www.laisac.page.tl

Chuyên Đề:

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

TS. Lê Thống Nhất

A. MỘT SỐ BÍ QUYẾT TÌM NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Rất nhiều bạn khá khó khăn khi tìm nguyên hàm và tích phân mà nguyên nhân chính là thường không biết sử dụng phép biến đổi vi phân. Các bạn hãy đọc bài viết này và tự rèn luyện theo hướng dẫn, chắc chắn các bạn sẽ thấy: tìm nguyên hàm và tích phân thật là không đáng ngại.

Định nghĩa: Vi phân của hàm số y = f(x) là biểu thức f'(x). d(x). Nếu ký hiệu dy hay d[f(x)] là vi phân của y hay f(x) thì dy = f'(x) .dx hay d[f(x)] = f'(x) . dx.

Chú ý: Nhiều bạn hiểu sai là: để tính vi phân f(x), ta tính f'(x) và viết thêm dx, sẽ có f'(x) dx. Thực ra không phải là "viết thêm" mà là "nhân với", nghĩa là f'(x) nhân với d(x), viết f'(x) . dx.

Các vi phân cơ bản:

1) $d\left(u^{\alpha+1}\right)=\left(\alpha+1\right).u^{\alpha}.du$ 2) d (sin u) = cos u . du

3) d (cos u) = - sin u du 4) d (tg u) = $\dfrac{du}{\cos^2 u}$

5) d (cotg u) = $-\dfrac{du}{\sin^2 u}$ 6) d (e^u) = e^u . du

7) d (ln$|u|$) = $\dfrac{du}{u}$; d(ln u) = $\dfrac{du}{u}$. 8) $d\left(\alpha u+\beta v\right)=\alpha du+\beta dv$

9) d (u + c) = du với c là hằng số.

Các phép biến đổi vi phân cơ bản:

1) $u^{\alpha}.du=d\left(\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)$ 2) cos u .du = d(sin u)

3) sin u . du = d (-cos u) 4) $\dfrac{du}{\cos^2 u}=d(tgu)$

5) $\dfrac{du}{\sin^2 u}=d(-cotgu)$ 6) e^u .du = d(e^u)

7) $\dfrac{du}{u}=d(\ln|u|)$

Các thí dụ luyện phép biến đổi vi phân.

Thí dụ 1: Biểu thức sau là vi phân của hàm số nào?

1. $\sqrt{x}\,dx$ 2. $(x + 2)^5 \,.\, dx$ 3. $\cos x \,.\, \sin^4 x \,.\, dx$

Giải:

1. $\sqrt{x}\,dx = x^{\frac{1}{2}}.dx = d\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) = d\left(\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right) = d\left(\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C\right)$

2. $(x + 2)^5 \,.\, dx = (x + 2)^5 \,.d(x+2) = d\left[\dfrac{(x+2)^6}{6}\right] = d\left[\dfrac{(x+2)^6}{6} + C\right]$

3. $\cos x \,.\, \sin^4 x \,.\, dx = \sin^4 x \,.\, d(\sin x) = d\left[\dfrac{\sin^5 x}{5}\right] = d\left[\dfrac{\sin^5 x}{5} + C\right]$

Thí dụ 2: Biểu thức sau là vi phân của hàm số nào?

1. $\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right).dx$ 2. $(2x + 1)(x^2 + x + 1) \,.\, dx$

3. $\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\right).dx$ 4. $\dfrac{x\,dx}{x^2+1}$

Giải:

1. $\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right).dx = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).dx = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right).dx$

$$= x^{\frac{1}{2}}dx + x^{-\frac{1}{2}}.dx = d\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + d\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= d\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + C\right)$$

2. $(2x + 1)(x^2 + x + 1) \,.\, dx = (x^2 + x + 1).d\,(x^2 + x + 1)$

$$= d\left[\frac{(x^2+x+1)^2}{2}\right]$$

$$= d\left[\frac{(x^2+x+1)^2}{2} + C\right]$$

Lưu ý: $d\,(x^2 + x + 1) = (2x + 1) \,.\, dx$

3. $\frac{x.dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}d\left[\ln(x^2+1)\right] = d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C\right]$

Lưu ý: $d(x^2 + 1) = 2x \,.\, dx$ hay $x \,.\, dx = \frac{1}{2}d(x^2 + 1)$

Thí dụ 3: Biểu thức sau là vi phân của hàm số nào?

