SỞ GD & ĐT NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT ĐẶNG THÚC HỨA

$$\int \frac{\sin 4x + \cos 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

BÀI GIẢNG TÍCH PHÂN

$$I = \int \frac{dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^6 + 1\right) - \left(x^6 - 1\right)}{x^8 + 1} dx = \ldots$$

Giáo viên : Phạm Kim Chung

TỔ : TOÁN

NĂM HỌC : 2007 - 2008

" Thực ra trên mặt đất làm gì có đường, người ta đi lắm thì thành đường thôi ! "

- Lỗ Tấn -

Viết một cuốn tài liệu rất khó, để viết cho hay cho tâm đắc lại đòi hỏi cả một đẳng cấp thực sự ! Cũng may tôi không có tư tưởng lớn của một nhà viết sách, cũng không hy vọng ở một điều gì đó lớn lao vì tôi biết năng lực về môn Toán là có hạn .. Khi tôi có ý tưởng viết ra những điều tôi gom nhặt được tôi chỉ mong sao qua từng ngày mình sẽ lĩnh hội sâu hơn về môn Toán sơ cấp..qua từng tiết học những học trò của tôi bớt băn khoăn, ngơ ngác hơn.. Và nếu còn ai đọc bài viết này nghĩa là đâu đó tôi đang có những người thầy, người bạn cùng chung một niềm đam mê sự diệu kì Toán học .

Thử giải một bài toán khó... ...nhưng chưa thật hài lòng !

$$\int\frac{dx}{x^8+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^6+1)-(x^6-1)}{(x^4+1)^2-(2x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)\left[(x^4-\sqrt{2}x^2+1)+(\sqrt{2}-1)x^2\right]}{(x^4+1)^2-(2x^2)^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)\left[(x^4-\sqrt{2}x^2+1)+(\sqrt{2}+1)x^2\right]}{(x^4+1)^2-(2x^2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}dx+\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}\int\frac{(x^2+1)x^2}{(x^4-\sqrt{2}x^2+1)(x^4+\sqrt{2}x^2+1)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}dx+\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}\int\frac{(x^2-1)x^2}{(x^4-\sqrt{2}x^2+1)(x^4+\sqrt{2}x^2+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+\sqrt{2}}dx+\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2-\sqrt{2}\right]\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+\sqrt{2}\right]}+\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(2-\sqrt{2})}dx+\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(2+\sqrt{2})\right]\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(2-\sqrt{2})\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+\sqrt{2}}+\frac{(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2-\sqrt{2}\right]}-\frac{(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+\sqrt{2}\right]}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(2-\sqrt{2})}+\frac{(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(2+\sqrt{2})\right]}-\frac{(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(2-\sqrt{2})\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}u+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}v+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{16}\ln\left|\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right|+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{16}\ln\left|\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right|+C\ \left(\text{Với }\ x-\frac{1}{x}=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\text{tg}u=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\text{tg}v\right)$$

(Nếu dùng kết quả này để suy ngược có tìm được lời giải hay hơn ?..)

PHẦN LÝ THUYẾT

❶ **Định nghĩa :** *Giả sử* f(x) *là một hàm số liên tục trên một khoảng* K, a *và* b *là hai phần tử bất kì của* K, F(x) *là một nguyên hàm của* f(x) *trên* K . *Hiệu số* F(b) - F(a) *được gọi là tích phân từ* a *đến* b *của* f(x) *và được kí hiệu là* $\int_a^b f(x)dx$. Ta dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số : F(b) – F(a)

Công thức Newton – Laipnit : $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Ví dụ : $\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$

Chú ý : Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc và **f**, **a** và **b** mà không phụ thuộc vào kí hiệu biến số tích phân . Vì vậy ta có thể viết : **F(b) – F(a) =** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$ ...

❷ **Các tính chất của tích phân .**

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx$

VD : $\int_1^e \left(2x + \frac{3}{x}\right)dx = 2\int_1^e xdx + 3\int_1^e \frac{1}{x}dx = x^2\Big|_1^e + 3\ln x\Big|_1^e = (e^2 - 1) + 3(1 - 0) = e^2 + 2$

4. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

VD : $\int_{-1}^1 |x|dx = \int_{-1}^0 |x|dx + \int_0^1 |x|dx = -\int_{-1}^0 xdx + \int_0^1 xdx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$

5. f(x) ≥ 0 trên đoạn [a ; b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

6. f(x) $\geq$ g(x) trên đoạn [a ; b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

VD : Chứng minh rằng : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

7. **m $\leq$ f(x) $\leq$ M trên đoạn [a ; b] $\Rightarrow$ m(b – a) =** $m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx$ **= M(b – a)**

VD : Chứng minh rằng : $2 \leq \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx \leq \frac{5}{2}$

HD . Khảo sát hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ trên đoạn [1; 2] ta có : $\max\limits_{[1;2]} y = \frac{5}{2}$; $\min\limits_{[1;2]} y = 2$

Do đó : $2\int_1^2 dx \le \int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx \le \frac{5}{2}\int_1^2 dx \Rightarrow 2x\Big|_1^2 \le \int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx \le \frac{5}{2}x\Big|_1^2 \Rightarrow 2 \le \int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx \le \frac{5}{2}$

PHẦN PHƯƠNG PHÁP

3 Phương pháp đổi biến số : t = v(x) .

VD . Tính tích phân : $I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

Đặt : $t=x^2+1$. Khi x= 0 thì t=1, khi x=1 thì t=2 .

Ta có : $dt = 2xdx \Rightarrow \frac{dt}{2} = xdx$. Do đó :

$$I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$$

☺ **Quy trình giải toán .** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(v(x))v'(x)dx$

Bước 1 . Đặt t = v(x) , v(x) có đạo hàm liên tục, đổi cận .

Bước 2 . Biểu thị f(x)dx theo t và dt : f(x)dx = g(t)dt

Bước 3 . Tính $\int_{v(a)}^{v(b)} g(t)dt$.

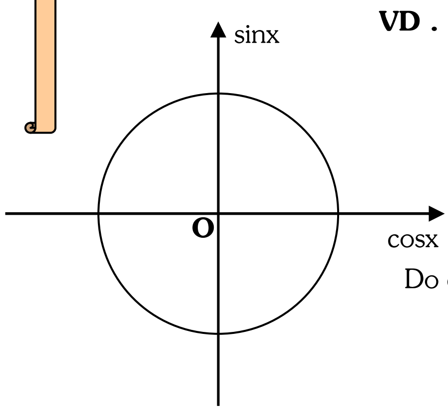
☹ **Bài tập rèn luyện phương pháp :**

Tính các tích phân sau :

1 . $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ **2** . $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$ **3**. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$ **4**. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^4-1}$

5 . $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x}$ **6** . $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x+1}}$ **7**. $\int_1^4 \frac{dx}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}$

4 Phương pháp đổi biến số : x = u(t) .



VD . Tính tích phân : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Đặt x = sint $\left(t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$. Khi x=0 thì t=0, khi x=1 thì t=$\frac{\pi}{2}$

Vậy với x = sint thì $x\in[0;1] \Rightarrow t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và dx = costdt .

