PHẦN I. PHẦN MỞ ĐẦU

Giải phương trình là một trong những vấn đề không thể thiếu trong toán học. Một trong số đó là việc giải phương trình vô tỉ. ***"Phương trình vô tỷ"*** là một dạng toán hay và khó trong chương trình phổ thông, vì đặc tính này mà phương trình vô tỷ thường xuất hiện trong chương trình thi.

Trong phương trình giữa các đại lượng tham gia có mối liên hệ nào đó, có thể đại lượng này biểu diễn thông qua đại lượng kia hoặc ngược lại. Sự biểu diễn đó có thể là không hoàn toàn. Khi đó yêu cầu người giải toán phải có cách nhìn tinh tế để khai thác ẩn dấu bên trong bài toán và từ đó đề ra các phương pháp làm thích hợp. Có rất nhiều phương pháp để giải phương trình thuần tuý và phương trình không mẫu mực, trong khuôn khổ đề tài này tôi đề cập tới **"Phương pháp đặt ẩn phụ".** Có thể ẩn phụ không phải xuất hiện ngay từ đầu mà phải qua một quá trình biến đổi, mới cho ta mối liên hệ để đặt ẩn phụ.

Bởi những lí do trên, tôi bạo dạn chọn **"Sử dụng ẩn phụ để giải một số phương trình vô tỉ"** là vấn đề để nghiên cứu**.**

PHẦN II: NỘI DUNG

1. Một số lý thuyết

1.1. Dấu hiệu để nhận biết các bài toán dùng được ẩn phụ

Chỉ có những bài toán mà các đại lượng tham gia trong bài toán có một mối liên hệ nào đó (được biểu hiện bởi các hệ thức toán học) mà nhờ mối liên hệ này các đại lượng này biểu diễn được qua đại lượng kia (hoàn toàn hoặc không hoàn toàn) nhờ có khả năng dùng được ẩn phụ.

1.2. Về việc tìm điều kiện cho ẩn phụ

Với bài toán mà ẩn phụ xem là ẩn trung gian, tìm ẩn phụ rồi trở về tìm ẩn ban đầu thì có hai phương án tìm điều kiện:

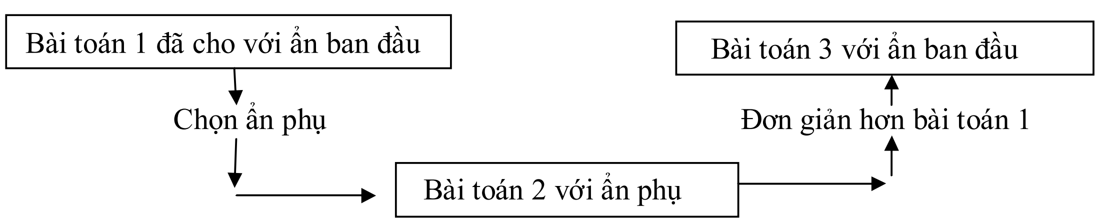
1) Tìm đúng điều kiện cho ẩn phụ.
2) Tìm thừa điều kiện cho ẩn phụ.

1.3. Quy trình của việc giải bài toán bằng cách đặt ẩn phụ

Bước 1: Xuất phát từ bài toán đã cho, chọn các ẩn phụ thích hợp rồi chuyển bài toán đã cho thành bài toán đối với ẩn phụ.

Bước 2: Tìm ẩn phụ rồi trở về tìm ẩn ban đầu.

Sơ đồ của quy trình được mô tả dưới đây:



II. SỬ DỤNG ẨN PHỤ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. Phương pháp dùng ẩn phụ đưa về dạng tích

1.1. Dùng một ẩn phụ

Dạng 1. $F\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)=0$. **Cách giải:** Đặt $t=\sqrt[n]{f(x)}$ (Nếu n chẵn ta phải thêm điều kiện $t\ge 0$)

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36\,(1)$

Lời giải:

Đk: $x\ge -1$. Đặt: $\sqrt{x+1}=t, t\ge 0$. Với điều kiện trên (1) tương đương với :

$(x+1)=t^2 \Leftrightarrow t^2-1=x \Rightarrow x^2=t^4-2t^2+1 \Leftrightarrow x^2=(t-2)^2$

Với $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow x=3$

Dạng 2.: $a\sqrt[n]{f(x)}+b\sqrt[n]{g(x)}=c$. Trong đó: $a,b,c\in R^*$, $\sqrt[n]{f(x)}.\sqrt[n]{g(x)}=k$