1. $\frac{x.dx}{(x+1)^3}$ 2. $\frac{dx}{x^2-3x+2}$ 3. $\frac{dx}{x.\ln x}$

Giải:

1. $\frac{x.dx}{(x+1)^3} = \frac{\left(x+1-1\right)d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^3}$

$= (x + 1)^{-2} \,.\, d(x + 1) - (x + 1)^{-3} \,.\, d(x + 1)$

$= d\left[\frac{\left(x+1\right)^{-1}}{-1}\right] - d\left[\frac{\left(x+1\right)^{-2}}{-2}\right]$

$= d\left[\frac{1}{2\left(x+1\right)^2} - \frac{1}{x+1} + C\right]$

2. $\frac{dx}{x^2-3x+2} = \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx$

$= \frac{dx}{x-2} - \frac{dx}{x-1}$

$= \frac{2(x-2)}{x-2} - \frac{2(x-1)}{x-1}$

$= d\left[\ln|x-2| - \ln|x-1|\right]$

$= d\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C\right]$

3. $\frac{dx}{x.\ln x} = \frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x} = d\left[\ln(\ln x) + C\right]$

Thí dụ 4: Biểu thức sau là vi phân của hàm số nào?

1. $\cos x \,.\, \cos 3x \,.\, dx$ 2. $\sin^5 x \,.dx$

Giải:

1. $\cos x \,.\, \cos 3x \,.\, dx = \frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 2x\right).dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 4x.dx + \cos 2x.dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos 4x.d(4x) + \frac{1}{2}\cos 2x.d(2x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(\sin 4x) + \frac{1}{2}d(\sin 2x)\right]$$

$$= d\left[\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right]$$

Lưu ý: Các công thức biến đổi tích thành tổng khi gặp tích các hàm số lượng giác.

2. $\sin^5 x \,.\, dx = \sin^4 x \,.\, \sin x \,.\, dx = -\sin^4 x \,.\, d(\cos x)$

$$= -(1 - \cos^2 x)^2 \,.\, d(\cos x)$$

$$= [\,-1 + 2\cos^2 x - \cos^4 x\,]\,.d(\cos x)$$

$$= -d\,(\cos x) + 2\cos^2 x\,.d(\cos x) - \cos^4 x\,.\,d(\cos x)$$

$$= d\left[-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C\right]$$

Thí dụ dưới đây sẽ sử dụng nhiều sau này:

Thí dụ 5: Tính.

1. $d\left[\ln\left|\sqrt{x^2+k}\right| + x\right]$

2. $d\left[\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|\right]$

Giải:

1. $$d\left[\ln\left|\sqrt{x^2+k}\right| + x\right] = \frac{d\left(\sqrt{x^2+k}+x\right)}{\sqrt{x^2+k}+x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+k}+x}.\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}+1\right].dx$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$$

Lưu ý: $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = d\left[\ln|\sqrt{x^2+k}+x|\right]$

2. $$d\left[\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|\right] = \frac{d\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)}{\dfrac{x-a}{x-b}} = \frac{x-b}{x-a}.\frac{a-b}{(x-b)^2}.dx = \frac{(a-b).dx}{(x-a)(x-b)}$$

Lưu ý: Nếu $a \neq b$ thì $\dfrac{dx}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{1}{a-b} d\left[\ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|\right]$

Thí dụ 6: Biểu thức sau đây là vi phân của hàm số nào?

1. $\dfrac{dx}{x^2-2x-3}$

2. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Giải.

1. $$\frac{dx}{x^2-2x-3} = \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right).dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{d(x-3)}{x-3} - \frac{2(x+1)}{x+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4} d\left[\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\right]$$

$$= d\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C\right]$$

2. $$\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}}$$

$$= \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+1)^2+2}}$$

$$= d\left[\ln\left|\sqrt{(x+1)^2+2} + (x+1)\right| + C\right]$$

Bài tập tự luyện.