Do đó : $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt =$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

☺ **Quy trình giải toán .** $\int_a^b f(x)dx$

Bước 1 . Đặt x = u(t), $t\in[\alpha;\beta]$ sao cho u(t) có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$, f**(**u(t)**)** được xác định trên đoạn $[\alpha;\beta]$ và $u(\alpha)=a;\ u(\beta)=b$.

Bước 2 . Biểu thị f(x)dx theo t và dt : f(x)dx = g(t)dt

Bước 3 . Tính $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{g(t)dt}$.

☹ **Bài tập rèn luyện phương pháp :**

Tính các tích phân sau :

1 . $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ **2** . $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **3**. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

4. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ **5** . $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx$ **6** . $\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5+x}{5-x}}dx$ (Đặt x=5cos2t)

5 Phương pháp đổi biến số : u(x) = g(x,t)

VD1 . Tính tích phân : $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$

Cách **(1)** Đặt $\sqrt{1+x^2} = x - t \Rightarrow 1 = -2xt + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$

Khi x =0 thì t= -1, khi x=1 thì t= $1-\sqrt{2}$ và $dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$. Do đó :

$$I = \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{-t^2-1}{2t}.\frac{t^2+1}{2t^2}dt = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{t^4+2t^2+1}{t^3}dt = -\frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1-\sqrt{2}} tdt + 2\int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt + \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{1}{t^3}dt\right) =$$

$$= -\frac{t^2}{8}\Bigg|_{-1}^{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln|t|\Bigg|_{-1}^{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{8t^2}\Bigg|_{-1}^{1-\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cách **(2)** : Đặt x=tgt , do $x \in [0;1]$ nên ta có thể chọn $t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Khi x=0 thì t=0, khi x=1 thì $t = \frac{\pi}{4}$

và $dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$. Do đó :

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+tg^2t}\,\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{|\cos t|}\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^4 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{\left(1-\sin^2 t\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{(1-\sin t)+(1+\sin t)}{(1-\sin t)(1+\sin t)}\right]^2 d(\sin t) = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{(1-\sin t)} + \frac{1}{(1+\sin t)}\right]^2 d(\sin t) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{(1-\sin t)} + \frac{1}{(1+\sin t)}\right]^2 d(\sin t) = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{(1-\sin t)(1+\sin t)} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}.\left[\frac{1}{1-\sin t} - \frac{1}{1+\sin t}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Bình luận : *Bài toán này còn giải được bằng phương pháp tích phân từng phần . Còn với 2 cách giảI trên rõ ràng khi bắt gặp cách 1) ta nghĩ rằng nó sẽ chứa đựng những phép tính toán phức tạp còn cách 2) sẽ chứa những phép tính toán đơn giản hơn. Nhưng ngược lại sự suy đoán - cách 2) lại chứa những phép tính toán dài dòng và nếu quả thật không khá tích phân thì chưa hẳn đã là được hoặc làm được mà lại dài dòng hơn .*

VD2 . Tính tích phân : $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Cách **(1)** Đặt $\sqrt{1+x^2} = x - t \Rightarrow 1 = -2xt + t^2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2-1}{2t}$

Khi x =0 thì t= -1, khi x=1 thì t= $1-\sqrt{2}$ và $dx = \dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$. Do đó :

$$I = \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{-2t}{t^2+1}.\frac{t^2+1}{2t^2}dt = -\int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt =$$

$$= -\ln|t|\Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}} = -\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Cách **(2)** : Đặt x=tgt , do $x \in [0;1]$ nên ta có thể chọn $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$. Khi x=0 thì t=0, khi x=1 thì $t = \dfrac{\pi}{4}$

và $dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt$.

Do đó : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}}\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\cos t|}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^2 t}dt =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{\left(1-\sin^2 t\right)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\sqrt{2}-1\right).$$

☹ **Bài tập rèn luyện phương pháp :**

Tính các tích phân sau :

1 . $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}dx$ **2** . $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$ **3**. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2+2x+2}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{x^2-4x+3}}$ **5** . $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ **6** . $\displaystyle\int_0^{1} \frac{xdx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

Chú ý : Khi đứng trước một bài toán tích phân, không phải bài toán nào cũng xuất hiện nhân tử để chúng ta sử dụng phương pháp đổi biến số . Có nhiều bài toán phải qua 1 hay nhiều phép biến đổi mới xuất hiện nhân tử để đặt ẩn phụ (sẽ nói đến ở phần PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN)

6 Phương pháp tích phân từng phần .

Nếu u(x) và v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn [a; b] thì :

$$\int_a^b \mathbf{u(x)v'(x)dx = \left(u(x).v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx}$$

hay

$$\int_a^b \mathbf{u(x)dv = \left(u(x).v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du}$$

VD1. Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases}$, ta có : $\begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Nhận xét : Một câu hỏi đặt ra là đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = x dx \end{cases}$ có được không ?

Ta hãy thử : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left(\frac{x^2}{2}\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$, rõ ràng tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$ còn phức tạp hơn tích phân cần tính . Vậy việc lựa chọn **u** và **dv** quyết định rất lớn trong việc sử dụng phương pháp tích phân từng phần . Ta hãy xét một VD nữa để đi tìm câu trả lời vừa ý nhất !

VD2. Tính $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$

Ta thử đặt : $\begin{cases} u = \frac{1}{x^5} \\ dv = \ln x dx \end{cases}$ rõ ràng để tính v= $\int \ln x dx$ là một việc khó khăn !

Giải . Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^5}dx \end{cases}$ ta có : $\begin{cases} du = \frac{1}{x} \\ v = \int \frac{1}{x^5}dx = -\frac{1}{4x^4} \end{cases}$

Do đó : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx = \left(-\frac{\ln x}{4x^4}\right)\Big|_1^2 + \frac{1}{4}\int_1^2\frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x^4}\right)\Big|_1^2 = \frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$

Nhận xét : Từ 2 VD trên ta có thể rút ra một nhận xét (với những tích phân đơn giản) : Việc lựa chọn **u** và **dv** phải thoả mãn :

① **du** đơn giản, **v** dễ tính .

② Tích phân sau $\left(\int v du\right)$ phải đơn giản hơn tích phân cần tính $\left(\int u dv\right)$.

☹ **Bài tập rèn luyện phương pháp :**

Tính các tích phân sau :

1 . $\int_0^1 xe^x dx$ **2** . $\int_0^1 xe^{3x}dx$ **3**. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x dx$ **4**. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3x dx$ **5 .** $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

6 . $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$ **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx$ **8.** $\int_1^e \ln x dx$ **9.** $\int_2^5 2x\ln(x-1)dx$ **10.** $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

Mỗi dạng toán chứa đựng những đặc thù riêng của nó !