Cách giải: Đặt: $\sqrt[n]{f(x)}=t \quad (t\ge 0)\Rightarrow \sqrt[n]{g(x)}=\dfrac{k}{t}$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}-2\sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}}=-1\,(2)$

Lời giải:

Điều kiện: $-1 < x < 2$. Đặt: $\sqrt{\frac{2-x}{1+x}} = t, t \geq 0$. Với điều kiện trên (2) tương đương với :

$t + \frac{2}{t} = -1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2(L) \\ t = 1(N) \end{array}\right.$

+) $t = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2-x}{1+x}} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(tm)$.

Dạng 3. Phương trình dạng: $m\left(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}\right) \pm \sqrt[n]{f(x)g(x)} + n\left(f(x) + g(x)\right) + p = 0$

Cách giải: Đặt $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$. Bình phương hai vế để biểu diễn các đại lượng còn lại qua t.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = m + \sqrt{(3+x)(6-x)}\,(1)$

a/ Giải phương trình khi $m = 3$

b/ Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm

Lời giải:

Đặt: $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} \Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}\,(*)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9$ nên từ $(*)$ ta có $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t - 9 = -2m\,(2)$

a. Với $m = 3$ thì $(2) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1\,(loai) \\ t = 3 \end{array}\right.$

Thay $t = 3$ vào $(*)$ta tìm được $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 6 \end{array}\right.$

b. Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (2)có nghiệm $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$

Xét hàm số: $f(x) = t^2 - 2t - 9$với $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$

Ta thấy $f(t)$ là một hàm đồng biến nên

$-6 = f(3) \leq f(t) \leq f\left(3\sqrt{2}\right) = 9 - 6\sqrt{2}$ với $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$

Suy ra (2)có nghiệm$3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$ khi và chỉ khi:

$\Leftrightarrow -6 \leq -2m \leq 9 - 6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{2}-9}{2} \leq m \leq 3$

Vậy với $\frac{6\sqrt{2}-9}{2} \leq m \leq 3$ thì thoã mãn điều kiện bài toán.

Dạng 4.: Phương trình dạng: $F\left(\sqrt[n]{f(x)}; \sqrt[n]{g(x)}\right) = 0$. $F(t)$là phương trình đẳng cấp bậc k

TH1: Kiểm tra nghiệm với $g(x) = 0$

TH2: Giả sử $g(x) \neq 0$, chia 2 vế cho $g^k(x)$và đặt $t = \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1} = 2\left(x^2+2\right)(1)$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq -1$. Với điều kiện trên phương trình tương đương với:

$(1) \Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} = 2\left(x^2-x+1\right) + 2(x+1) \Leftrightarrow 2\frac{x+1}{x^2-x+1} - 5\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} + 2 = 0$

Đặt: $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}, t\ge 0$. Phương trình trở thành: $2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

+) $t=2$ phương trình vô nghiệm

+) $t=\dfrac{1}{2}$ thì $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Ví dụ 5: Giải và biện luận phương trình: $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$

Lời giải:

Ta thấy $x=-1$ không thoả mãn phương trình

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}\,(1)$

Đặt: $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=t, t\ge 0$. Do đó: $(1)\Leftrightarrow 3t^2-2t+m=0\,(2)$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm không âm

+) Phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu khi $m<0: t=\dfrac{1+\sqrt{1-3m}}{3} \Rightarrow \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{1+\sqrt{1-3m}}{3}$

Hai nghiệm của (2) sẽ là $t=\dfrac{1\pm\sqrt{1-3m}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1}=\left(\frac{1+\sqrt{1-3m}}{3}\right)^4=M_1 \Rightarrow x=\frac{1-M_1}{1+M_1}$$

+) Phương trình (2) có 2 nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ P\ge 0\\ S\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le \dfrac{1}{3}$

Khi $0\le m\le\dfrac{1}{3}: t=\dfrac{1\pm\sqrt{1-3m}}{3} \Rightarrow \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-3m}}{3}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x+1}=\left(\dfrac{1+\sqrt{1-3m}}{3}\right)^4=M_1 \\ \dfrac{x-1}{x+1}=\left(\dfrac{1-\sqrt{1-3m}}{3}\right)^4=M_2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-M_1}{1+M_1} \\ x=\dfrac{1-M_2}{1+M_2}\end{array}\right.$$