Biểu thức sau đây là vi phân của hàm số nào?

1. $(2x + 1)(x^2 + x + 5)^7\, dx$ 2. $\sin x \,.\, \cos^7 x \,.\, dx$ 3. $\dfrac{\ln x.dx}{x}$

4. $\sin^3 x \,.\, \cos^2 x \,.\, dx$ 5. $tgx \,.\, dx$ 6. $tg^2 x \,.\, dx$

7. $tg^3 x \,.\, dx$ 8. $\sin^2 x \,.\, dx$ 9. $\cos^3 x \,.\, dx$

10. $\left(\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\right).dx$ 11. $\dfrac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}}$ 12. $\dfrac{x^2.dx}{\left(x^3+1\right)^2}$

13. $\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ 14. $\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$ 15. $\frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}$

16. $\frac{dx}{x^2-4}$ 17. $\frac{dx}{\sin 2x}$ 18. $\frac{dx}{\sin x}$

19. $\frac{dx}{\sin x+\cos x}$ 20. $(1 + tgx).\frac{dx}{\cos^2 x}$ 21. $\frac{dx}{\cos^4 x}$

22. $\frac{dx}{\sin^4 x}$ 23. $\frac{e^x.dx}{e^x+1}$ 24. $\frac{e^x.dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ 25. $\frac{x^3.dx}{x^4+1}$

B.TÌM NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ

Các bạn xem định nghĩa, các tính chất của nguyên hàm và bảng các nguyên hàm cơ bản trong SGK. Ở đây chỉ tổng kết các phương pháp tìm nguyên hàm của một hàm số.

1. Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản

Nếu $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ là các hàm có nguyên hàm cơ bản thì

$f(x)=\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+...+\alpha_n f_n(x)$ có nguyên hàm tìm được nhờ tính chất :

$$\int f(x)dx=\alpha_1\int f_1(x)dx+\alpha_2\int f_2(x)dx+...+\alpha_n\int f_n(x)dx.$$

Khi sử dụng tính chất này cần lưu ý cách viết : $\frac{1}{a^\alpha}=a^{-\alpha}$; $\sqrt[k]{a}=a^{\frac{1}{k}}$

Thí dụ 1 : Tìm các nguyên hàm

1. $\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$; 2. $\int\sqrt[3]{x}(x+1)^2dx$

Giải :

1. $\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}2x^{\frac{1}{2}}+C$

2. $\int\sqrt[3]{x}(x+1)^2=\int x^{\frac{1}{3}}(x^2+2x+1)dx=\int\left(x^{\frac{7}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)dx=\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

2.Sử dụng vi phân để tìm nguyên hàm

Bảng nguyên hàm cơ bản vẫn đúng nếu thay ký hiệu đối số x, bởi bất cứ ký hiệu nào khác. Kết hợp với phép tính vi phân, các bạn có thể tìm được nguyên hàm của các lớp hàm phong phú hơn.

Thí dụ 2 : Tìm nguyên hàm : $\int\frac{x^2dx}{x^2-1}$.

Giải : $\int\frac{x^2dx}{x^2-1}=\int\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx=\int\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\right]dx=x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

Chú ý : $\int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\right]dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}d(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}d(x+1)$

$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

Thí dụ 3 : Tìm nguyên hàm :

1. $\int \frac{x^2dx}{x^6-1}$; 2. $\int x(x+2)^{10}dx$

Giải :

1. $\int \frac{x^2dx}{x^6-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2-1} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^3-1} - \frac{1}{x^3+1}\right)d(x^3) = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + C$

2. $\int x(x+2)^{10}dx = \int [(x+2)-2](x+2)^{10}.d(x+2) =$

$= \int [(x+2)^{11} - 2(x+2)^{10}]d(x+2) = \frac{1}{12}(x+2)^{12} - \frac{2}{11}(x+2)^{11} + C$

Thí dụ 4 : Tìm nguyên hàm

1. $\int \frac{\sin 2xdx}{1+\cos^2 x}$; 2. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$

Giải :

1. $\int \frac{\sin 2xdx}{1+\cos^2 x} = -\int \frac{d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} = -\ln(1+\cos^2 x) + C$

2. $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{tgx.\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(tgx)}{tgx} = \frac{1}{2}\ln|tgx| + C$

Thí dụ 5 : Tìm nguyên hàm $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1}$.

