Chuyên đề 4: TÍCH PHÂN

Vấn đề 1:

BIẾN ĐỔI VỀ TỔNG – HIỆU CÁC TÍCH PHÂN CƠ BẢN

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng ba tích chất sau để biến đổi tích phân cần tính thành tổng – hiệu các tích phân cơ bản

1/ $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ 2/ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3/ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

BẢNG NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

Nguyên hàm của các hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của các hàm số hợp
	$(u = u(x))$
1. $\int dx = x + c$; $\int kdx = kx + c$	1. $\int u^\alpha u'dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$; $(\alpha \neq -1)$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $(\alpha \neq -1)$	2. $\int \frac{u'}{u}dx = \ln\lvert u\rvert + c$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	3. $\int e^u u'dx = e^u + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$	4. $\int a^u u'dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$ $(0 < a \neq 1)$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $(0 < a \neq 1)$	5. $\int u'\cos udx = \sin u + c$
6. $\int \cos xdx = \sin x + c$	6. $\int u'\sin udx = -\cos u + c$
7. $\int \sin xdx = -\cos x + c$	7. $\int \frac{u'}{\cos^2 u}dx = \tan u + c$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	8. $\int \frac{u'}{\sin^2 u}dx = -\cot u + c$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$	9. $\int u'\tan udx = -\ln\lvert\cos u\rvert + c$
10. $\int \tan xdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	10. $\int u'\cot udx = \ln\lvert\sin u\rvert + c$
11. $\int \cot xdx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	

Đặc biệt: u(x) = ax + b; $\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

1. $\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	7. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$
2. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$	8. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$
3. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$	9. $\int \tan(ax+b)dx = \frac{-1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$
4. $\int a^{\alpha x+\beta}dx = \frac{1}{\alpha}\ln\lvert\alpha x+\beta\rvert + c$	10. $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$
5. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$	11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
6. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	

B – ĐỀ THI

Bài 1: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{2x+1}{x(x+1)}dx$

Giải

$$I = \int_1^2 \frac{(x+1)+x}{x(x+1)}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\right)dx = \left[\ln x(x+1)\right]_1^2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3.$$

Bài 2: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{2x-1}{x+1}dx$

Giải

$$I = \int_0^1 \frac{2x-1}{x+1}dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{x+1}\right)dx = \left(2x - 3\ln\lvert x+1\rvert\right)\Big|_0^1 = 2 - 3\ln 2.$$

Bài 3: CAO ĐẲNG GTVT III KHỐI A NĂM 2007

Tính các tích phân sau: $I = \int_1^2 \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + x}dx$

Giải

Chia tử cho mẫu, ta được:

$$\frac{x^4+x^3+3x^2+2x-2}{x^2+x}=x^2+3-\frac{x+2}{x^2+x}=x^2+3+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}$$

$$I=\int_1^2\left(x^2+3+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x+\ln|x+1|-2\ln|x|\right]_1^2$$

$$I=\frac{16}{3}+\ln\frac{3}{8}$$

Bài 4: CAO ĐẲNG KINH TẾ – CÔNG NGHIỆP TPHCM NĂM 2007

Tính tích phân: $I(x)=\int_1^x\frac{dt}{t(t+1)}$, với $x>1$. Từ đó tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}I(x)$

Giải

$$I(x)=\int_1^x\frac{dt}{t(t+1)}=\int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(\ln t-\ln(t+1)\right)\Big|_1^x=\ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^x$$

$$=\ln\frac{x}{x+1}-\ln\frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}I(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x}{x+1}-\ln\frac{1}{2}\right]=\ln 2$

Bài 5: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+e^{\sin x}\cos x\right)dx$

Giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+e^{\sin x}.\cos x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x)'e^{\sin x}dx$$

$$=\left(-\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(e^{\sin x}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\sqrt{2}+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1.$$

Bài 6: ĐỀ DỰ BỊ 2

Tính tích phân: $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x+x^3}$

Giải

$$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x+x^3}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right]dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\right]dx$$

$$= \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \left[\ln x - \ln\sqrt{x^2+1}\right]\Bigg|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Bài 7:

Tính tích phân : $I = \int_0^2 \left|x^2 - x\right| dx$.

Giải

Tính $I = \int_0^2 \left|x^2 - x\right| dx = \int_0^1 \left(x^2 + x\right) dx + \int_1^2 \left(-x^2 - x\right) dx$

Do:

x	0		1		2
$x^2 - x$		$-$	0	$+$	

$$I = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 1.$$

Bài 8: ĐỀ DỰ BỊ 3

Cho hàm số: $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$.

Tìm a và b biết rằng $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x)dx = 5$

Giải

Ta có: $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)^3} + bx.e^x$

- $f'(x) = -\dfrac{3a}{(x+1)^4} + be^x(x+1) \Rightarrow f'(0) = -3a + b = -22$ (1)
- $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 a(x+1)^{-3}dx + b\int_0^1 xe^x = \left[\dfrac{-a}{2(x+1)^2} + b(xe^x - e^x)\right]_0^1 = \dfrac{3a}{8} + b = 5$ (2)

(1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} -3a + b = -22 \\ \dfrac{3a}{8} + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$.