Dạng 5: $af(x)g(x)+bg(x)\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}+c=0\,(*)$. **Cách giải:** $t=g(x)\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \Rightarrow t^2=g(x).f(x)$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=-3\,(1)$

Lời giải:

ĐK: $x\in[-1;3)$

Đặt: $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=t \Rightarrow (x-3)(x+1)=t^2 : \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x>3\end{array}\right.(2)$. Với điều kiện trên pt tương đương với:

$(1)\Leftrightarrow t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3\end{array}\right.$

+) $t=-1 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1)=1\end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{5}$

$x=1-\sqrt{5}$ thoã mãn điều kiện $x\le -1$

+) $t=-3 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1)=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{13}$

$x=1-\sqrt{13}$ thoã mãn điều kiện $x\le -1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1-\sqrt{5}$ và $x=1-\sqrt{13}$.

Dạng 6: Phương trình dạng:

$\sqrt{x+a^2-b+2a\sqrt{x-b}}+\sqrt{x+a^2-b-2a\sqrt{x-b}}=cx+m$. Trong đó a,b,c,m là hằng số, $a\neq 0$

Cách giải:

Đặt: $t=\sqrt{x-b}, t\ge 0$. Đưa về phương trình dạng

$|t+a|+|t-a|=c|t^2+b|+m$

Cách 1: Chia các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối

Cách 2: Sử dụng BĐT $|a|+|b|\ge|a+b|$

Dấu "=" xảy ra khi $a,b>0$

Bài tập tương tự: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{(x+1)(2-x)}=1+2x-2x^2$

2) Cho pt: $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}=m$

a/ Giải phương trình khi $m=2$ b/ Tìm các giá trị của m để pt có nghiệm

3) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$ 4) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

5) Tìm m để phương trình sau có nghiệm: (ĐHCĐ KA 2007) $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$

7) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}, x\in R$ 8) $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}, x\in R$

9) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ 10) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=\frac{x+5}{2}$

1.2. Dùng 2 ẩn phụ

Ví dụ 7: Giải phương trình: $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ (1)

Lời giải:

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x+1} \\ v=\sqrt{x^2-x+1} \end{cases}$. $(1)\Leftrightarrow 2(u^2+v^2)=5uv \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v \\ u=\frac{1}{2}v \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=2\sqrt{x^2-x+1} \\ \sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5+\sqrt{37}}{2} \\ x=\frac{5-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$

Bài tập tương tự: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$ 2) $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}=2x-1$ 4) $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$

5) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$ 6) $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

1.3. Dùng 3 ẩn phụ

Ví dụ 8: Giải phương trình: $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x+1}=2$ (1)

Lời giải:

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt[3]{7x+1} \\ b=-\sqrt[3]{x^2-x-8} \\ c=\sqrt[3]{x^2-8x+1} \end{cases}$

Ta có: $a+b+c=2 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 8(*)$

Mặt khác: $a^3+b^3+c^3 = (7x+1)-(x^2-x-8)+(x^2-8x-1) = 8(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(a+c) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ a=-c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \\ -\sqrt[3]{x^2-x-8} = -\sqrt[3]{x^2-8x+1} \\ \sqrt[3]{7x+1} = -\sqrt[3]{x^2-8x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=9 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{0;-1;1;9\}$.

Bài tập tương tự: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x+1} = 2$ 2) $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0$

3) $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0$

2. Phương pháp lượng giác hoá

Bước 1: Lượng giác hóa phương trình theo một số dấu hiệu chủ yếu sau

- Nếu $|x| \le a$ thì đặt: $x = a\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = a\cos t, t\in[0;\pi]$

- Nếu $|x| \ge a$ thì đặt: $x = \frac{a}{\sin t}, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], t\ne 0$ hoặc $x=\frac{a}{\cos t}, t\in[0;\pi], t\ne\frac{\pi}{2}$

- Ta có thể đặt: $x = a\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Bước 2: Thực hiện giải phương trình lượng giác

Ví dụ 1: Giải phương trình: $1+\sqrt{1-x^2} = 2x^2$

Lời giải:

Đk: $|x|\le 1$. Đặt: $x=\cos t, t\in[0;\pi]$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $1+\sqrt{1-\cos^2 t} = 2\cos^2 t$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \cos t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nhận xét: Nếu bài toán có TXĐ: $|u(x)| \le a$ ta có thể nghĩ đến cách đặt

