-2)$ cách chọn vị trí cho $\overline{xy}$; Số cách chọn $(m-3)$ trong $(n-3)$ chữ số còn lại khác a_1, x, y cho $(m-3)$ vị trí còn lại là A_{n-3}^{m-3} theo mệnh đề 1.

Theo qui tắc nhân, số các số đó là: $S_3 = (n-3)(m-2)A_{n-3}^{m-3}$.

Từ 2 trường hợp trên, ta được số các số có chứa $\overline{xy}$ là $S_2 + S_3$.

Tương tự có $S_2 + S_3$ số chứa $\overline{yx}$.

Bước 3: Vậy số các số thỏa mãn bài toán là: $S = S_1 - 2(S_2 + S_3)$.

2) Nếu n chữ số đã cho chứa chữ số 0 và một trong hai chữ số định trước bằng 0.

Bước 1: Tính số các số tạo thành một cách bất kì: $S_1 = (n-1)A_{n-1}^{m-1}$

Bước 2: Tính số các số có 2 chữ số x và 0 cạnh nhau: $S_2 = (2m-3)A_{n-2}^{m-2}$

(có m – 1 cách viết $\overline{x0}$ và m – 2 cách viết $\overline{0x}$ vào m vị trí)

Bước 3: Vậy số các số thỏa mãn bài toán là: $S = S_1 - S_2$.

3) Nếu n chữ số đã cho không chứa chữ số 0: $S = A_n^m - 2(m-1)A_{n-2}^{m-2}$

Bài 1. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau? Trong đó có bao nhiêu số mà chữ số 1 và chữ số 6 không đứng cạnh nhau?

Giải: *Bước 1: Tính số các số tạo thành một cách bất kì*

Có 6 cách chọn chữ số đầu tiên khác 0 và có A_6^5 cách chọn 5 trong 6 số vào 5 vị trí còn lại. Vậy có $6A_6^5$ số có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số trên.

Bước 2: Tính số các số có 2 chữ số 1, 6 cạnh nhau theo thứ tự 16 và 61.

TH1: Nếu 2 chữ số đầu tiên là 1, 6, khi đó có 2! cách đảo vị trí 2 số này.

Có A_5^4 cách chọn 4 trong 5 số vào 4 vị trí còn lại. Vậy có $2A_5^4$ số có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số trên và có 2 số đầu tiên là 1 và 6.

TH2: Nếu số đầu tiên khác 1 và 6, khi đó có 4 cách chọn để số này khác 0.

Có 4 cách chọn vị trí cho 2 số 1 và 6 cạnh nhau.

Có A_4^3 cách chọn 3 trong 4 số vào 3 vị trí còn lại.

Mặt khác ta có 2! cách đảo vị trí 2 số 1 và 6 cạnh nhau. Vậy có $4.4.A_4^3.2!$ số có 6 chữ số có hai số 1, 6 đứng cạnh nhau và không đứng đầu tiên.

Bước 3: Vậy số các số thỏa mãn bài toán là: $S = 6A_6^5 - 2\left(A_5^4 + 4.4.A_4^3\right) = 3312$.

C. Dạng 3. SỐ TẠO THÀNH CHỨA CHỮ SỐ LẶP LẠI

Ví dụ: Có bao nhiêu số tự nhiên só 6 chữ số sao cho trong đó có 1 chữ số xuất hiện 3 lần, 1 chữ số khác xuất hiện 2 lần và 1 chữ số khác 2 chữ số trên.

Lời giải: Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, lần lượt:

Có 10 cách chọn chữ số xuất hiện 3 lần và có C_6^3 cách chọn 3 trong 6 vị trí cho chữ số đó. Sau đó có 9 cách chọn chữ số xuất hiện 2 lần và có C_3^2 cách chọn 2 trong 3 vị trí còn lại cho chữ số đó. Tiếp theo có 8 cách chọn chữ số cho vị trí còn lại cuối cùng. Ta được số các số đó là: $S = 10.C_6^3.9.C_3^2.8 = 720.C_6^3.C_3^2$.