PHẦN PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN

TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM HỮU TỶ

A. DẠNG : **I**= $\int \frac{P(x)}{ax+b}dx \quad (a \neq 0)$

Công thức cần lưu ý : $\mathbf{I}=\int\frac{\alpha}{ax+b}dx=\frac{\alpha}{a}\ln|ax+b|+C$

- Tính $\mathbf{I_1}=\int\frac{x+1}{x-1}dx$
- Tính $\mathbf{I_2}=\int\frac{x^2-5}{x+1}dx$
- Tính $\mathbf{I_3}=\int\frac{x^3}{2x+3}dx$

Phương pháp : Thực hiện phép chia đa thức P(x) cho nhị thức : ax+b, đưa tích phân về dạng : $\mathbf{I}=\int Q(x)dx+\int\frac{\alpha}{ax+b}dx$ (Trong đó Q(x) là hàm đa thức viết dưới dạng khai triển)

B. DẠNG : $\mathbf{I}=\int\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\mathbf{dx}$ $(a\neq 0)$

1. *Tam thức* : $f(x)=ax^2+bx+c$ ***có hai nghiệm phân biệt*** .

Công thức cần lưu ý : $\mathbf{I}=\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln|u(x)|+C$

☺ Tính $\mathbf{I}=\int\frac{2}{x^2-4}dx$

Cách 1. *(phương pháp hệ số bất định)*

$$\frac{2}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow 2\equiv(A+B)x+2(A-B)\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Do đó : $\mathbf{I}=\int\frac{2}{x^2-4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

Cách 2. *(phương pháp nhảy tầng lầu)*

Ta có : $\mathbf{I}=\int\frac{2}{x^2-4}dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x}{x^2-4}dx-\int\frac{2x-4}{x^2-4}dx\right]=\frac{1}{2}\ln|x^2-4|-\ln|x+2|+C$

- < **Tổng quát** >Tính $\mathbf{I}=\int\frac{\alpha}{x^2-a^2}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{2x}{9-x^2}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{3x+2}{x^2-1}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^2}{x^2-5x+6}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{3x^3}{x^2-3x+2}dx$

Phương pháp :

- Khi bậc của đa thức P(x) <2 ta sử dụng phương pháp hệ số bất định hoặc phương pháp nhảy tầng lầu.
- Khi bậc của đa thức P(x) ≥ 2 ta sử dụng phép chia đa thức để đưa tử số về đa thức có bậc < 2 .

2. ***Tam thức :*** $f(x)=ax^2+bx+c=(\alpha x+\beta)^2$ ***có nghiệm kép*** .

Công thức cần lưu ý : $\mathbf{I}=\int\frac{u'(x)}{u^2(x)}dx=-\frac{1}{u(x)}+C$

- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{1}{x^2-4x+4}dx=\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}+C$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{4x}{4x^2-4x+1}dx$.

  Đặt : $2x-1=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{dt}{2}\\2x=t+1\end{cases}$, lúc đó ta có :

  $\mathbf{I}=2\int\frac{t+1}{t^2}dx=2\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{dt}{t^2}=2\ln|t|-\frac{2}{t}+C$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^2-3}{x^2-4x+4}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$

  Phương pháp : Để tránh phức tạp khi biến đổi ta thường đặt : $\alpha x+\beta=t\Rightarrow x=\frac{t-\beta}{\alpha}$ và thay vào biểu thức trên tử số .

3. ***Tam thức :*** $f(x)=ax^2+bx+c$ ***vô nghiệm .***

- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{1}{x^2+1}dx$

  Đặt : $x=tg\alpha\Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$, ta có :

  $\mathbf{I}=\int\frac{1}{\cos^2\alpha\left(tg^2\alpha+1\right)}d\alpha=\int d\alpha=\alpha+C$ **,** với $(tg\alpha=x)$
- **< Tổng quát >** Tính $\mathbf{I}=\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$. HD Đặt $x=a tg\alpha\Rightarrow dx=\frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$, ta có :

  $\mathbf{I}=\int\frac{d\alpha}{a}=\frac{\alpha}{a}+C$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{2}{x^2+2x+2}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^2}{x^2+4}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^3}{x^2+9}dx$

C. DẠNG : $\mathbf{I}=\int\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{ax^3+bx^2+cx+d}}\mathbf{dx}$ $(\mathbf{a\neq0})$

1. ***Đa thức :*** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ***có một nghiệm bội ba.***

Công thức cần lưu ý : $\mathbf{I}=\int \frac{1}{x^n}dx=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+C\ \ (n\neq 1)$

☺ Tính $\mathbf{I}=\int \frac{1}{(x-1)^3}dx$

Nếu $x>1$, ta có : $\mathbf{I}=\int \frac{1}{(x-1)^3}dx=\int (x-1)^{-3}d(x-1)=\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$.

Nếu $x<1$, ta có : $\mathbf{I}=-\int \frac{1}{(1-x)^3}dx=\int (1-x)^{-3}d(1-x)=\frac{(1-x)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$

Vậy : $\mathbf{I}=\int \frac{1}{(x-1)^3}dx=-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$

Chú ý : $\frac{1}{x^m}=x^{-m}$, với $x>0$

Tính $\mathbf{I}=\int \frac{x}{(x-1)^3}dx$

Đặt : x – 1 = t ta có : $\mathbf{I}=\int \frac{t+1}{t^3}dt=\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+C$

Tính $\mathbf{I}=\int \frac{x^2-4}{(x-1)^3}dx$

Tính $\mathbf{I}=\int \frac{x^3}{(x-1)^3}dx$

Tính $\mathbf{I}=\int \frac{x^4}{(x+1)^3}dx$

2. *Đa thức :* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ***có hai nghiệm*** .

☺ Tính $\mathbf{I}=\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx$

Đặt : x + 1 = t , ta có : $\mathbf{I}=\int \frac{1}{t^2(t-2)}dt=\int \frac{dt}{t^3-2t^2}$

Cách 1 < *Phương pháp nhảy tầng lầu* >

Ta có : $\frac{1}{t^3-2t^2}=\frac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{3t^2-4t-4}{t^3-2t^2}\right)=\frac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{3t+2}{t^2}\right)=\frac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\right)$

Do đó : $\mathbf{I}=\int \frac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}dt-\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\right)dt=\ln\left|t^3-2t^2\right|-\frac{3}{4}\ln|t|+\frac{1}{2t}+C$.

Cách 2 < *Phương pháp hệ số bất định* >

$$\frac{1}{t^3-2t^2}=\frac{At+B}{t^2}+\frac{C}{t-2}\Rightarrow 1\equiv(A+C)t^2+(-2A+B)t-2B\Rightarrow\begin{cases}-2B=1\\-2A+B=0\\A+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-\frac{1}{2}\\A=-\frac{1}{4}\\C=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Do đó : $\int \frac{1}{t^3-2t^2}dt=-\int \frac{1}{4}\left[\frac{t+2}{t^2}-\frac{1}{t-2}\right]dt=-\int\frac{1}{4}\left[\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}-\frac{1}{t-2}\right]dt=-\frac{1}{4}\left[\ln|t|-\frac{2}{t}-\ln|t-2|\right]+C$

- Phương pháp "**nhảy tầng lầu**" đặc biệt có hiệu quả khi tử số của phân thức là một hằng số .
- Phương pháp "**hệ số bất định**" : bậc của đa thức trên tử số luôn nhỏ hơn bậc mẫu số 1 bậc .