$u(x) = a\cos t, t\in[0;\pi]$. Nếu $u(x)\in(0;a)$ ta có thể đặt $u(x) = a\sin^2 t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1-2x^2 \ (1)$

Lời giải:

Đk: $|x|\le 1$. Đặt: $x=\cos t, t\in[0;\pi]$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{1+2\sin t\cos t} = \sqrt{2}(1-2\cos^2 t)$

$$\Leftrightarrow |\sin t + \cos t| = -\sqrt{2}\cos 2t \Leftrightarrow \left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right| = -\cos 2t \ (2)$$

TH1: $\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le t-\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{3\pi}{4}$

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi-2t) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{5\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3} \\ t=\frac{3\pi}{4}-k2\pi \end{array}\right.$

Ta thấy: $t=\frac{5\pi}{12}, t=\frac{3\pi}{4}$ thỏa mãn và ta thu được hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x=\cos\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

TH2: $\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)<0\Rightarrow-\frac{3\pi}{4}\le t\le\pi\ (3)$. Khi đó: $(2)\Leftrightarrow-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos 2t$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ t=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$ không thõa mãn(3)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $x=\left\{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

<u>Ví dụ 3</u>: Giải phương trình: $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}\ (1)$

<u>Lời giải</u>:

Điều kiện: $x>1$. Đặt: $x=\frac{1}{\cos t}, t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)(*)$

$$(3)\Leftrightarrow\frac{1}{\cos t}+\frac{\frac{1}{\cos t}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin t+\cos t=2\sqrt{2}\sin t\cos t\ (2)$$

Đặt: $\sin t+\cos t=u, 1\le u\le 2$

Khi đó: $(2)\Leftrightarrow u=\sqrt{2}\left(u^2-1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=\sqrt{2} \\ u=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.\Leftrightarrow u=\sqrt{2}$

Ta có: $\sin t+\cos t=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}+k2\pi$

Đối chiếu điều kiện $(*)\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\sqrt{2}$.

<u>Bài tập tương tự</u>: Giải các phương trình sau:

1) $x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=1$

2) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2\sqrt{2}-\sqrt{2-2x^2}$

3) $\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

4) $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2-2x^2}$

5) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

6) $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$

3. Phương pháp dùng ẩn phụ không triệt để

***<u>Phương pháp</u>*:** Có thể đưa phương trình về dạng sau: $\sqrt{f(x)}.Q(x)=f(x)+P(x).x\ (1)$

Khi đó ta đặt: $\sqrt{f(x)}=u, u\ge 0$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow u^2-u.Q(x)+P(x)=0$

Giải t theo x. Sau đó là giải quyết phương trình: $\sqrt{f(x)}=u$ để tìm nghiệm.

<u>Ví dụ 1</u>: Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

<u>Lời giải</u>:

Đặt $u=\sqrt{x^2+1}$ là để xuất hiện $u^2 = x^2 + 1$

Phương trình đã cho biến đổi về dạng:

$(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2(x^2+1)+2x-1 \Leftrightarrow (4x-1)u=2u^2+2u-1=0$

$\Leftrightarrow 2u^2-(4x-1)u+2x-1=0. \Delta=(4x-1)^2-8(2x-1)=(4x-3)^2$

Phương trình đối với u có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} u=\dfrac{4x-1+(4x-3)}{4} \\ u=\dfrac{4x-1-(4x-3)}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2x-1 \\ u=\dfrac{1}{2}(loai)\end{array}\right.$

Trở về tìm x, ta giải phương trình:

$\sqrt{x^2+1}=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1\ge 0 \\ x^2+1=(2x-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 3x^2-4x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}.$

<u>Ví dụ 2</u>: Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$ (2)

<u>Lời giải</u>:

Điều kiện: $|x|\le 2$. Đặt $u=\sqrt{2(4-x^2)}, u\ge 0$

$(2) \Leftrightarrow 4(2x+4)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16(2-x)=9x^2+16 \Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x$

$\Leftrightarrow 4u^2+16u-x^2-8x=0$. Ta được, $u_1=\dfrac{x}{2}, u_2=-\dfrac{x}{2}-4(loai)$

Với $u=\dfrac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{2(4-x^2)}=\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ 8(4-x^2)=x^2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}.$

<u>Ví dụ 3</u>: Giải phương trình: $1+x-2x^2=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}$ (4)

<u>Lời giải</u>:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 4x^2-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x\ge \dfrac{1}{2} \vee x\le -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2} \vee x\ge \dfrac{1}{2}$