Do vai trò của 10 chữ số 0, 1, … 9 là như nhau nên số các số có chữ số đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán là: $\frac{9}{10}S = 648.C_6^3.C_3^2$

Bài toán tổng quát: Cho tập hợp gồm n chữ số, từ chúng viết được bao nhiêu số có m chữ số sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện k lần, một chữ số khác xuất hiện q lần với $k + q = m$.

Cách giải: Ta xét hai bài toán nhỏ dưới đây:

1) Nếu n chữ số đã cho có chứa chữ số 0.

Bước 1: Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, ta thấy:

Có n cách chọn chữ số xuất hiện k lần và có C_m^k cách chọn k trong m vị trí cho chữ số đó. Sau đó có $(n-1)$ cách chọn chữ số xuất hiện q lần cho q vị trí còn lại. Theo qui tắc nhân ta tính được số các số đó là: $S = n(n-1)C_m^k$

Bước 2: Vai trò của n chữ số như nhau nên số các số có chữ số đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán là: $\frac{n-1}{n}S$

2) Nếu n chữ số đã cho không chứa chữ số 0: $S=n(n-1)C_m^k$

Bài 1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần còn mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Giải

Xét 8 chữ số hình thức 0, 1a, 1b, 1c, 2, 3, 4, 5. Ta sẽ lập số gồm 8 chữ số trên. Chữ số đầu tiên (hàng chục triệu) không thể là 0 nên có 7 cách chọn. Mỗi chữ số tiếp sau có thể là số bất kỳ trong 7 chữ số còn lại nên có 7! cách chọn. Như vậy tất cả có 7.7! số có 8 chữ số. Do1a = 1b = 1c = 1 nên các chữ số trên đã lặp lại 3! = 6 lần. Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\frac{7.7!}{3!}=5880$ số.

Bài 2. Cho tập hợp $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

a. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có 12 chữ số sao cho chữ số 5 có mặt 3 lần, chữ số 6 có mặt 4 lần còn lại chữ số khác có mặt 1 lần?

b. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho có 1 chữ số lặp lại 4 lần; một chữ số khác lặp lại 2 lần và một chữ số khác với hai chữ số trên?

Giải

a. + Có C_{12}^3 cách chọn vị trí cho 3 chữ số 5

+ Có C_9^4 cách chọn vị trí cho 4 chữ số 6.

+ Có 5! cách xếp 5 chữ số còn lại vào 5 vị trí.

Vậy có tất cả: $C_{12}^3.C_9^4.5!=3326400$ số cần tìm.

b. *Bước 1:* Có 7 cách chọn chữ số lặp lại 4 lần từ 7 chữ số đã cho.

Có C_7^4 cách chọn vị trí cho 4 chữ số này.

Bước 2: Có 6 cách chọn chữ số lặp lại 2 lần từ 6 chữ số đã cho còn lại

Có C_3^2 cách chọn vị trí cho 2 chữ số này.

Bước 3: Có 5 cách chọn chữ số xuất hiện 1 lần từ 5 chữ số đã cho còn lại.

Vậy số các số cần tìm là: $7.C_7^4.6.C_3^2.5=22050$ số.

II.2. CÁC DẠNG BÀI TOÁN SỐ HỌC TÍCH HỢP SỰ VẬT, HIỆN TƯỢNG

A. Dạng 1: BÀI TOÁN CHỌN VẬT

1) Đặc trưng của bài toán:

Chọn một tập hợp gồm có k phần tử từ n phần tử khác nhau, k phần tử không có tính chất gì thay đổi nếu như hoán vị k vị trí của nó. Đây chính là đặc điểm để nhận dạng sử dụng công thức tổ hợp.

2. Phương pháp:

Bước 1: Liệt kê các tính chất có thể có của tập con cần chọn

Bước 2: Phân chia trường hợp (nếu có)

Bước 3: Tính số cách chọn bằng cách dựa vào công thức C_n^k.

Bước 4: Dùng quy tắc nhân và quy tắc cộng $\Rightarrow$ kết quả của bài toán

Bài 1. Một hộp đựng 7 viên bi xanh; 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng.

a) Có bao nhiêu cách lấy ra 7 viên bi đủ 3 màu, trong đó có 3 viên bi xanh và nhiều nhất 2 viên bi đỏ?

b) Có bao nhiêu cách lấy ra 8 viên bi có đủ 3 màu?