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{2x+1}{x^2(x-2)}dx$

Để sử dụng phương pháp nhảy tầng lầu ta sẽ phân tích như sau :

$$\frac{2x+1}{x^2(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x^2(x-2)}$$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định : $\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

Do đó : $x^2 \equiv (x+2)(Ax+B) + C(x-1)^2$

Cho : x=-2, suy ra : $C = \frac{4}{9}$

x=0 , suy ra : $B = -\frac{2}{9}$

x=1, suy ra : $A = \frac{5}{9}$

Phương pháp trên gọi là phương pháp "**gán trực tiếp giá trị của biến số**" để tìm A, B, C.

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{x^3-1}{x^3+2x^2+x}dx$

3. *Đa thức :* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *có ba nghiệm phân biệt .*

☺ Tính $\mathbf{I} = \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

Cách 1. Ta có : $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2-1}{x^3-x} - \frac{3x^2-3}{x(x^2-1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2-1}{x^3-x} - \frac{3}{x}\right]$

Do đó : $\mathbf{I} = \int \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2-1}{x^3-x} - \frac{3}{x}\right]dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^3-x\right| - \frac{3}{2}\ln|x| + C$

Cách 2 . Ta có : $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 1 \equiv A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

Cho x=0, suy ra A = -1 .

x=1, suy ra $B = \frac{1}{2}$

x=-1, suy ra $C = \frac{1}{2}$

Do đó : $\mathbf{I} = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}dx$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}dx$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{x^3}{\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)}dx$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{dx}{(2x+1)\left(4x^2+4x+5\right)}$

Đặt : $2x + 1 = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$, ta có :

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\left(t^2-6\right)} = \frac{1}{24}\left[\int \frac{3t^2-6}{t^3-6t}dt - \int \frac{3t^2-18}{t\left(t^2-6\right)}dt\right] = \frac{1}{24}\ln\left|t^3-6t\right| - 3\ln|t| + C$$

4. *Đa thức :* $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ***có một nghiệm (****khác bội ba****)***

☺ Tính $\mathbf{I} = \int \frac{1}{x^3-1}dx$

Đặt $x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$, ta có :

$$\mathbf{I} = \int \frac{dt}{t\left(t^2+3t+3\right)} = \frac{1}{3}\left[\int \frac{t^2+3t+3}{t\left(t^2+3t+3\right)}dt - \int \frac{t^2+3t}{t\left(t^2+3t+3\right)}dt\right] = \frac{1}{3}\left[\int \frac{dt}{t} - \int \frac{t+3}{t^2+3t+3}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{2t+3}{t^2+3t+3}dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right] = \frac{1}{3}\ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+3t+3\right| - \alpha\sqrt{3} + C \text{ (Với } x = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}\alpha \text{)}$$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{1}{x\left(x^2+2x+2\right)}dx$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{x^3}{x^3-8}dx$

Tính $\mathbf{I} = \int \frac{1}{x^3-3x^2+3x-2}dx$

TÓM LẠI : ***Ta thường sử dụng hai phép biến đổi :***

① **Tử số là nghiệm của mẫu số .**

② **Tử số là đạo hàm của mẫu số .**

và phân thức được quy về 4 dạng cơ bản sau :

❶ $\frac{1}{ax+b} \underbrace{\leftrightarrow}_{\text{ứng với}} \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

❷ $\frac{u'}{u} \underbrace{\leftrightarrow}_{\text{ứng với}} \int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$

❸ $\dfrac{u'}{u^n}\ (n\ge 2) \underbrace{\leftrightarrow}_{\text{ứng với}} \displaystyle\int \frac{u'}{u^n}dx = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$

❹ $\dfrac{1}{(x+d)^2+a^2} \underbrace{\leftrightarrow}_{\text{ứng với}} \displaystyle\int \frac{1}{(x+d)^2+a^2}dx = \frac{a}{a} + C$, với $x+d = a\text{tg}\alpha$

D. DẠNG : $I=\int \dfrac{Q(x)}{P(x)}dx$ < P(x) là đa thức bậc cao> VÀ MỘT SỐ KĨ THUẬT TÌM NGUYÊN HÀM .

1. Kĩ thuật biến đổi tử số chứa nghiệm của mẫu số .

Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)(x+7)(x+8)}$

HD : $I=\displaystyle\int \frac{x(x+7)-(x-1)(x+8)}{x(x-1)(x+7)(x+8)}dx$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$

HD : $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{1}{8}\int \frac{(x^2+9)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+9)}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+6x^4-13x^2-42}$

HD : $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)(x^2+7)}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{5x^5+20x}$

HD : $I=\displaystyle\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x(x^4+4)} = \frac{1}{20}\int \frac{(x^4+4)-x^4}{x(x^4+4)}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{x^7-10x^3}$

HD : $I=\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^4-10)} = \frac{1}{10}\int \frac{x^4-(x^4-10)}{x^3(x^4-10)}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2)(2x^2+1)(3x^2-4)}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{x^8-10x^6+35x^4-50x^2+24}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^4+4x^3+6x^2+4x-9)}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^4-1}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^4-1}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^4+1}$

Tính $I=\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^6-1}$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^6dx}{x^6-1}$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{dx}{3x^{100}+5x}$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x\left(2x^{50}+7\right)^2}$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{\left(1-x^{2000}\right)dx}{x\left(1+x^{2000}\right)}$

2. Kĩ thuật đặt ẩn phụ với tích phân có dạng : $\mathbf{I}=\int\frac{P(x)}{(ax+b)^{\alpha}}dx$ $(\alpha\neq 1)$

☺ Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^3+x+1}{(x-2)^{30}}dx$

Đặt $x-2=t\Rightarrow\begin{cases}dx=dt\\x=t+2\end{cases}$, ta có :

$$\mathbf{I}=\int\frac{(t+2)^3+t+3}{t^{30}}dt=\int\frac{t^3+6t^2+13t+11}{t^{30}}dt=-\left[\frac{1}{26t^{26}}+6\frac{1}{27t^{27}}+13\frac{1}{28t^{28}}+11\frac{1}{29t^{29}}\right]+C=\ldots$$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^4}{(x-3)^{45}}dx$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{3x^4-5x^3+7x-8}{(x+2)^{50}}dx$

Chú ý : *Với loại toán này trong cuốn* **"Tích Phân – T.Phương "** *đã sử dụng phương pháp khai triển Taylor nhưng tôi cảm thấy cách làm này không nhanh hơn lại gây nhiều phức tạp cho học sinh nên đã không nêu ra .*