+) $x=-\dfrac{1}{2}$, pt (3) $\Leftrightarrow 0 = 0$, đúng. Vậy $x=-\dfrac{1}{2}$ là nghiêm của (4)

+) $x\ge \dfrac{1}{2}$, khi đó: (4) $\Leftrightarrow 2x+1-x(2x+1)=\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+1}$

Đặt: $u=\sqrt{2x+1} \Rightarrow u\ge \sqrt{2}$. Phương trình ẩn u có dạng:

$(1-x)u^2=(\sqrt{2x-1}-1)u \Leftrightarrow (1-x)u=\sqrt{2x-1}-1 (3')$

+) x = 1, $(3') \Leftrightarrow 0=0$, đúng. x = 1 là nghiệm của (3).

+) $x\ne \dfrac{1}{2}$ ta có: $(3') \Leftrightarrow u=-\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$

Trở về tìm x, ta có:

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=-\dfrac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=-\dfrac{2}{(\sqrt{2x-1}+1)}$

Vô nghiệm, vì vt > 0, vp < 0

Vậy phương trình (4) có 2 nghiệm $x=-\dfrac{1}{2}, x=1$.

<u>Bài tập tương tự</u>: Giải các phương trình sau:

1) $2(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$

2) $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}=6x$

5) $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

7) $4\sqrt{1+x}-1=3x+2\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x^2}$

3) $3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

8) $2008x^2-4x+3=2007x\sqrt{4x-3}$

4) $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x-1$

9) $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

4. Phương pháp dùng ẩn phụ đưa về hệ phương trình

4.1. Dùng một ẩn phụ

Dạng: F(x) = 0. Biến đổi phương trình về dạng: $F\left(x,\Phi(x)\right)=0$.

Đặt $u=\Phi(x)$ và hệ thu được có dạng: $\begin{cases} u=\Phi(x) \\ f(x,u)=0 \end{cases}$

__Ví dụ 1__: Giải phương trình: $x^3-3\sqrt[3]{3x+2}=2$ (1)

__Lời giải:__

Đặt $u=\sqrt[3]{3x+2}\Rightarrow u^3=3x+2$. Từ phương trình ta thu được $x^3=3u+2$

Như vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3=3u+2 \\ u^3=3x+2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^3=3u+2 \\ x^3-u^3=-3(x-u) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^3=3u+2 \\ (x-u)(x^2+xu+u^2+3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-u=0 \\ x^3=3u+2 \end{cases}\Rightarrow x^3-3x-2=0\Rightarrow x=-1\,,x=2$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-1\,,x=2$.

__Bài tập tương tự :__ Giải các phương trình sau

1) $x=5-\left(5-x^2\right)^2$

3) $\sqrt{\sqrt{2}-1-x}+\sqrt[4]{x}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

4) $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$

5) $x^2+\sqrt{x+5}=5$

6) 4) $x\sqrt[3]{25-x^3}\left(x+\sqrt[3]{25-x^3}\right)=30$

7) $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{8}{3}$

4.2. Dùng hai ẩn phụ

4.2.1. Dùng hai ẩn phụ đưa về hệ không đối xứng

__Ví dụ 2__: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1$ (1)

__Lời giải:__

Điều kiện: $x\ge 0$. Đặt $\begin{cases} v=\sqrt{x} \\ u=\sqrt[3]{x+7} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} v\ge 0 \\ u\ge\sqrt[3]{7} \end{cases}$

Ta thu được $\begin{cases} v^2=x \\ u^3=x+7 \end{cases}\Rightarrow u^3-v^2=7$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ: $\begin{cases} u-v=1 \\ u^3-v^2=7 \end{cases}$

Giải ra ta được: $u=2,v=1$. Từ đó ta suy ra $x=1$ là nghiệm của phương trình.

__Ví dụ 3__: Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

__Lời giải:__

Điều kiện: $\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}\ne 0\Leftrightarrow\forall x\in R$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt[3]{7-x} \\ v=\sqrt[3]{x-5} \end{cases}$ (2). Ta có: $\begin{cases} u^3+v^3=2 \\ \dfrac{u-v}{u+v}=\dfrac{1}{2}\left(u^3-v^3\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (u+v)(u^2-uv+v^2)=2 \\ (u+v)(u^2+uv+v^2)=2 \end{cases}$$