Giải

a) Xét hai trường hợp sau:

TH1: Có **1 viên bi đỏ**: khi đó có C_5^1 cách lấy 1 viên bi đỏ; có C_7^3 cách lấy ra 3 viên bi xanh và có C_4^3 cách lấy ra 3 viên bi vàng. Vậy có $C_5^1.C_7^3.C_4^3$ cách lấy ra 7 viên bi trong đó có 3 bi xanh, 1 bi đỏ và 3 bi vàng.

TH2: Có **2 viên bi đỏ**: khi đó có C_5^2 cách lấy 2 viên bi đỏ; có C_7^3 cách lấy ra 3 viên bi xanh và có C_4^2 cách lấy ra 2 viên bi vàng. Vậy có $C_5^2.C_7^3.C_4^2$ cách lấy ra 7 viên bi trong đó có 3 bi xanh, 2 bi đỏ và 2 bi vàng.

Vậy có tất cả: $C_5^1C_7^3C_4^3 + C_5^2C_7^3C_4^2 = 2800$ cách.

b) *Bước 1:* Tính số cách lấy ra 8 viên bi bất kỳ: có C_{16}^8 cách

Bước 2: Tính số cách lấy ra 8 viên bi không có màu vàng mà chỉ có hai màu xanh và đỏ: $C_7^7C_5^1 + C_7^6C_5^2 + C_7^5C_5^3 + C_7^4C_5^4 + C_7^3C_5^5 = 495$

Bước 3: Tính số cách lấy ra 8 viên bi không có màu đỏ mà có hai màu xanh và vàng: $C_7^7C_4^1 + C_7^6C_4^2 + C_7^5C_4^3 + C_7^4C_4^4 = 165$

Bước 4: Tính số cách lấy ra 8 viên bi không có màu xanh mà chỉ có hai màu đỏ và vàng: $C_5^5C_4^3 + C_5^4C_4^4 = 9$

Vậy có tất cả: $C_{16}^8 - (495 + 165 + 9) = 12201$ cách.

***Chú ý:* Từ bước 2 ta có thể tính theo cách sau:**

Bước 2: Tính số cách lấy ra 8 viên bi trong tổng số 12 viên xanh và đỏ: C_{12}^8

Bước 3: Tính số cách lấy ra 8 viên bi trong tổng số 11 viên xanh và vàng: C_{11}^8

Bước 4: Tính số cách lấy ra 8 viên bi trong tổng số 9 viên đỏ và vàng: C_9^8

Vậy có tất cả: $C_{16}^8 - (C_{12}^8 + C_{11}^8 + C_9^8) = 12201$ cách.

Bài 2. Có 8 con tem và 5 bì thư. Chọn ra 3 con tem để dán vào 3 bì thư, mỗi bì thư dán 1 con tem. Hỏi có bao nhiêu cách dán?

Giải

Chọn 3 con tem có C_8^3 cách; Chọn 3 bì thư có C_5^3 cách

Một con tem có thể dán vào bì thư nào cũng được trong 3 bì lấy ra nên có tất cả: $3!C_8^3C_5^3 = 3360$ cách.

Bài 3. Trên một giá sách có 10 cuốn sách giáo khoa và 7 cuốn sách tham khảo.

a) Có bao nhiêu cách lấy 6 cuốn trong đó có 2 cuốn sách giáo khoa?

b) Có bao nhiêu cách lấy 7 cuốn trong đó có ít nhất 4 cuốn sách giáo khoa?

Giải

a) Có C_{10}^2 cách lấy bất kỳ 2 cuốn trong 10 cuốn sách giáo khoa; Có C_7^4 cách chọn 4 cuốn còn lại trong 7 cuốn sách tham khảo. Vậy có $C_{10}^2C_7^4 = 1575$ cách.

b) Có $C_{10}^4C_7^3$ cách chọn trong đó có 4 cuốn SGK và 3 cuốn sách tham khảo

Có $C_{10}^5C_7^2$ cách chọn trong đó có 5 cuốn SGK và 2 cuốn sách tham khảo.