3. Kĩ thuật biến đổi tử số chứa đạo hàm của mẫu số .

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{xdx}{x^4-1}$

Đặt $x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^3dx}{x^4+1}$

☺ Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+\mathbf{C}$$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^2}{x^4+1}dx$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{\left(x^2-1\right)}{x^4-5x^3-4x^2-5x+1}dx$

Tính $\mathbf{I}=\int\frac{\left(x^2+1\right)}{x^4+2x^3-10x^2-2x+1}dx$

- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{\left(x^2-2\right)}{x^4-3x^3+11x^2-6x+4}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{\left(x^2+3\right)}{x^4-2x^3-2x^2+6x+9}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^4-3x^2+4}$

Bình luận : ***Loạt bài toán này làm tôi khá ấn tượng với phép chia cả tử số và mẫu số cho*** x^2***. Quả thật tôi luôn cố gắng tìm tòi xem liệu mình có thể nghĩ ra một phương pháp nào khác hay hơn chăng, nhưng …" bó tay.com " . Thế mới hiểu toán học : "****luôn tiềm ẩn những vẻ đẹp làm người ta sửng sốt".***

- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^5}{x^6+1}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x}{x^6-1}dx$

  Đặt $x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt$, ta có : $\mathbf{I}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^3-1}$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^3}{x^6-1}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^3+x}{x^6+1}dx$ **HD :** $\mathbf{I}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3\right)}{x^6+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{x^6+1}$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^3}{x^6+1}dx$ **HD :** $\mathbf{I}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\left(x^2\right)^3+1}d\left(x^2\right)$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x-1\right)}{x^6-14x^3-1}dx$

  HD : $\mathbf{I}=\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}+2\right)}{\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-14}dx=\int\frac{\left(x-\frac{1}{x}+2\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-14}d\left(x-\frac{1}{x}\right)$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^{19}}{\left(3+x^{10}\right)^2}dx$

HD . $\mathbf{I}=\int\frac{x^{10}.10x^9}{\left(3+x^{10}\right)^2}dx=\frac{1}{10}\int\frac{x^{10}}{\left(3+x^{10}\right)^2}d\left(x^{10}\right)$

- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^{99}}{\left(2x^{50}-3\right)^7}dx$
- Tính $\mathbf{I}=\int\frac{x^{2n-1}}{\left(ax^n+b\right)^k}dx$

4. Kĩ thuật chồng nhị thức .

Cơ sở của phương pháp :

Để tìm nguyên hàm có dạng : $I=\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^m}dx$ **, ta dựa vào cơ sở :** $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

và phân tích biểu thức dưới dấu tích phân về dạng :

$$I=k\int f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)\frac{dx}{(cx+d)^2}=k\int f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$$

VD . Tính

$$I=\int \frac{(3x-5)^{10}}{(x+2)^{12}}dx=\int\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{10}\frac{dx}{(x+2)^2}=\frac{1}{11}\int\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{10}d\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)=\frac{1}{121}\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{11}+C$$

Tính $I=\int \frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx$

Tính $I=\int \frac{dx}{(x+3)^5(x+5)^3}$

HD . $I=\int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5(x+5)^8}=\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5}\frac{1}{(x+5)^6}\frac{dx}{(x+5)^2}=\frac{1}{2^6}\int\frac{1}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5}\left[\frac{(x+3)-(x+5)}{x+5}\right]^6\frac{dx}{(x+5)^2}$

Để tránh sự đồ sộ trong tính toán ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ như sau :

Đặt $\frac{x+3}{x+5}=t\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{(x+5)^2}dx=\frac{dt}{2}\\ \frac{x+5-2}{x+5}=t\Rightarrow\frac{1}{x+5}=\frac{1-t}{2}\end{cases}$, nên ta có :

$$\frac{1}{2^6}\int\frac{1}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5}\left[\frac{(x+3)-(x+5)}{x+5}\right]^6\frac{dx}{(x+5)^2}=\int\frac{1}{2^7}\frac{(t-1)^6dt}{t^5}$$

Tính $I=\int \frac{dx}{(3x-2)^7(3x+4)^3}$

Tính $I=\int \frac{dx}{(2x-1)^3(3x-1)^4}$

Đặt $\frac{3x-1}{2x-1}=t\Rightarrow-\frac{1}{(2x-1)^2}dx=dt$ và $\frac{1}{2x-1}=2t-3$

Do đó ta có : $I=\int\frac{dx}{(2x-1)^3(3x-1)^4}=\int\frac{dx}{(2x-1)^7\left(\frac{3x-1}{2x-1}\right)^4}=-\int\frac{(2t-3)^5dt}{t^4}$

TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

A. Sử dụng thuần tuý các công thức lượng giác .

Công thức hạ bậc : $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

VD . Tìm họ nguyên hàm : $\int \cos^2 x dx$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Bài tập . Tìm họ nguyên hàm :

1 . $\int \sin^2 x dx$ **2** . $\int \cos^4 x dx$ **3**. $\int \cos^4 3x dx$

4. $\int \sin^2 5x dx$ **5** . $\int \sin^4 5x dx$ **6** . $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$

Công thức hạ bậc : $\sin^3 x = \dfrac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}$; $\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$

Bài tập . Tìm họ nguyên hàm :

1 . $\int \sin^6 x dx$ **2** . $\int \cos^6 3x dx$ **3**. $\int \cos^6 4x dx$

Công thức biến đổi tích thành tổng :

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

VD . Tìm họ nguyên hàm : $\int \sin 2x.\cos x dx$

$$\int \sin 2x\cos x dx = \int \frac{1}{2}[\sin 3x + \sin x]dx = \frac{1}{6}\int \sin 3x d(3x) + \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

Bài tập . Tìm họ nguyên hàm :

1 . $\int \sin x \cos 3x dx$ **2** . $\int \cos x.\cos 2x.\cos 3x dx$ **3**. $\int \cos 4x.\sin 5x.\sin x dx$

Công thức cộng :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

VD . $$\int \frac{dx}{\sin 2x - \sin 10x} = \frac{1}{2\cos 10}\int \frac{\cos\left[(x+5)-(x-5)\right]}{\cos(x+5)\cos(x-5)} = \frac{1}{2\cos 10}\int\left[\cot g(x-5) + tg(x+5)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\cos 10}\ln\left|\frac{\sin(x-5)}{\cos(x-5)}\right| + C$$

Bài tập : **1.** $\int \dfrac{dx}{\sin 2x - \sin x}$ **2.** $\int \dfrac{dx}{\sin x + \sin 3x}$ **3.** $\int \dfrac{dx}{1-\sin x}$

B. Tính tích phân khi biết d(ux)) .

VD . Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos x dx$

Đặt $t=\sin x,\ t\in[0;1]$. Khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=1$ và $dt=\cos xdx$. Do đó :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x.\cos xdx=\int_0^1 t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

Với loại tích phân này học sinh có thể tự sáng tạo ra một loạt các bài toán, tôi thử đưa ra một vài phương án :

- Biết $d(\sin x) \rightleftarrows \mathbf{\cos xdx}$.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.\cos xdx$ **2.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^n x}dx\left(n\in N^*, n\neq 1\right)$ **3.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}tg^3xdx$