✓ *Vấn đề 2:*

TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI I

1. Sử dụng công thức: $\boxed{\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du}$

2. Phương pháp: Xét tích phân $I = \int_a^b f(x)du$

- Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$
- Đổi cận $u(a) = t_1$; $u(b) = t_2$
- Suy ra: $I = \int_{t_1}^{t_2} g(t)dt = g(t)\Big|_{t_1}^{t_2}$ $(g(t) = f[u(x)].u'(x))$

Thường đặt ẩn phụ t là

- căn thức, hoặc mũ của e, hoặc mẫu số, hoặc biểu thức trong ngoặc.
- có sinxdx $\Rightarrow$ đặt t = cosx, có cosxdx $\Rightarrow$ đặt t = sinx, có $\frac{dx}{x}$ đặt t = lnx.

ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI II

- Công thức: $\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx}$; $x = \varphi(t)$; $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$
- Tính: $I = \int_a^b f(x)dx$

  Đặt $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$

  Đổi cận: $x = \varphi(t)$; $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

  Khi đó: $I = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$

Các dạng thường gặp: 1. $\int_a^b \sqrt{a^2 - x^2}dx$ đặt $x = a\sin t$

2. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ đặt $x = a\sin t$ 3. $\int_a^b \frac{dx}{a^2 + x^2}$ đặt $x = a\tan t$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x + (x+1)\cos x}{x\sin x + \cos x}dx.$

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x + \cos x + x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 + \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}\right)dx$

$$= x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx$$

Đặt t = xsinx + cosx ⇒ dt = xcosxdx.

Khi x = 0 thì t = 1, $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$

Suy ra: $I = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)} \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} + \ln|t|\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right).$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Tính tích phân: $I = \int_0^4 \frac{4x - 1}{\sqrt{2x+1} + 2}dx.$

Giải

Đặt: $t = \sqrt{2x+1} + 2 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = t - 2 \Rightarrow 2x + 1 = t^2 - 4t + 4$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2 - 4t + 3}{2} \Rightarrow dx = (t - 2)dt.$$

x = 0 ⇒ t = 3, x = 4 ⇒ t = 5.

Suy ra: $I = \int_3^5 \frac{4\frac{t^2 - 4t + 3}{2} - 1}{t}(t-2)dt = \int_3^5 \frac{(2t^2 - 8t + 5)(t - 2)}{t}dt$

$$= \int_3^5 \frac{2t^3 - 12t^2 + 21t - 10}{t}dt = \int_3^5\left(2t^2 - 12t + 21 - \frac{10}{t}\right)dt$$

$$= \left(\frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 21t - 10\ln|t|\right)\Big|_3^5 = \frac{34}{3} + 10\ln\frac{3}{5}.$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$

Giải

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, $x = 1 \Rightarrow u = 0$, $x = e \Rightarrow u = 1$

$$I = \int_0^1 \frac{u}{(2+u)^2}du = \int_0^1 \left(\frac{1}{2+u} - \frac{2}{(2+u)^2}\right)du = \left(\ln|2+u| + \frac{2}{2+u}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\ln 3 + \frac{2}{3}\right) - (\ln 2 + 1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}.$$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Tính tích phân: $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$.

Giải

Đặt $t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$; $x = 1 \Rightarrow t = e$; $x = 3 \Rightarrow t = e^3$

$$I = \int_e^{e^3} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_e^{e^3}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt = \ln|t-1|\Big\|_e^{e^3} - \ln|t|\Big\|_e^{e^3} = \ln\left(e^2 + e + 1\right) - 2$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$

Giải

<u>**Cách 1:**</u> • Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x)dx \Rightarrow \frac{dt}{1+t^2} = dx$

$$\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4}{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(-t^2 - 1 + \frac{1}{1-t^2}\right)dt$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} - t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{10}{9\sqrt{3}}$$

Cách 2:

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x(1-\tan^2 x)}dx$

Đặt: $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{10}{9\sqrt{3}}$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$

Giải

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1;\ \ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}$

Ta có: $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Khi đó: $I = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 - 1 + 2(1+t)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)^2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{t+1}\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{4-3\sqrt{2}}{4}\ .$$

Bài 5: ĐẠI HỌC SÀI GÒN KHỐI B NĂM 2007

Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}dx$

Giải

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

Đặt $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)} dt = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Bài 6: CAO ĐẲNG XÂY DỰNG SỐ 2 NĂM 2007

Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+\ln x}}$

Giải

Đặt: $t = \sqrt[3]{1+\ln x} \Rightarrow \ln x = t^3 - 1,\ \frac{dx}{x} = 3t^2 dt$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1;\ x = e \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$

$\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} 3tdt \Rightarrow \left.\frac{3t^2}{2}\right|_1^{\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}-3}{2}$