Có $C_{10}^6C_7^1$ cách chọn trong đó có 6 cuốn SGK và 1 cuốn sách tham khảo.

Có $C_{10}^7C_7^0$ cách chọn trong đó có 7 cuốn SGK và 0 cuốn sách tham khảo.

Vậy có $C_{10}^4C_7^3 + C_{10}^5C_7^2 + C_{10}^6C_7^1 + C_{10}^7C_7^0 = 14232$ cách.

B. Dạng 2: BÀI TOÁN CHỌN NGƯỜI

Bài 1. Lớp 11A của Tuấn có 11 học sinh nam và 18 học sinh nữ.

a. Có bao nhiêu cách chọn ra một đội văn nghệ gồm 10 người đủ nam và nữ.

b. Chọn ra một tổ trực nhật gồm 13 người, trong đó có 1 tổ trưởng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu Tuấn luôn có mặt trong tổ và chỉ là thành viên?

Giải

a. *Bước 1:* Chọn 10 người bất kì trong 29 người cả nam và nữ có C_{29}^{10} cách

Bước 2: Chọn 10 người đều là nam có C_{11}^{10} cách

Bước 3: Chọn 10 người đều là nữ có C_{18}^{10} cách

Vậy có $C_{29}^{10} - C_{11}^{10} - C_{18}^{10} = 19986241$ cách chọn.

b. Do Tuấn luôn có mặt trong tổ nên chỉ chọn thêm 12 người trong 28 người còn lại. Có C_{28}^{1} cách chọn 1 tổ trưởng và C_{27}^{11} cách chọn 11 thành viên còn lại.

Vậy có $C_{28}^{1}.C_{26}^{11} = 216332480$ cách chọn.

Bài 2. Một trường trung học có 7 thầy dạy Toán, 6 thầy dạy Lý và 4 thầy dạy Hóa. Chọn từ đó ra một đội có 5 thầy dự đại hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để có đủ 3 bộ môn?

Giải

Chọn 1 thầy dạy Toán, 1 thầy dạy Lý, 3 thầy dạy Hóa có $C_3^1C_5^1C_8^2$ cách

Chọn 1 thầy dạy Toán, 2 thầy dạy Lý, 2 thầy dạy Hóa có $C_7^1C_6^2C_4^2$ cách

Chọn 1 thầy dạy Toán, 3 thầy dạy Lý, 1 thầy dạy Hóa có $C_7^1C_6^3C_4^1$ cách

Chọn 2 thầy dạy Toán, 1 thầy dạy Lý, 2 thầy dạy Hóa có $C_7^2C_6^1C_4^2$ cách

Chọn 2 thầy dạy Toán, 2 thầy dạy Lý, 1 thầy dạy Hóa có $C_7^2C_6^2C_4^1$ cách

Chọn 3 thầy dạy Toán, 1 thầy dạy Lý, 1 thầy dạy Hóa có $C_7^3C_6^1C_4^1$ cách

Vậy có tất cả: $C_7^1C_6^1C_4^3 + C_7^1C_6^2C_4^2 + C_7^1C_6^3C_4^1 + C_7^2C_6^1C_4^2 + C_7^2C_6^2C_4^1 + C_7^3C_6^1C_4^1$

$= 168 + 630 + 560 + 756 + 1260 + 840 = 4214$ cách chọn.

Số cách chọn 5 thầy bất kì trong 17 thầy là: C_{17}^5

Số cách chọn 5 trong 13 thầy dạy Toán và Lý là: C_{13}^5

Số cách chọn 5 trong 11 thầy dạy Toán và Hóa là: C_{11}^5

Số cách chọn 5 trong 10 thầy dạy Lý và Hóa là: C_{10}^5

Vậy số cách chọn có đủ cả 3 bộ môn là: $C_{17}^5 - C_{13}^5 - C_{11}^5 - C_{10}^5 = 4187$ cách

$6188 - 1287 - 462 - 252$

Bài 3. Lớp 12A của Tiến có 30 học sinh.

a. Hãy chọn trong lớp Tiến một tổ trực nhật có 11 người, trong đó có 1 tổ trưởng và còn lại các thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu Tiến luôn có mặt trong tổ?

b. Hãy chọn trong lớp Tiến một đội văn nghệ có 8 người, trong đó có 1 đội trưởng, 1 thư ký và các thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu Tiến luôn có mặt trong đội?