4. $\int(\sin 3x)^{10}(\cos 3x)^5dx$ **5.** $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2x+3\sin x+2}$

- Biết $d(\cos x) \rightleftarrows -\mathbf{\sin xdx}$.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.\sin xdx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^n x}dx\left(n\in N^*, n\neq 1\right)$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$

4. $\int(\sin 2x)^7(\cos 2x)^{100}dx$ **5.** $\int\frac{\sin xdx}{\cos^3x-1}$

- Biết $d(tgx) \rightleftarrows \mathbf{\frac{1}{\cos^2x}dx}$.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(tg^3x+tgx\right)dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3x}dx$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(tg3x)^7}{(\cos 3x)^6}dx$

4. $\int\frac{1}{\cos^4x}dx$ **5.** $\int\frac{dx}{\cos^{2n}x}$ **6.** $\int\left(tg^5x+tg^4x+tg^3x+tg^2x+1\right)dx$

- Biết $d(cotgx) \rightleftarrows -\mathbf{\frac{1}{\sin^2x}dx}$.

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(cotg^3x+cotgx\right)dx$ **2.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^5x}dx$ **3.** $\int\frac{(cotg5x)^{10}}{(\cos 5x)^8}dx$

4. $\int\frac{1}{\sin^4x}dx$ **5.** $\int\frac{dx}{\sin^{2n}x}$ **6.** $\int\left(cotg^5x+cotg^4x+cotg^3x+cotg^2x\right)dx$

- Biết $d(\sin x\pm\cos x) \rightleftarrows (\mathbf{\cos x\pm\sin x})\mathbf{dx}$

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$ **2.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx$ **3.** $\int\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

4. $\int\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x-3\cos x+1}dx$ **5.** $\int\frac{(\sin 2x+2\cos 4x)dx}{\cos 2x-\sin 4x}$

- Biết $d\left(a\sin^2x\pm b\cos^2x\pm c\sin 2x\pm d\right) \rightleftarrows (\mathbf{a\mp b\pm c})\mathbf{\sin 2xdx}$

1. $\int\frac{\sin 2x}{3\sin^2x+\cos^2x}dx$ **2.** $\int\frac{\sin 2x}{2\sin^2x-4\sin x\cos x+5\cos^2x}$

- Biết $d(\mathbf{f(x)})$ với $f(x)$ là một hàm lượng giác bất kì nào đó .

VD . Chọn $f(x)=\sin x+tgx \Rightarrow d\left(f(x)\right)=\cos x+\frac{1}{\cos^2x}=\frac{\cos^3+1}{\cos^2x}$

Như vậy ta có thể ra một bài toán tìm nguyên hàm như sau : $\int \frac{(\sin x+\text{tg}x)(\cos^3x+1)}{\cos^2x}dx$

Để tăng độ khó của bài toán bạn có thể thực hiện một vài phép biến đổi ví dụ :

$$\frac{(\sin x+\text{tg}x)(\cos^3x+1)}{\cos^2x}=\frac{\sin x(1+\cos x)(\cos^3x+1)}{\cos^3x}=\sin x(1+\cos x)\left(1+\frac{1}{\cos^3x}\right)$$

Từ đó ta có bài toán tìm nguyên hàm : $\int \sin x(1+\cos x)\left(1+\frac{1}{\cos^3x}\right)dx$

Dĩ nhiên để có một bài tìm nguyên hàm nhìn đẹp mắt lại phụ thuộc vào việc chọn hàm f(x) *và khả năng biến đổi lượng giác của bạn !*

VD . Tôi chọn hàm số : $f(x)=\text{tg}x-\text{cotg}x \Rightarrow d(f(x))=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}=\frac{4}{\sin^2 2x}$, như vậy tôi có thể ra một bài toán nhìn " tạm được " như sau : *Tìm họ nguyên hàm :* $\int \frac{(\mathbf{tgx - cotgx})^{2007}}{\mathbf{sin^2 2x}}\mathbf{dx}$

Nếu thấy chưa hài lòng ta thử biến đổi tiếp xem sao ?

Ta có : $\text{tg}x-\cot gx=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x.\cos x}=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\Rightarrow\frac{(\text{tgx - cotgx})^{2007}}{\sin^2 2x}=\frac{2^{2007}\cos^{2007}2x}{\sin^{2009}2x}$

Vậy bạn sẽ có một bài toán mới : *Tìm họ nguyên hàm :* $\int\frac{\mathbf{cos^{2007}2x}}{\mathbf{sin^{2009}2x}}\mathbf{dx}$ .. Có thể bạn sẽ thấy buồn khi bài toán này lại có cách giải ngắn hơn con đường chúng ta đi !

Nhưng dẫu sao cũng phải tự an ủi mình : " ***Thực ra trên mặt đất làm gì có đường*** .."

☺ Chẳng lẽ chúng ta không thu lượm được điều gì chăng ? Nhưng tôi lại có suy nghĩ khác, biết đâu những nhà viết sách lại xuất phát từ những ý tưởng như chúng ta ...???

Hãy thử xét sang một dạng toán khác :

C. Tạo ra d(u(x)) để tính tích phân .

VD . Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

Rõ ràng bài toán không xuất hiện dạng : $\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u)du$

Vậy để làm được bài toán, một phương pháp ta có thể nghĩ đến là tạo ra d(u(x)) như sau :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos xdx}{\cos^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$$

Bạn có nghĩ rằng mình cũng có khả năng sáng tạo ra dạng toán này !

☆ Tạo d(sinx) ⇄ **cosxdx** .

1. $\int\frac{dx}{\sin^4x\cos x}$ **2.** $\int\frac{\text{tg}^4x}{\cos x}dx$ **3.** $\int\frac{dx}{\cos^3x}$

4. $\int\frac{\sin^2x}{\cos x}dx$ **5.** $\int\frac{\cos^2xdx}{\cos 3x}$ **6.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5x\cos x}}$

☆ Tạo d(cosx) ⇄ **−sinxdx** .

1. $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$ **2.** $\int\frac{dx}{\sin^3x}$ **3.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3x}{\sin^5x}dx$

4. $\int \frac{dx}{\sin x\left(\cos^3 x - 1\right)}$ **5.** $\int \frac{dx}{\sin x\cos^6 x}$ **6.** $\int \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}$

☆ Tạo $d(tgx) \rightleftarrows \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2x}}\mathbf{dx}$.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$ **3.** $\int \frac{dx}{(\sin x)^3(\cos x)^3}$

4. $\int tg^8 x dx$ **5.** $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 3\cos^2 x}$ **6.** $\int \frac{1}{(\sin x - 2\cos x)^2}dx$

☆ Tạo $d(cotgx) \rightleftarrows -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin^2x}}\mathbf{dx}$.