Giải : $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1} = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}$.

Đặt $u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$ và $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$. Do đó :

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1} = \int \frac{du}{u^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

3. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Các bạn sử dụng công thức $\int udv = uv - \int vdu$. Như vậy để tìm $\int f(x)dx$ thì phải nhìn f(x)dx là udv. Giả sử f(x)dx = $f_1(x).f_2(x)dx$ với $f_1(x)$ là đa thức thì việc lựa chọn u, dv, hoàn toàn phụ thuộc vào $f_2(x)$. Nếu $f_2(x)$ là các hàm lượng giác ngược, hàm logarit, hàm vô tỉ thì đặt $u = f_2(x)$. Nếu $f_2(x)$ là các hàm lượng giác, hàm mũ thì đặt u = $f_1(x)$. Tuy nhiên, đó chỉ là gợi ý chính, trong từng bài cụ thể và những tình huống phức tạp hơn các bạn phải thử vận dụng theo nhiều cách để chọn cách thích hợp.

Thí dụ 6 : Tìm nguyên hàm :

1. $\int \sqrt{x^2-1}dx$ 2. $\int x(\ln x)^2 dx$

Giải :

1. Đặt $u=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$; $dv = dx \Leftarrow v = x$ (chú ý chiều mũi tên này, hiện nay đang bị viết ngược rất nhiều !). Ta có :

$$I=\int\sqrt{x^2-1}dx = x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}} = x\sqrt{x^2-1}-\int\sqrt{x^2-1}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Lưu ý : $d\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)dx \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{d(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$, ta có

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{d(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|+C$$

2. Đặt $u=(\ln x)^2 \Rightarrow du=\dfrac{2\ln xdx}{x}$; $dv = xdx \Leftarrow v=\dfrac{1}{2}x^2$. Khi đó :

$$I=\int x(\ln x)^2dx=\frac{1}{2}(x\ln x)^2-\int x\ln xdx.$$

Lại đặt $u = \ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}$; $dv = xdx \Leftarrow v=\dfrac{1}{2}x^2$, ta có :

$$\int x\ln xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

Vậy $I=\dfrac{1}{2}(x\ln x)^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln x+\dfrac{1}{4}x^2-C$.

Bài tập tương tự

Tìm các nguyên hàm của các hàm số :

1. $f(x)=\dfrac{x^5}{x^6+1}$;

2. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4-2x^3-x^2+2x+1}$;

3. $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{a\sin^2 x-b\cos^2 x}$

4. $f(x) = \sin(\sqrt{x})$;

5. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4x+3}$.

6. $f(x)=\dfrac{x^{1999}}{x^{2000}-2x^{1000}-3}$;

7. $f(x)=\dfrac{1}{\cos^4 x}$.

C.CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Các bạn cần nắm chắc các phương pháp được trình bày dưới đây.

1. Sử dụng định nghĩa (định lý Newton - Leibnitz)

• *Định lý :* Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a ; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

• *Chú ý :* Giả thiết y = f(x) liên tục trên [a ; b] là điều kiện bắt buộc phải có để được sử dụng định lý. Nhiều bạn cứ tưởng có được F(x) là tính được tích phân. Chẳng hạn, có bạn viết :

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = -1 \ (?)$$

Lưu ý : $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ không xác định tại $x = \frac{\pi}{2} \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ *nên I không tồn tại.*

Thí dụ 1 : Tính $I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$ *(Đề ĐH Ngoại ngữ HN - 1999)*

Giải :

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{7}{3}} \frac{[(3x+1)+2]dx}{\sqrt[3]{3x+1}} = \frac{1}{9}\int_0^{\frac{7}{3}} [(3x+1)^{\frac{2}{3}} + 2(3x+1)^{-\frac{1}{3}}]d(3x+1)$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{3}{5}(3x+1)^{\frac{5}{3}} + 3(3x+1)^{\frac{2}{3}}\right]\Bigg|_0^{\frac{7}{3}} = \frac{46}{15}$$

Thí dụ 2 : Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3x+2)^2}$ *(Đề ĐH Ngoại thương HN - 1999)*

Giải :

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right]dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2} - 2\int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right]dx$$

$$= \left[-(x+1)^{-1} - (x+2)^{-1} - 2\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} + 2\ln\frac{3}{4}.$$

Chú ý : Khi gặp các hàm số có chứa dấu trị tuyệt đối thì cần tách cận tích phân để khử dấu trị tuyệt đối.