Giải

a. Khi Tiến luôn có mặt trong tổ thì Tiến có thể là tổ trưởng hoặc thành viên. Xét 2 trường hợp sau:

TH1: Nếu Tiến là tổ trưởng thì có C_{29}^{10} cách chọn 10 thành viên còn lại

TH2: Nếu Tiến là thành viên thì có C_{29}^1 cách chọn tổ trưởng và có C_{28}^9 cách chọn 9 thành viên còn lại suy ra có $C_{29}^1.C_{28}^9$ cách chọn

Vậy có tất cả: $C_{29}^{10} + C_{29}^1.C_{28}^9 = 20030010+200300100=220330110$ cách chọn.

Chú ý: *Có C_{29}^{10} cách chọn 10 thành viên còn lại để có tổ trực nhật 11 người trong đó có Tiến. Có 11 cách chọn 1 trong số đó làm tổ trưởng do đó số cách chọn là: $11.C_{29}^{10} = 220330110$ cách.*

b. Có C_{29}^7 cách chọn 7 thành viên còn lại để được đội văn nghệ 8 người trong đó có Tiến. Có 8 cách chọn đội trưởng và ứng với mỗi cách lại có 7 cách chọn thư kí. Vậy tổng số cách chọn là: $56.C_{29}^7 = 87403680$

C. Dạng 3. BÀI TOÁN SẮP XẾP VẬT

Bài 1. Có bao nhiêu cách xếp 15 viên bi vào 3 hộp đựng bi?

Giải

Với mỗi viên bi ta có 3 cách chọn hộp nên có 3^{15} cách xếp 15 viên bi vào hộp.

Bài 2. Tại cuộc thi "Theo dòng lịch sử", BTC sử dụng 7 thẻ vàng và 7 thẻ đỏ, đánh dấu mỗi loại theo các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có bao cách xếp tất cả các thẻ này thành một hàng sao cho hai thẻ cùng màu không nằm liền nhau?

Giải

Nếu các thẻ vàng nằm ở vị trí lẻ thì các thẻ đỏ nằm ở vị trí chẵn, ta có 7!.7! cách xếp khác nhau.

+ Nếu các thẻ vàng nằm ở vị trí chẵn thì các thẻ đỏ nằm ở vị trí lẻ, ta có 7!.7! cách xếp khác nhau.

Vậy có tất cả: 7!.7! + 7!.7! = 50803200 cách.

D. Dạng 4: BÀI TOÁN SẮP XẾP NGƯỜI

Bài 1. Một tổ có 8 học sinh 5 nữ và 3 nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các học sinh trong tổ đứng thành một hàng dọc để vào lớp sao cho: **a.** Các bạn nữ đứng chung với nhau **b.** Nam nữ không đứng chung nhau

Giải

a. Các bạn nữ đứng chung với nhau ta xem như một nhóm đoàn kết nên có 4! cách. Có 5! hoán vị 5 bạn nữ với nhau. Vậy có 5!.4! = 2880 cách.

b. Các bạn nam đứng riêng ta có: 3! cách. Các bạn nữ đứng riêng ta có: 5! cách
Có 2! cách đổi chỗ 2 nhóm nam và nữ nên có tất cả: 2!.5!.3! = 1440 cách.

Bài 2. Đội văn nghệ của trường gồm 10 học trong đó có 3 bạn Lan, Hằng, Nga học cùng một lớp. Hỏi có bao nhiêu cách xếp đội văn nghệ thành một hàng dọc sao cho 3 bạn Lan, Hằng, Nga luôn ở bên cạnh nhau?

Giải

Ba bạn Lan, Hằng, Nga đứng cạnh nhau ta gọi là một nhóm đoàn kết.

+ Nhóm đoàn kết này cùng với 7 học sinh còn lại ta sẽ có 8! cách sắp xếp

+ Mỗi lần đổi chỗ 3 học sinh trong nhóm đoàn kết ta được 3! cách sắp xếp.

Vậy có tất cả: 8!.3!= 241920 cách.