Từ đó ta có:

a) $\begin{cases} u-v=0 \\ u^3+v^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=1 \\ v^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x=1 \\ x-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$

b) $\begin{cases} (u+v)(u^2+v^2+uv)=2 \\ (u+v)(u^2-v^2+uv)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=0 \\ u^3+v^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v^3=2 \end{cases} \Rightarrow x=7 \\ \begin{cases} v=0 \\ u^3=2 \end{cases} \Rightarrow x=5 \end{array} \right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{5;6;7\}$

<u>Tổng quát</u>: Phương trình dạng: $\sqrt[n]{a+f(x)}+\sqrt[m]{b-f(x)}=c\ (*)$

Cách giải: Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[n]{a+f(x)} \\ v=\sqrt[m]{b-f(x)} \end{cases}$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=c \\ u^n+v^m=a+b \end{cases}$

<u>Bài tập tương tự:</u>

Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

2) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

3) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$

4) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}=1$

5) $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$

6) $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x}=1$

4.2.1. Dùng hai ẩn phụ đưa về hệ đối xứng

<u>Ví dụ 4</u>: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6\ (1)$

<u>Lời giải</u>:

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{x-9} \\ v=x-3 \end{cases}$. Khi đó ta thu được hệ: $\begin{cases} u=v^3+6 \\ v=u^3+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v^3+6 \\ u-v=v^3-u^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=v^3+6 \\ (u-v)(u^2+v^2+uv+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v^3+6 \\ u-v=0 \end{cases}$

$(u^2+v^2+uv+1=\left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}v^2+1>0, \forall u,v)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^3-u+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=-2 \Leftrightarrow x=1$

<u>Ví dụ 5:</u> Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^2+6$ (5)

<u>Lời giải:</u>

Đặt $u=\sqrt[3]{x-9}; v=x-3$. Suy ra $u^3=x-9=x-3-6 \Rightarrow u^3+6=v$.

Từ phương trình (5) ta thu được: $v^3+6=u$

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} v^3+6=u \\ u^3+6=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-2 \\ v=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

<u>Bài tập tương tự:</u> *Giải các phương trình sau*

1) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

2) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

3) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$

4) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}=1$

5) $\sqrt{2x+\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{2x-\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}+1$

6) $\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{(3x-1)^2}+\sqrt[3]{9x^2-1}=1$

7) $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$

4.3. Dùng nhiều hơn hai ẩn phụ

Ví dụ 6: Giải phương trình: $x=\sqrt{2-x}\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}\sqrt{5-x}=\sqrt{30}$

Lời giải:

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{2-x} \\ v=\sqrt{3-x} \\ t=\sqrt{5-x} \end{cases}$, $\quad u,v,t\ge 0 \Rightarrow x=2-u^2=3-v^2=5-t^2=uv+vt+ut$

Ta có hệ: $\begin{cases} (u+v)(v+t)=2 \\ (v+u)(u+t)=3 \\ (t+u)(t+v)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{30}}{60} \\ v=\dfrac{11\sqrt{30}}{60} \\ t=\dfrac{19\sqrt{30}}{60} \end{cases} \Rightarrow x=2-\left(\dfrac{\sqrt{30}}{60}\right)^2=\dfrac{239}{120}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{239}{120}$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2-1\ge 0 \\ x^2-3x-2\ge 0 \end{cases}$ (*) . Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{2x^2-1}\ge 0 \\ v=\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0 \\ z=\sqrt{2x^2+2x+3}>0 \\ t=\sqrt{x^2-x+2}>0 \end{cases}$

Từ phương trình đã cho, ta thu được hệ:

$\begin{cases} u+v=z+t \\ u^2-v^2=z^2-t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=z+t \\ u-v=z-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=z \\ v=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2=z^2 \\ v^2=t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1=2x^2+2x+3 \\ x^2-3x-2=x^2-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x=-2$ thoả mãn.

Bài tập tương tự: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{3x-2}$ 2) $x-\sqrt{2x-1}\sqrt{3-2x}=\sqrt{3-2x}\sqrt{5-2x}+\sqrt{2x-1}\sqrt{5-2x}$

Tôi hi vọng bài viết này có thể giúp đồng nghiệp, học sinh một phần nhỏ khi gặp phải những phương trình vô tỉ hóc búa, những phương trình vô tỉ không mẫu mực. Trong quá trình viết dù đã rất cố gắng cũng không thể tránh khỏi những sai sót. Rất mong được sự góp ý, trao đổi của các bậc thầy cô và các bạn để được hoàn thiện hơn. Tôi xin trân trọng cảm ơn./.