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cotg^3 x dx$ **2.** $\int \frac{1}{\sin^2 x - 2\cos^2 x}dx$ **3.** $\int \frac{(cotg5x)^{10}}{(\sin 5x)^8}dx$

4. $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$ **5.** $\int \frac{dx}{\sin^{2n} x}$

☆ Tạo $d(tg\frac{x}{2}) \rightleftarrows \frac{1}{2}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2\frac{x}{2}}}\mathbf{dx}$. < Phép đặt ẩn phụ t= $tg\frac{x}{2}$ > .

1. $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$ **2.** $\int \frac{1}{2\cos 3x + 7\sin 3x}dx$ **3.** $\int \frac{dx}{2\sin x + 5\cos x + 3}$

4. $\int \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2\cos x + 3}dx$ **5.** $\int \frac{7\sin x - 5\cos x}{(3\sin x + 4\cos x)^2}$

D. SÁNG TẠO BÀI TẬP

Nếu được phép hỏi, tôi sẽ hỏi rằng bạn có cảm thấy nhàm chán khi bạn cứ suốt ngày ôm lấy một cuốn sách tham khảo và làm hết bài tập này đến bài tập khác, mà đôi lúc bạn vẫn cảm giác rằng khả năng giải toán của mình không giỏi lên. Còn tôi đam mê môn Toán từ khi tôi biết thế nào là sáng tạo .. Bạn có muốn thử xem mình có khả năng sáng tạo hay không ?

Dù khả năng sáng tạo bài tập được xuất phát từ những bản chất rất sơ đẳng, có thể bạn sáng tạo một bài toán mà bạn đã bắt gặp ở một cuốn sách nào đó.. nhưng dẫu sao nó vẫn mang " dáng dấp " của bạn .

Tôi mạn phép tư duy để cùng tham khảo cho " vui " !

Tôi sẽ lấy một hàm số f(x) nào đó mà tôi thích, rồi đạo hàm để tìm d(f(x)) .

h Tôi chọn : $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $f'(x) = 4\left(\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x\right) = 2.\sin 2x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = -\sin 4x$

Một bài toán đơn giản được tạo ra : ***Tính*** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$

Một bài toán nhìn khá đẹp mắt, bạn đã gặp ở đâu chưa ? Nếu gặp bài toán này trước khi bạn biết sáng tạo bạn giải quyết nó như thế nào ?

Để tăng khả năng " *đánh lừa trực giác* " bạn có thể tạo mẫu số thành một hàm số hợp nào đó quen thuộc , ví dụ :

Tính các tích phân sau :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}}dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^{2007}}dx$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\cos^2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{tg\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)}dx$

Biết đâu một lúc nào đó có ai hỏi tôi về cách giải các bài toán trên tôi lại ☺ quên ..!!!!!

Tôi biết bạn sẽ nghĩ tư duy kiểu này " cũ rích " . Vậy sao ta không thử tư duy một kiểu nào đó cho hơi "lạ" một tý :

$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x)^2$ .. ☞ Bài toán này sẽ xuất phát từ đâu ?

Tính : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$

i Nếu như xuất phát từ lượng giác để tạo ra các bài toán tích phân của hàm lượng giác nghe có vẻ hiển nhiên quá, ta hãy xuất phát từ hàm phân thức hữu tỷ xem sao ?

Tôi sẽ xuất phát từ bài toán tìm nguyên hàm : $I = \int \frac{dx}{x^2 - 1}$.

Tôi sẽ đặt : x=tgt $\Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt = \left(1 + tg^2 t\right)dt$ và ra mắt bài toán : $\mathbf{I = \int \frac{1 + tg^2 x}{1 - tg^2 x}dx}$

Bạn sẽ suy nghĩ rằng " ***quá đơn giản*** " .. nhưng bạn sẽ cho cách giải thế nào với bài toán này :

$\mathbf{I = \int \frac{1}{1 - tg^2 x}dx}$, phải chăng bạn sẽ nghĩ $\mathbf{I = \int \frac{1}{1 - tg^2 x}dx} = \int \frac{d(tgx)}{\left(1 - tg^2 x\right)\left(1 + tg^2 x\right)}$ ..hãy nhường chỗ cho những lời giải thông minh hơn ..!!!

a Bạn đang ôn thi đại học, bạn đọc khá nhiều tài liệu.. đôi khi bạn sẽ gặp những bài toán khó hay những lời giải dài dòng hơn bạn.. bạn thấy mình đang từng ngày tiến bộ . Đôi khi bạn gặp một phương pháp nào đó với tên gọi làm bạn hoảng hốt . **Hãy dừng lại và tư duy, bạn sẽ tìm ra lời giải đáp !**

Tôi đơn cử một ví dụ .. Khi bạn đọc tài liệu bạn thấy cụm từ " tích phân liên kết" có thể bạn bỏ qua vì nghĩ rằng "quá khó "

VD . Tính $E = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$

Lời giải : Xét tích phân liên kết với E là $E_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

Ta có : $\begin{cases} E + E_1 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int dx = x + C_1 \\ E - E_1 = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C_2 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình suy ra : $\begin{cases} E = \frac{1}{2}\left(x + \ln|\sin x + \cos x|\right) + C \\ E_1 = \frac{1}{2}\left(x - \ln|\sin x + \cos x|\right) + C \end{cases}$

Bình luận : *Sự đồ sộ làm bạn hoảng hốt, nhưng hãy suy nghĩ xem thực chất nó cũng chỉ là một phép tách đơn giản :*

$$E = \frac{1}{2}\int \frac{\left[(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)\right]dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{2}x + \ln|\sin x + \cos x| + C$$

Nếu chưa thực sự tin bạn có thể thử với một loạt các bài toán khác tương tự :

1. $\int \frac{\sin x}{3\cos x + 7\sin x}dx$ **2.** $\int \frac{\sin 3x}{2\cos 3x - 5\sin 3x}dx$ **3.** $\int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$

Việc đưa ra bài toán trên chỉ là sự đúc rút kinh nghiệm không phải là sự sáng tạo, nhưng nó giúp chúng ta lí giải được một điều quan trọng trong sáng tạo bài tập : là muốn có một bài tập hay bạn cần kết hợp nhiều phép biến đổi và dĩ nhiên đòi hỏi bạn phải kiên trì và một chút yếu tố " may mắn ".

d Tôi thử lấy hàm số : $f(x) = 2\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x$ và tách nó thành 2 kiểu khác nhau :

Kiểu1. $f(x) = 2\sin^2 x - \sin 2x + 5\cos^2 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \left(\sin x + 2\cos x\right)^2 = 1 + \left(\sin x + 2\cos x\right)^2 = 1 + u^2$

Kiểu2. $f(x) = 2\sin^2 x - \sin 2x + 5\cos^2 x = 6\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - \left(\cos x - 2\sin x\right)^2 = 6 - \left(\cos x - 2\sin x\right)^2 = 6 - v^2$

ở kiểu1. $u' = \cos x - 2\sin x$ và kiểu2 $v' = -\sin x - 2\cos x \Rightarrow u' + v' = -3(\sin x + \cos x)$

Vậy phải chăng bài toán này sẽ rất khó : $\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x}dx$