E. Dạng 5: BÀI TOÁN ĐẾM TRONG HÌNH HỌC

Bài 1. Xét các tam giác có 3 đỉnh lấy từ các đỉnh của đa giác đều H có 10 cạnh.

a, Có tất cả bao nhiêu tam giác? Có bao nhiêu tam giác có đúng 2 cạnh của H?

b. Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là của H? Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào của H?

Giải

a. Đa giác có 10 cạnh nên có 10 đỉnh và có $C_{10}^3 = 120$ tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của H. Tam giác có đúng hai cạnh của đa giác là tam giác tạo bởi 3 đỉnh liên tiếp của đa giác. Đó là các tam giác:

$A_1A_2A_3,\ A_2A_3A_4,\ A_3A_4A_5, ..., A_9A_{10}A_1,\ A_{10}A_1A_2$ nên có đúng 10 tam giác.

b. Chọn một cạnh của H và ở hai bên cạnh này ta bỏ đi 2 cạnh tức là bỏ đi 4 đỉnh, còn lại 6 đỉnh. Ứng với một trong 6 đỉnh và cạnh đã chọn ta có một tam giác có đúng một cạnh của H, nên có 6 tam giác ứng với một cạnh đã chọn ban đầu của H. Vậy có 6.10 = 60 tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của H. Từ đó suy ra số các tam giác không chứa cạnh nào của H là: 120 – 10 – 60 = 50 tam giác.

Bài 2. Cho 15 điểm trên mặt phẳng , trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tập hợp các đường thẳng đi qua 2 điểm của 15 điểm đã cho. Số giao điểm khác 15 điểm đã cho do các đường thẳng này tạo thành nhiều nhất là bao nhiêu?

Giải

Cứ 2 điểm có 1 đường thẳng nên số đường thẳng từ 15 điểm là: $C_{15}^2 = 105$

Nếu cứ 2 đường thẳng cho 1 giao điểm thì sẽ có C_{105}^2 giao điểm. Nhưng mỗi điểm đã cho có 14 đường thẳng đi qua nên điểm này phải là giao của C_{14}^2 cặp đường thẳng. Như vậy với 15 điểm đã cho sẽ có $15.C_{14}^2$ giao điểm trong C_{105}^2 giao điểm nói trên. Suy ra số giao điểm cần tìm là: $C_{105}^2 - 15.C_{14}^2 = 4095$

Bài 3. Cho 2 họ đường thẳng cắt nhau: Họ (L_1) gồm 10 đường thẳng song song với nhau; Họ (L_2) gồm 15 đường thẳng song song với nhau. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo bởi (L_1) và (L_2)

Giải

Một hình bình hành được tạo bởi 2 đường thẳng của họ (L_1) và 2 đường thẳng của họ (L_2) nên số hình bình hành được tạo bởi là $C_{10}^2 C_{15}^2 = 45 \times 105 = 4725$

F. Dạng 6. BÀI TOÁN PHÂN CHIA TẬP HỢP

Cho tập A có *n* phần tử khác nhau. Chia tập A thành các tập con $A_1,\ A_2,...,A_k$; trong đó mỗi tập con $A_i\left(i=\overline{1,k}\right)$ có $n_i\left(i=\overline{1,k}\right)$ phần từ. Khi đó việc chọn n_i phần tử trong *n* phần tử là phép chọn và loại trừ dần các phần tử đã được chọn.

Bài 1. Cần phải phát 6 đề thi khác nhau cho 4 em học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề thi nếu mỗi em học sinh đều làm ít nhất 1 bài thi?

Giải

TH1: Mỗi em đều làm một bài thi:

+ Có $C_6^4=15$ cách chọn đề thi.

+ Với 1 cách chọn 4 đề thi phát cho 4 học sinh sẽ có 4! cách phát

Vậy có $4!C_6^4=A_6^4=360$ cách phát đề thi mà mỗi em làm 1 bài.

TH2: Có một em nào đó làm 2 bài thi:

+ Có C_6^2 cách chọn 2 bài thi trong 6 bài thi và có $4.C_6^2$ cách phát 2 bài thi cho 1 trong 4 học sinh.

+ Với 4 bài thi còn lại sẽ có A_4^3 cách chia cho 3 thí sinh.