Bài 7: CAO ĐẲNG CÔNG NGHIỆP THỰC PHẨM NĂM 2007

Tính tích phân: $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx$

Giải

$I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = I_1 + I_2$; $I_1 = \left.\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

Đặt $x = \tan t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$. Vậy $I = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

Bài 8: CAO ĐẲNG TÀI CHÍNH – HẢI QUAN NĂM 2007

Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos 2x - \cos x} dx$

Giải

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	0

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-dt}{2t^2 - t - 1} = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t^2 - t - 1} dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} - \frac{\frac{2}{3}}{2t+1} \right) dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\left(\ln|t-1| - \ln|2t+1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\ln 4$$

Bài 9: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

> Tính tích phân: $I = \int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$

Giải

Đặt $t = \sqrt{4x+1} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{4} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}tdt$

$$\Rightarrow I = \int_3^5 \frac{\frac{t}{2}dt}{2.\frac{t^2-1}{4} + 1 + t} = \int_3^5 \frac{t}{(t+1)^2}dt = \int_3^5 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

$$= \left[\ln|t+1| + \frac{1}{t+1} \right]\Bigg|_3^5 = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{12}$$

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

> Tính tích phân: $I = \int_5^{10} \frac{dx}{x - 2\sqrt{x-1}}$

Giải

- Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x - 1 \Rightarrow dx = 2tdt$ và $x = t^2 + 1$
- Đổi cận

x	5	10
t	2	3

Khi đó: $I = \int_2^3 \frac{2tdt}{t^2 - 2t + 1} = 2\int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right) dt$

$$= \left(2\ln|t-1| - \frac{2}{t-1} \right)\Bigg|_2^3 = 2\ln 2 + 1$$

Bài 11: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} dx$

Đặt $t = 1 + 3\sin^2 x \Rightarrow dt = 3\sin 2x dx$.

Với $x = 0$ thì $t = 1$, với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 4 \Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}$

Bài 12: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Tính tích phân: $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

Giải

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Với $x = \ln 3 \Rightarrow t = 3$; với $x = \ln 5 \Rightarrow t = 5$.

$$\Rightarrow I = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Bigg|_3^5 = \ln\frac{3}{2}$$

Bài 13: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2005

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$

Giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx.$$

Đặt $t = \sqrt{1 + 3\cos x} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{3} \\ dt = -\dfrac{3\sin x}{2\sqrt{1 + 3\cos x}} dx \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow t = 2,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

$$I=\int_2^1\left(2\frac{t^2-1}{3}+1\right)\left(-\frac{2}{3}\right)dt=\frac{2}{9}\int_1^2\left(2t^2+1\right)dt$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3}+t\right)\Bigg|_1^2=\frac{2}{9}\left[\left(\frac{16}{3}+2\right)-\left(\frac{2}{3}+1\right)\right]=\frac{34}{27}.$$

Bài 14: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

> Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$.

Giải

Ta có $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$. Đặt t = 1 + cosx $\Rightarrow$ dt = –sinxdx.

$x=0\Rightarrow t=2,\quad x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

$$I=2\int_2^1\frac{(t-1)^2}{t}(-dt)=2\int_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|\right)\Bigg|_1^2=2\left[(2-4+\ln 2)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right]=2\ln 2-1.$$

Bài 15: ĐỀ DỰ BỊ 1

> Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x.\tan x dx$

Giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

Đặt t = cosx $\Rightarrow$ dt = –sinxdx $\Rightarrow$ –dt = sinxdx, $\sin^2x = 1 - t^2$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{3}$
t	1	$\frac{1}{2}$

$$I=-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{(1-t^2)}{t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{t}-t\right)dt=\left[\ln t-\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1=\ln 2-\frac{3}{8}$$

Bài 16: ĐỀ DỰ BỊ 2

Tính tích phân: $I=\int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

Giải

$$I=\int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}}dx$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3=x+1 \Rightarrow 3t^2dt=dx \Rightarrow x+2=t^3+1$

Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 7 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array}$

$$I=\int_1^2 \frac{t^3+1}{t}3t^2dt=3\int_1^2\left(t^4+t\right)dt=3\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{231}{10}$$

Bài 17: ĐỀ DỰ BỊ 1

Tính tích phân: $I=\int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x+1}}dx$.

Giải

$$I=\int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x+1}}dx$$

Đặt $t=\sqrt{\ln x+1} \Rightarrow t^2=\ln x+1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x}=2tdt \\ \ln x=1-t^2 \end{cases}$.

Đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & 1 & e^3 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array}$

$$I=\int_1^2 \frac{(t^2-1)^2}{t}2tdt=2\int_1^2(t^4-2t^2+1)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3+t\right)\Bigg|_1^2=\frac{76}{15}$$

Bài 18:

Tính tích phân: $I=\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$.