Thí dụ 3 : Tính $I = \int_{-1}^3 x\left|x^2 - 2x\right|.dx$

Giải : $I = \int_{-1}^3 x\left|x^2-2x\right|.dx = \int_{-1}^0 x\left|x^2-2x\right|.dx + \int_0^2 x\left|x^2-2x\right|.dx + \int_2^3 x\left|x^2-2x\right|.dx$

$$= \int_{-1}^0 x\left(x^2-2x\right).dx + \int_0^2 x\left(-x^2+2x\right).dx + \int_2^3 x\left(x^2-2x\right).dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = 4$$

2. Phương pháp biến đổi số :

Nếu t = u(x) đơn điệu trên [a ; b] thì $\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

Thí dụ 4 : Tính $I = \int_{\sqrt{7}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ *(Đề Học viện KTQS - 1999)*

Giải : Đặt $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$.

Đổi cận : $x = \sqrt{7} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{7}}$; $x = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$.

Do đó :

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{1}{4}} \frac{-dt}{\sqrt{9t^2+1}} = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{d(3t)}{\sqrt{(3t)^2+1}} = \frac{1}{3}\ln\left[\sqrt{(3t)^2+1}+3t\right]\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}} = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$$

Thí dụ 5 : Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 dx}{1+2^x}$ *(Đề Học viện BCVT - 1999)*

Giải : Đặt t = –x ⇔ x = –t ⇒ dx = –dt.
Đổi cận : x = –1 ⇒ t = 1 ; x = 1 ⇒ t = –1 ta có :

$$I = \int_1^{-1} \frac{(-t)^4.(-dt)}{1+2^4} = \int_{-1}^{1} \frac{2^t.t^4dt}{1+2^t} = \int_{-1}^{1} t^4dt - \int_{-1}^{1} \frac{t^4dt}{1+2^t} = \frac{1}{5}t^5\Big|_{-1}^{1} - I = \frac{2}{5} - I \Rightarrow I = \frac{1}{5}.$$

Chú ý : - Để tính $\int_a^b f(x)dx$ không nhất thiết phải tìm nguyên hàm F(x) của f(x).

- Cách tích phân dạng $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(x)dx}{a^x+1}$ với a > 0 và g(x) là hàm số chẵn, đều làm như trên.

Thí dụ 6 : Tính $\int_{-1}^{1} \ln\frac{2-x}{2+x}dx$

Giải : Đặt t = - x thì dx = - dt. Với x = -1 thì t = 1, với x = 1 thì t = -1.Do đó :

$$I = \int_{-1}^{1} \ln\frac{2-x}{2+x}dx = \int_{1}^{-1} \ln\frac{2+t}{2-t}(-dt) = \int_{-1}^{1} \ln\frac{2+t}{2-t}dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \ln\left(\frac{2-t}{2+t}\right)^{-1} dt = -\int_{-1}^{1} \ln\left(\frac{2-t}{2+t}\right)dt = -I.$$

Suy ra : I = 0.
Chú ý : + Tích phân trên một miền đối xứng của một hàm số lẻ luôn bằng 0.
+ Tích phân không phụ thuộc ký hiệu đối số :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = ...$$

Thí dụ 7 : Tính $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$

Giải : Đổi biến số u = $\pi - x \Leftrightarrow x = \pi - u$. Ta có : $x = 0 \Rightarrow u = \pi; x = \pi \Rightarrow u = 0.$
Mặt khác : dx = -du.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx = \int_{\pi}^{0} (\pi - u)\frac{1}{1+\sin(\pi - u)}(-du)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi}{1+\sin u}du - \int_0^{\pi} \frac{u}{1+\sin u}du$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} \frac{1}{\left(\sin\frac{u}{2} + \cos\frac{u}{2}\right)^2}d\left(\frac{u}{2}\right) - I$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}d\left(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - I$$

Do đó : I = $= \pi \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\pi$.