Vậy có $4.C_6^2.A_4^3=1440$ cách phát đề thi mà trong đó có 1 em làm 2 bài thi.

TH3: Có hai em nào đó làm 2 bài thi:

+ Có C_6^2 cách chọn 2 bài thi trong 6 bài thi và có $4.C_6^2$ cách phát 2 bài thi cho 1 trong 4 học sinh.

+ Có C_4^2 cách chọn 2 bài thi trong 4 bài thi còn lại và có $3.C_4^2$ cách phát 2 bài thi cho 1 trong 3 học sinh còn lại.

+ Với 2 bài thi còn lại sẽ có 2! cách phát cho 2 thí sinh còn lại.

Vậy có $4.C_6^2.3.C_4^2.2!=2160$ cách phát đề thi mà trong đó có 2 em làm 2 bài thi.

TH4: Có một em nào đó làm 3 bài thi:

+ Có C_6^3 cách chọn 3 bài thi trong 6 bài thi và có $4.C_6^3$ cách phát 3 bài thi cho 1 trong 4 học sinh.

+ Với 3 bài thi còn lại sẽ có 3! cách phát cho 3 thí sinh còn lại.

Vậy có $4.C_6^3.3!=480$ cách phát đề thi mà trong đó có 1 em làm 3 bài thi.

Kết luận: Tổng hợp 4 trường hợp đã xét ta có số cách phát đề thi để mỗi em học sinh đều làm ít nhất 1 bài thi là:

$4!C_6^4+4.C_6^2.A_4^3+4.C_6^2.3.C_4^2.2!+4.C_6^3.3!=360+1440+2160+480=4440$ cách

Bài 2. Cho A là tập hợp có 15 phần tử khác nhau.

a. Có bao nhiêu tập hợp con của A?

b. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử là số chẵn?

Giải

a. + Số tập con của A có 0 phần tử (tập rỗng) là: C_{15}^0

+ Số tập con của A có 1 phần tử là C_{15}^1

+ Số tập con của A có 2 phần tử là C_{15}^2

……………………………………………..

+ Số tập con của A có 15 phần tử là C_{15}^{15}

Vậy tổng số tập hợp con của A là: $C_{15}^0+C_{15}^1+C_{15}^2+...+C_{15}^{15}=(1+1)^{15}=2^{15}$

b. Do $C_{15}^0+C_{15}^1+C_{15}^2+C_{15}^3+...+C_{15}^{14}+C_{15}^{15}=C_{15}^0+C_{15}^{14}+C_{15}^2+C_{15}^{12}+...+C_{15}^{14}+C_{15}^0$

nên $2^{15}=2\left(C_{15}^0+C_{15}^2+C_{15}^4+...+C_{15}^{14}\right)$ suy ra $C_{15}^2+C_{15}^4+...+C_{15}^{14}=2^{14}-1$

Vậy số tập hợp con khác rỗng của A có số phần tử chẵn là: $T=2^{14}-1$.

Bài 3. Cho tập hợp A gồm 20 phần tử khác nhau.

Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử là số chẵn?

Giải

Số các tập con không rỗng chứa một số chẵn các phần tử rút ra từ tập hợp 20 phần tử trên là $S=C_{20}^2+C_{20}^4+...+C_{20}^{20}$. Ta tính tổng S theo cách sau đây:

$$C_{20}^0+C_{20}^1+C_{20}^2+...+C_{20}^{20}=(1+1)^{20}=2^{20}\quad(1)$$

$$C_{20}^0-C_{20}^1+C_{20}^2-...+C_{20}^{20}=(1-1)^{20}=0\quad(2)$$

Lấy (1) cộng với (2) vế theo vế ta được: $2C_{20}^0+2C_{20}^2+2C_{20}^4+...+2C_{20}^{20}=2^{20}$

$\Leftrightarrow\ C_{20}^0+C_{20}^2+C_{20}^4+...+C_{20}^{20}=2^{19}\ \Leftrightarrow\ S=C_{20}^2+C_{20}^4+...+C_{20}^{20}=2^{19}-1$

Vậy số các tập con không rỗng chứa một số chẵn các phần tử là $S=2^{19}-1$.