Giải

Đặt $t=\sqrt{x-1} \Rightarrow t^2=x-1 \Rightarrow 2tdt=dx$. Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=2 \Rightarrow t=1 \end{array}\right.$

Vậy $I = \int_0^1 \frac{(t^2+1)2t}{1+t}dt = 2\int_0^1 \frac{t^3+t}{t+1}dt = 2\int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right)dt$

$$I = 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1|\right]_0^1 = \frac{11}{3} - 4\ln 2.$$

Bài 19:

Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln x}{x}dx$.

Giải

Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{3dx}{x}$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = e \Rightarrow t = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right.$

$$I = \int_1^2 t\left(\frac{t^2-1}{3}\right)\frac{2tdt}{3} = \frac{2}{9}\int_1^2 (t^4 - t^2)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{116}{135}$$

Bài 20: ĐỀ DỰ BỊ 2

Tính tích phân: $I = \int_0^2 \frac{x^4 - x + 1}{x^2+4}dx.$

Giải

$$I = \int_0^2 \frac{x^4-x+1}{x^2+4}dx = \int_0^2 \left[x^2 - 4 - \frac{x}{x^2+4} + \frac{17}{x^2+4}\right]dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4x - \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right]_0^2 + 17\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}.$$

Tính: $I_1 = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$. Đặt x = 2tant $\Rightarrow$ dx = 2($\tan^2$x + 1)dt

Đổi cận:

x	0	2
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow I_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t + 1}{4(\tan^2 t + 1)}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$

Vậy $I = \left[\frac{x^3}{3} - 4x - \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right]_0^2 + 17.\frac{\pi}{8} = \frac{17}{8}\pi - \frac{16}{3} - \ln 2$

Bài 21:

Tính tích phân: $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

Giải

Tính tích phân $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$. Ta có $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2-4=x^2\Rightarrow dt=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=4\\ x=\sqrt{5}\Rightarrow t=3\end{array}\right.$

Vậy $I=\int_3^4\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Big|_3^4=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$.

Bài 22: ĐỀ DỰ BỊ 1

Tính tích phân: $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Giải

$I=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$. Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow 2tdt=e^xdx$ và $e^x=t^2+1$

Đổi cận: $\begin{array}{c|cc}x & \ln 2 & \ln 5\\ \hline t & 1 & 2\end{array}\Rightarrow I=\int_1^2\frac{(t^2+1).2tdt}{t}=2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]\Big|_1^2=\frac{20}{3}$

Bài 23:

Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2x}{1+\sin 2x}dx$.

Giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(1+\sin 2x)}{1+\sin 2x}=\frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$.

Bài 24: ĐỀ DỰ BỊ 2

Tính tích phân: $I=\int_0^{\ln 3}\frac{e^xdx}{\sqrt{(e^x+1)^3}}$.

Giải

$I=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}}dx$. Đặt $t=e^x+1\Rightarrow dt=e^x dx$; Đổi cận:

x	0	ln3
t	2	4

Khi đó $I=\int_2^4\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{\sqrt{t}}\Bigg|_2^4=\sqrt{2}-1$

Bài 25: ĐỀ DỰ BỊ 1

Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\ \sin x\cos^5 xdx$

Giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\sin x\cos^5 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\cos^3 x.\sin x.\cos^2 xdx$$

Đặt $t=\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\Rightarrow t^6=1-\cos^3 x\Rightarrow 6t^5dt=3\sin x\cos^2 xdx$

$\Rightarrow 2t^5dt=\sin x\cos^2 xdx$ và $\cos^3 x=1-t^6$

Đổi cận;

x	0	π/2
t	0	1

$\Rightarrow I=\int_0^1 t.\left(1-t^6\right)2t^5dt=\int_0^1\left(2t^6-2t^{12}\right)dt=\left[\frac{2}{7}t^7-\frac{2t^{13}}{13}\right]_0^1=\frac{12}{91}$

Bài 26: CAO ĐẲNG KINH TẾ TP. HCM

Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2xdx$

Giải

$$\begin{cases}u=x & \Rightarrow du=dx\\ dv=\sin 2xdx & \Rightarrow v=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{cases}$$

Vậy: $I=-\frac{x\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

✓ *Vấn đề 3:* TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Công thức: $\boxed{\int_a^b u(x).v'(x)dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x)dx}$

Viết gọn: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x\sin x}{\cos^2 x}dx.$

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x\sin x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$

$= \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \sqrt{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần.

Đặt: $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$, chọn $v = \frac{1}{\cos x}$

Suy ra: $J = \left[\frac{x}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = \frac{2\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx$

Tính $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}dx$ bằng phương pháp đổi biến số.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Suy ra: $K = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4-3}\right) = \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Vậy $I = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

> Tính tích phân: $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$

Giải

$u = 3 + \ln x \Rightarrow dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$; $du = \frac{1}{x}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}$

$$I = -\frac{3+\ln x}{x+1}\Bigg|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$= -\frac{3+\ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \frac{1}{x}dx - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \frac{3-\ln 3}{4} + \ln|x|\Big|_1^3 - \ln|x+1|\Big|_1^3 = \frac{1}{4}\left(3 + \ln\frac{27}{16}\right)$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

> Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Giải

Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$. Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$, chọn $v = -\frac{1}{2x^2}$

$$I = -\frac{1}{2x^2}\ln x\Bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2x^3}dx = -\frac{1}{8}\ln 2 - \frac{1}{4x^2}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{16} = \frac{3-2\ln 2}{16}.$$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

> Tính tích phân: $I = \int_1^e x^3\ln^2 x\,dx$

Giải

Tính tích phân

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \dfrac{2\ln x}{x}dx$; $dv = x^3dx \Rightarrow v = \dfrac{x^4}{4}$.