Chú ý : Nếu gặp tích phân $\int_a^b f(x)dx$ mà tính mãi không được, các bạn nên nghĩ đến phép đổi biến số u = a + b - x. Các thí dụ trên cũng chứng tỏ phép đổi biến này khá có tác dụng.

Thí dụ 8 : Chứng minh rằng : Nếu f(x) là hàm số liên tục, tuần hoàn với chu kỳ T thì với mọi a ta có :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Giải : Ta có $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$ (*)

Xét $J = \int_T^{a+T} f(x)dx$, đặt u = x - T ⇔ x = u + T ⇒ dx = du.

Đổi cận : x = T ⇒ u = 0 ; x = a + T ⇒ u = a, do đó :

$$J = \int_0^a f(u+T).du = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx .$$

Thay vào (*) ta có đpcm.

Chú ý : Có thể áp dụng kết quả trên để tính các tích phân của hàm số tuần hoàn.

Thí dụ 9 : Tính $\int_0^{2007\pi} |\sin x| dx$

Giải : Chứng minh dễ dàng hàm số y = $|\sin x|$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π.Do đó :

$$\int_0^{2007\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx + ... + \int_{2006\pi}^{2007\pi} |\sin x| dx$$

$$= 2007\int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2007\int_0^{\pi} \sin x.dx = -2007\cos x\Big|_0^{\pi} = 5014$$

3. Sử dụng công thức tích phân từng phần :

Ta có : $\int_a^b udv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Nguyên tắc chọn u, v các bạn tương tự như khi sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, chỉ lưu ý thêm có khi các bạn phải kết hợp với phương pháp đổi biến :

Thí dụ 10 : Tính $I = \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx$ *(Đề ĐH Đà Lạt - 1999)*

Giải : Đặt $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi$ nên :

$$I = 2\int_0^{\pi} t\sin tdt = -2\int_0^{\pi} t.d(\cos t) = -2\left[t\cos t\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos tdt\right] = -2\left[-\pi - \sin t\Big|_0^{\pi}\right] = 2\pi.$$

Thí dụ 11 : Tính $I = \int_0^1 x^5.e^x.dx$

Giải : Xét $I_n = \int_0^1 x^n.e^x.dx$. Đặt $u = x^n \Rightarrow du = nu^{n-1}; dv = e^x dx \Leftarrow v = e^x$.

Theo công thức tích phân từng phần ta có :

$$I_n = \int_0^1 x^n.e^x.dx = \int_0^1 udv = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 vdu$$

$$= x^n.e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx = e - nI_{n-1}$$

với mọi n nguyên và n >1.

Ta có : $I_1 = \int_0^1 x.e^x.dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$.

$I_2 = e - 2I_1 = e - 2; I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = 6 - 2e;$

$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(6-2e) = 9e - 24; I = I_5 = e - 5I_4 = e - 5(9e-24) = 120 - 44e$

Chú ý : Bài trên thay vì làm nhiều lần tích phân từng phần tương tự nhau, ta làm một lần tổng quát rồi áp dụng lần lượt cho n = 2;3;4;5.

Bài tập :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{(1+x^2)dx}{x^2-4x+3}$

2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 2x\cos 5x\,dx}{e^x+1}$

3. $\displaystyle\int_{0}^{1}(2x-1)^{1999}.e^{x-x^2}.dx$

4. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)dx}{x^4+x^2+1}$;

5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\cos x+\sin x)dx}{\sqrt{3+\sin 2x}}$;

6. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2(x+1)}$;

7*. $\displaystyle\int_{0}^{2008\pi}\sin^{2007}x.dx$

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\ln^3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).dx$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{e^x+1}.dx$

Bài này laisac sưu tầm trên nguồn Internet và tổng hợp lại