Tôi nhìn thấy bạn đang cười " chế diễu " bởi bạn đã bắt gặp nó..nhưng có 2 điều tôi muốn nói với bạn :

- ***Hãy giải bài toán này bằng một cách thật thông minh .***
- ***Hãy " mượn tạm " tư duy này để ra bài tập .***

Bạn đã quá quen với bài toán này : $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ nhưng tôi khẳng định bạn sẽ có một chút băn khoăn với bài toán :

Tìm họ nguyên hàm : $I = \int \frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x + \sin^2 x + \sin x + 1\right)}{\sin^6 x - 1}dx$

Giải

$$I = \int \frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x + \sin^2 x + \sin x + 1\right)}{\sin^6 x - 1}dx = \int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin^6 x - 1} + \int \frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x + \sin^2 x + 1\right)}{\sin^6 x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\sin^3 x\right)}{\left(\sin^3 x\right)^2 - 1} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\sin^2 x\right)}{\sin^2 x - 1}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x\right) + C$$ .. ***bạn tìm lời giải nhanh hơn nhé*** !

Bài toán trên " bị lộ ý tưởng giải toán khi xuất hiện : $\sin^4 x + \sin^2 x + 1$ nhưng bài toán này bạn hãy giải quyết dùm

Tìm họ nguyên hàm : $I = \int \frac{\sin x\cos x(\sin x + 1)}{\sin^6 x - 1}dx$

Với ý tưởng này bạn có thể ung dung nghĩ rằng : người khác sẽ đau đầu vì bài toán của bạn ! Hãy thử theo ý tưởng của bạn, đảm bảo tôi sẽ " bó tay . com .vn " ...!!!

DÙNG ĐỒ CỦA NGƯỜI KHÁC CẢM ZÁC KHÔNG THOẢI MÁI…NHƯNG .. DÙNG MÃI MÀ NGƯỜI TA KHÔNG BẮT TRẢ LẠI THÌ THÀNH CỦA MÌNH ! <☺ .. *triết lí không ?* >

Đêm khuya lắm rồi, tạm chia tay với tích phân hàm lượng giác ! Nhường lại sân chơi cho các bạn !

Tìm họ nguyên hàm : $\int \frac{\sin 4x + \cos 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x}dx$ *(Với giá dùng thử chỉ có 4 dấu " = ")*

Vì đời phụ kiếp tài hoa
Vì người gian dối hay ta đa tình ..?!

TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

VD . Tính $\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^2 |x-1|dx = -\int_0^1 (x-1)d(x-1) + \int_1^2 (x-1)d(x-1)$

$$= (1-x)\Big|_0^1 + (x-1)\Big|_1^2 = -2$$

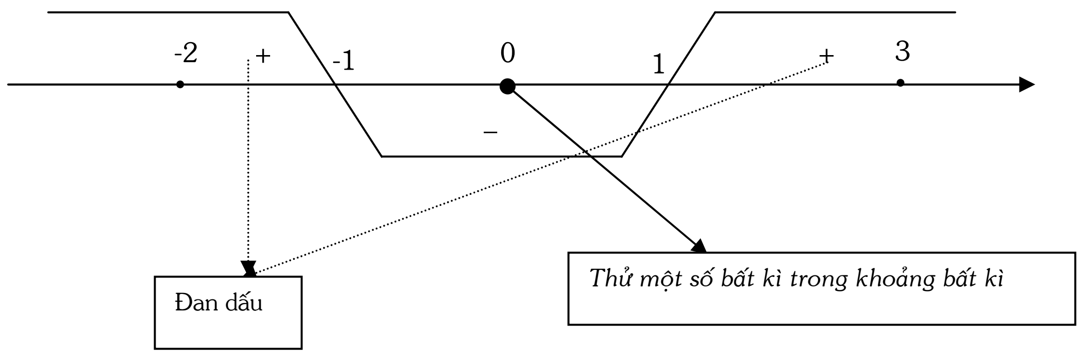
Tích phân của hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối không khó lắm, nó phụ thuộc hoàn toàn vào khả năng xét dấu của hàm số trong dấu giá trị tuyệt đối .

Khi xét dấu của hàm đa thức chứa trong dấu giá trị tuyệt đối bạn cần lưu ý một " **mẹo vặt** " : *Đa thức có n nghiệm thì ta xét trên (n+1) khoảng. Đa thức bậc n có n nghiệm thì đan dấu trên các khoảng, khác n nghiệm thì mất tính đan dấu .*

VD1 . Tính $\int_{-2}^{3}\left|x^2-1\right|dx$

Nháp : $x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ (tam thức bậc 2 có 2 nghiệm)

xét dấu :



Giải . $\int_{-2}^{3}\left|x^2-1\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left|x^2-1\right|dx+\int_{-1}^{1}\left|x^2-1\right|dx+\int_{1}^{3}\left|x^2-1\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\frac{28}{3}$

VD2. Tính $\int_{-1}^{1}\left|x^3-x^2\right|dx$

Chúng ta thường nhầm lẫn khi xét dấu là đa thức có 2 nghiệm và đan dấu trên 3 khoảng sẽ cho kết quả sai ! Hãy làm như sau :

$$\int_{-1}^{1}\left|x^3-x^2\right|dx=\int_{-1}^{1}x^2\left|x-1\right|dx=\int_{0}^{1}x^2\left|x-1\right|dx+\int_{1}^{2}x^2\left|x-1\right|dx=\ldots$$

Các bài tập rèn luyện :

1. $\int_{0}^{2}\left|x^3-x\right|dx$ **2.** $\int_{-1}^{2}\left|\left|x\right|-1\right|dx$ **3.** $\int_{0}^{1}\sqrt{9x^2-6x+1}dx$ **4.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{1+\cos 2x}dx$ **5.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^3x-\cos^2x}dx$

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

1. Tích phân dạng : $\int_{a}^{b}P(x)\sin x dx$, $\int_{a}^{b}P(x)\cos x dx$

Đặt u = P(x) để giảm bậc của P(x) .

VD . Tính $\int_{0}^{\pi}x^2\sin x dx$

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u=x^2 \\ dv=\sin x dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du=2xdx \\ v=-\cos x \end{array}\right.$. Do đó :

$$\int_{0}^{\pi}x^2\sin x dx=x^2(-\cos x)\Big|_0^{\pi}+\int_{0}^{\pi}2x\cos x dx=\pi^2+2\int_{0}^{\pi}x\cos x dx$$

Ta sẽ tính tích phân : $\int_{0}^{\pi}x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$. Do đó :

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = x.\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2$$

Vậy $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$

Bài tập tự luyện :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$ **2.** $\int_0^{\pi} x^3 \cos x dx$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\cos^2 x dx$ **4.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^3 x dx$ **5.** $\int_0^{\pi} x^3 \sin^3 \frac{x}{2} dx$

2. Tích phân dạng : $\int_a^b P(x)\ln x dx$

Đặt **dv = P(x)dx** ***để dễ tìm*** **v .**