Ta có: $I = \dfrac{x^4}{4}.\ln^2 x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$, $dv = x^3dx$, chọn $v = \dfrac{x^4}{4}$. Ta có

$$\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^e = \frac{3e^4+1}{16}.$$

Vậy $I = \dfrac{5e^4-1}{32}$

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

> Tính tích phân: $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$.

Giải

Tính tích phân.

$I = \int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow du = dx$, chọn $v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

$$I = \frac{1}{2}(x-2)e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = -\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{5-3e^2}{4}$$

Bài 6: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

> Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin 2x\, dx$

Giải

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow du = dx$, chọn $v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$I = -\frac{x+1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{4} + 1$$

Bài 7: ĐỀ DỰ BỊ 2 - ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Tính tích phân: $I = \int_1^2 (x-2)\ln x dx$

Giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x-2)dx \end{cases} \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, chọn $v = \frac{x^2}{2} - 2x$

$$I = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - 2\right)dx = -2\ln 2 + \frac{5}{4}$$

Bài 8: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x dx$.

Giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos 2x.dx$$

- Tính $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)dx = (x^2 - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$
- Tính $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos 2x.dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow du = 2dx$ chọn $v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$I_2 = \frac{1}{2}(2x-1)\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$I = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Bài 9:

> Tính tích phân: $I = \int_2^3 \ln\left(x^2 - x\right)dx$.

Giải

$$I = \int_2^3 \ln\left(x^2 - x\right)dx$$

Ta có $I = \int_2^3 \ln\left(x^2 - x\right)dx = \int_2^3 \ln x(x-1)dx = \int_2^3 \left[\ln x + \ln(x-1)\right]dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \text{ chọn } v = x \end{cases}$

$$I_1 = \int_2^3 \ln x dx = x\ln x\Big|_2^3 - \int_2^3 dx = (x\ln x - x)\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 3 - (2\ln 2 - 2)$$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$$

$$I_2 = \int_2^3 \ln(x-1)dx = \int_1^2 \ln u du = \left[u\ln u - u\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

Vậy $I = \int_2^3 \ln\left(x^2 - x\right)dx = I_1 + I_2 = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1 + 2\ln 2 - 1 \Rightarrow I = 3\ln 3 - 2$

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 1

> Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1 + \cos 2x}dx$.

Giải

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos 2x}dx = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{xdx}{\cos^2 x}$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{du}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ \text{chọn } v = \tan x \end{cases}$

$$I = \frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{1}{2}\left[x\tan x - \ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$$

Bài 11: CĐ KINH TẾ – KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP I

> Tính tích phân: $I = \int_1^3 \dfrac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

Giải

Đặt $u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = (x+1)^{-2}dx$, chọn $v = -\dfrac{1}{x+1}$

$$I = -\frac{\ln x}{x+1}\Bigg|_1^3 + \int_1^3 \frac{(x+1)-x}{x(x+1)}dx = -\frac{1}{4}\ln 3 + \int_1^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln 3 + \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^3 = -\frac{1}{4}\ln 3 + \ln\frac{3}{2}$$

Bài 12: CAO ĐẲNG KINH TẾ ĐỐI NGOẠI

Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_0^4 \frac{\ln\sqrt{2x+1}}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx$

Giải

Đặt $u = \ln\sqrt{2x+1}$, $dv = (2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx \Rightarrow du = (2x-1)^{-1}dx$, chọn $v = -(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow I = -(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\ln\sqrt{2x+1}\Big|_0^4 == -\frac{1}{3}\ln 3 + \frac{2}{3}$$

Bài 13: CAO ĐẲNG KINH TẾ TP. HCM

Tính tích phân : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$

Giải

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin 2x dx, & \text{chọn } v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

Vậy: $I = -\dfrac{x\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

✓ *Vấn đề 4:*

TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHỐI HỢP

A.ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Tính tích phân : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx$

Giải

$$I = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x}dx$$

$$I_1 = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+2e^x)}{1+2e^x} = \frac{1}{2}\ln(1+2e^x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$$

Vậy $I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

> Tính tích phân: $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right)\ln x dx$

Giải

$$I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right)\ln x dx = 2\int_1^e x\ln x dx - 3\int_1^e \ln x.\frac{1}{x}dx$$

Xét $I_1 = \int_1^e x\ln x dx$. Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Do đó $I_1 = \left.\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\right|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

Xét $I_2 = \int_1^e \ln x.\frac{1}{x}dx$.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

Do đó $I_2 = \int_0^1 tdt = \left.\left(\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2}$. Vậy $I = \frac{e^2-2}{2}$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

> Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 xdx$.

Giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x dx = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^2 dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \frac{8}{5} - \frac{\pi}{4}$

Bài 4: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

> Tính tích phân $I = \int_0^1 \left(e^{-2x} + x\right)e^x dx$

Giải

Ta có $I = \int_0^1 e^{-x} dx + \int_0^1 xe^x dx$

- $I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx - e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$
- $I_2 = \int_0^1 xe^x dx$. Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; đặt $dv = e^x dx$, chọn $v = e^x$

Suy ra $I_2 = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$. Vậy $I = I_1 + I_2 = 2 - \frac{1}{e}$.

Bài 5: ĐẠI HỌC SÀI GÒN KHỐI A NĂM 2007

> Tính: $I = \int_0^1 \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1} dx$

Giải

$$I = \int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - 2\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln\left|x^2+x+1\right|\Big|_0^1 = \ln 3;\quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Đặt $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)dt}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)} = \frac{2\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$I = \ln 3 - \frac{2\pi}{6\sqrt{3}}$$

Bài 6: CAO ĐẲNG GTVT III KHỐI A NĂM 2007

Tính tích phân : $J = \int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \sin\sqrt{x}dx$

Giải

Đặt $t = \sqrt{x}$ thì $dx = 2tdt \Rightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2t\sin tdt$

Chọn : $\begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ \text{chọn } v = -\cos t \end{cases}$

$$J = \left[-2t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos tdt = \left[-2t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$$

Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

Tính tích phân $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x} + \cos x\right)\cos xdx$.

Giải

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}d\left(\sin x\right) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx \quad = 2e^{\sin x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = e + \frac{\pi}{2} - 1$$

Bài 8: ĐỀ DỰ BỊ 2

Tính tích phân: $I = \int\limits_0^{\pi^2} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$.

Giải

$I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$

Đổi cận

x	0	π^2
t	0	π

$I = 2\int_0^{\pi} t^2 \sin tdt$. Đặt $\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \sin tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2tdt \\ v = -\cos t \end{cases}$

$I = -2(t^2\cos t)\Big|_0^{\pi} + 4\int_0^{\pi} t\cos tdt = 2\pi^2 + 4I_1$

- Tính $I_1 = \int_0^{\pi} t\cos tdt$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \cos tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ \text{chọn } v = \sin t \end{cases}$

$I_1 = t\sin t\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin tdt = \cos t\Big|_0^{\pi} = -2$. Vậy $I = 2\pi^2 - 8$

Bài 9: ĐỀ DỰ BỊ 1

Tính tích phân: $I = \int\limits_0^1 x^3 e^{x^2} dx$

Giải

Tính $I = \int\limits_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \int\limits_0^1 x^2 e^{x^2} xdx$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow \frac{dt}{2} = xdx$. Đổi cận:

x	0	1
t	0	1

$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 te^t dt = \frac{1}{2}\left[te^t\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^t dt\right] = \frac{1}{2}\left[te^t - e^t\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 2

Tính tích phân: $I = \int\limits_{-1}^0 x\left(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}\right)dx$.

Giải

Tính $I = \int_{-1}^{0} x\left(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}\right)dx = \int_{-1}^{0} x.e^{2x}.dx + \int_{-1}^{0} x\sqrt[3]{x+1}dx$

- Tính $I_1 = \int_{-1}^{0} xe^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ \text{chọn } v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$I_1 = uv\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} vdu = \frac{1}{2}x.e^{2x}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{2x}dx = \left(\frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}.e^{2x}\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4}$

- Tính $I_2 = \int_{-1}^{0} x\sqrt[3]{x+1}dx$

Đặt $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Rightarrow 3t^2dt = dx$. Đổi cận:

x	−1	0
t	0	1

$I_2 = \int_0^1 \left(t^3 - 1\right).t.3t^3dt = 3\int_0^1 \left(t^6 - t^3\right)dt = 3\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = -\frac{9}{28}$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4} - \frac{9}{28} = \frac{3}{4e^2} - \frac{4}{7}$

Bài 11: CAO ĐẲNG KỸ THUẬT CAO THẮNG

Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx$

Giải

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$

$= \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx$.

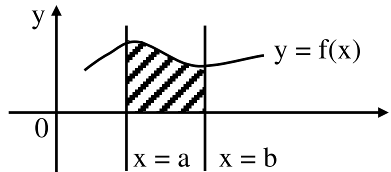
$= \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \ln(\cos^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \ln 2$

✓ *Vấn đề 5:* ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

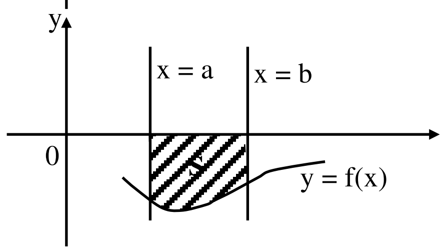
TÍNH DIỆN TÍCH

Bài toán 1: Cho hàm số y = f(x) liên tục và không âm trên đoạn [a, b]. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số y = f(x), trục hoành và hai đường thẳng x = a, x = b là:



$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

Từ bài toán 1 suy ra nếu f(x) không dương trên đoạn [a, b]



$$S = \int_a^b -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

Bài toán 2: (Tổng quát)

Cho hai hàm số $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ liên tục trên đoạn [a, b] và có đồ thị lần lượt là (C1), (C2). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C1), (C2) và hai đường x = a, x = b được xác định bởi công thức: $\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx}$ (*)

* Phương pháp giải (*):

- Giải phương trình: f(x) = g(x) (1)
- Nếu (1) vô nghiệm thì: $S = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right|$
- Nếu (1) có nghiệm thuộc [a, b] giả sử là $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ thì

$$S = \left|\int_a^\alpha [(f(x) - g(x)]dx\right| + \left|\int_\alpha^\beta [(f(x) - g(x)]dx\right| + \left|\int_\beta^b [(f(x) - g(x)]dx\right|$$

Bài toán 3: Cho $(C_1): x_1 = f(y)$, $(C_2): x_2 = g(y)$, $f(y), g(y)$ liên tục trên đoạn [a, b].

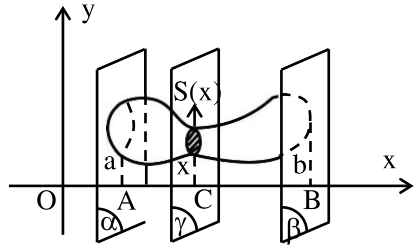
Diện tích hình phẳng S được giới hạn bởi (C1); (C2) và hai đường thẳng y = a, y = b được xác định bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(y) - g(y)|dy$$

THỂ TÍCH CÁC VẬT THỂ

I. CÔNG THỨC THỂ TÍCH

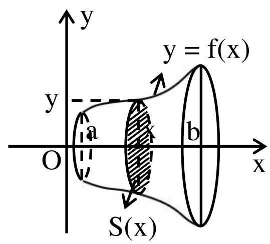
Giả sử vật thể T được xác định bởi 2 mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Ta chọn trục Ox sao cho nó vuông góc với các mặt phẳng (α và (β). Ta có $Ox \cap (\alpha) = A$, $Ox \cap (\beta) = B$. Giả sử mặt phẳng ($(\gamma) \perp Ox, (\gamma) \cap Ox = C,$ (γ) cắt vật thể T có thiết diện là S(x).



Khi đó $V = \int_a^b S(x)dx$

II. BÀI TOÁN

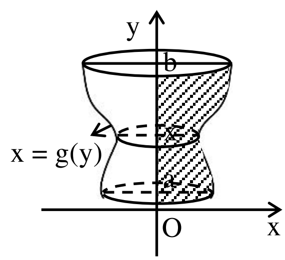
Bài toán 1: Giả sử hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f(x), x = a, x = b và y = 0 quay quanh Ox.



Hình tròn S(x) có bán kính R = y: $S(x) = \pi y^2$

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

Bài toán 2: Thể tích do hình phẳng: x = g(y), x = 0, y = a, y = b quay quanh trục Oy:



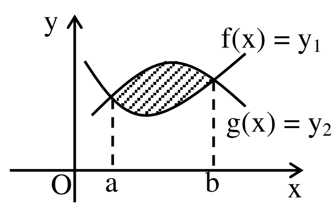
$$V = \pi\int_a^b x^2 dy$$

Bài toán 3: Tính thể tích vật thể do hình phẳng giới hạn hai đường cắt nhau quay quanh Ox:

$y_1 = f(x),\ y_2 = g(x)$

$y_2 \ge y_1 \ge 0\ \ \forall x \in [a, b]$

$$V = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx$$

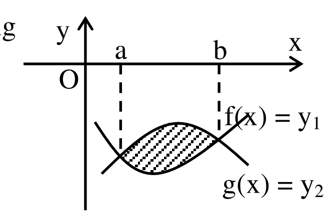


Bài toán 4: Tính thể tích vật thể do hình phẳng giới hạn hai đường cắt nhau quay quanh Ox.

$y_1 = f(x), y_2 = g(x)$

$y_1 \le y_2 \le 0\ \ \forall x \in [a, b]$

$$V = \pi\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx$$



B. ĐỀ THI

Bài 1: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $x = -x^2 + 4x$ và đường thẳng d: $y = x$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d: $-x^2 + 4x = x \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 3$

$$S = \int_0^3 \left|x^3 - 3x\right| dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}$$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = (e + 1)x$, $y = (1 + e^x)x$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là:

$(e + 1)x = (1 + e^x)x \Leftrightarrow (e^x - e)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^1 \left|xe^x - ex\right| dx = e\int_0^1 xdx - \int_0^1 xe^x dx$

Ta có: $e\int_0^1 xdx = \frac{ex^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{e}{2}$, $\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$

Vậy $S = \frac{e}{2} - 1$ (đvdt).

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = x\ln x$, $y = 0$, $x = e$.
Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục Ox.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x\ln x$ và $y = 0$ là:

$x\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục hoành là:

$$V = \pi\int_1^e y^2 dx = \pi\int_1^e (x\ln x)^2 dx$$

Đặt $u = \ln^2 x$, $dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{2\ln x}{x}dx$, $v = \frac{x^3}{3}$. Ta có:

$$\int_1^e (x\ln x)^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Bigg|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 \ln x dx$$

Đặt u = lnx, dv = x^2dx $\Rightarrow$ $du = \frac{dx}{x}$, chọn $v = \frac{x^3}{3}$. Ta có:

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$$

Vậy $V = \frac{\pi(5e^3-2)}{27}$ (đvtt).

Bài 4: ĐỀ DỰ BỊ 2 - ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

> Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi paraol y = x^2 – x + 3 và đường thẳng d: y = 2x + 1.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và d:

$$x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Ta có $S = \int_1^2 \left|(x^2 - x + 3) - (2x+1)\right| dx = \int_1^2 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx$

$$= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{6} \text{ (đvdt)}$$

Bài 5: ĐỀ DỰ BỊ 1

> Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra trong phép quay xung quanh trục Ox, của hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đường y = $\sqrt{x}$ sinx ($0 \leqslant x \leqslant \pi$)

Giải

$$V = \pi\int_0^\pi \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\int_0^\pi x.\sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x(1-\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^\pi x dx - \int_0^\pi x.\cos 2x dx\right]$$

Tính : $I_1 = \int_0^\pi x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$. Tính : $I_2 = \int_0^\pi x\cos 2x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ \text{chọn } v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$$I_2 = \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \left(\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^\pi = 0$$

$$V = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi^2}{2} - 0\right] = \frac{\pi^3}{4} \text{ (đvtt)}$$

Bài 6:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ và $y = x + 3$.

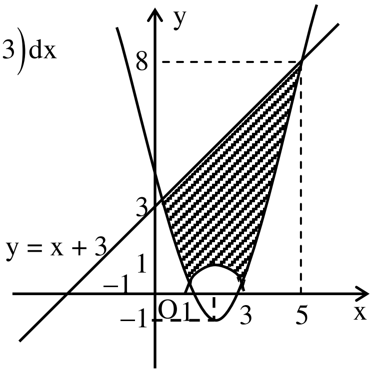
Giải

$$S = \int_0^5 \left[(x+3) - (x^2 - 4x + 3)\right]dx - 2\int_1^3 -(x^2 - 4x + 3)dx$$

$$S = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx - 2\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx$$

$$S = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 - 2\left(\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_1^3$$

$$S = \frac{109}{6} \text{ (đvdt)}$$



Bài 7:

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

Giải

Ta có $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow y^2 = 4 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ (E)

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow 4 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{32}$

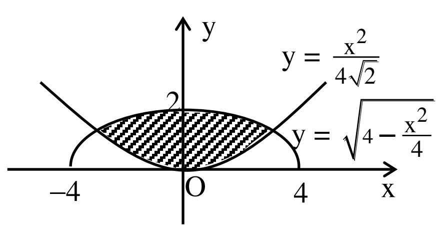
$\Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \vee x^2 = -16$ (loại) $\Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Nên $S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right)dx = 2\left[\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}dx - \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{4\sqrt{2}}dx\right]$

Tính $I_1 = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}dx$

Đặt $x = 4\sin t \Rightarrow dx = 4\cos t dt$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{4} \\ t = 0 \end{array}\right.$



$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4(1+\cos 2t)dt = 4\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi + 2$$

$$I_2 = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{4\sqrt{2}}dx = \frac{x^3}{12\sqrt{2}}\Bigg|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$$

Vậy $S = \left(2\pi + \frac{4}{3}\right)(\text{đvdt})$.

Bài 8: CAO ĐẲNG KỸ THUẬT CAO THẮNG

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P_1): $y = x^2 - 2x$ và (P_2) : $y = -x^2 + 4x$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 6x = 0$

$\Leftrightarrow -2x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$.

Diện tích cần tìm:

$$S = \int_0^3((-x^2+4x)-(x^2-2x))dx = \int_0^3(-2x^2+6x)dx$$

$$= \left(\frac{-2}{3}x^3 + 3x^2\right)\Bigg|_0^3 = 9 \text{ (đvdt)}$$

Bài 9: CAO ĐẲNG KỸ THUẬT CAO THẮNG

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 7 - 2x^2$, $y = x^2 + 4$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm $7 - 2x^2 = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$

Diện tích S cần tìm

$$S = \int_{-1}^1(7-2x^2-x^2-4)dx = \int_{-1}^1(3-3x^2)dx = 4 \text{ (đvdt)}$$