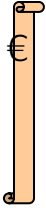


Ph ậ n l ý th u ố t



S ă nh ngh ị a : Giả s ử $f(x)$ là m ộ t h ằ m số li ề n t ứ c tr ê n m ộ t k ỏ a ằ ng K , a và b là h ả i p ầ n t ử b ấ t k ỳ c ủ a K , $F(x)$ là m ộ t ng ư ề n h ằ m c ủ a $f(x)$ tr ê n K . H ệ u số $F(b) - F(a)$ đ ư ợ c g ọ i là t ớ c p ầ n t ừ a đ ế n b c ủ a $f(x)$ và đ ư ợ c k ớ h ệ u là

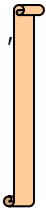
$\int_a^b f(x)dx$. Ta đ ể ng k ớ h ệ u $F(x) \Big|_a^b$ ® ố ch ữ h ệ u s ề : $F(b) - F(a)$

C ồng th ố c Newton - Leibniz : $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

V ớ d ồ : $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$

Ch ứ y : T ớ c p ầ n t ừ $\int_a^b f(x)dx$ ch ỉ p ồ th ứ c và f , a và b mà k ằ ng p ồ th ứ c và o k ớ h ệ u bi ể n s ề t ớ c p ầ n t ừ . V ậ y ta

c ả th ố vi ế t : $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \dots$



C ả c t ớ c ch ế t c ủ a t ớ c p ầ n t ừ .

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b \alpha f(x) \pm \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$

VD : $\int_1^e 2x + \frac{3}{x} dx = 2 \int_1^e x dx + 3 \int_1^e \frac{1}{x} dx = x^2 \Big|_1^e + 3 \ln x \Big|_1^e = (e^2 - 1) + 3(1 - 0) = e^2 + 2$

4. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

VD : $\int_{-1}^1 |x|dx = \int_{-1}^0 |x|dx + \int_0^1 |x|dx = - \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 x dx = - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1$

5. $f(x) \geq 0$ tr ầ n ® ố t n [a ; b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

6. $f(x) \geq g(x)$ tr ầ n ® ố t n [a ; b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

VD : Ch ớ ng minh r ằ ng : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

7. $m \leq f(x) \leq M$ tr ầ n ® ố t n [a ; b] $\Rightarrow m(b - a) = m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \int_a^b dx = M(b - a)$

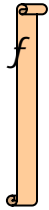
VD : Ch ớ ng minh r ằ ng : $2 \leq \int_1^2 x + \frac{1}{x} dx \leq \frac{5}{2}$

HD . Kh ắ o s ắ t h ằ m s ề $y = x + \frac{1}{x}$ tr ầ n ® ố t n [1 ; 2] ta c ả : $\max_{[1;2]} y = \frac{5}{2}$; $\min_{[1;2]} y = 2$



$$\text{Do } \textcircled{a} : 2 \int_1^2 dx \leq \int_1^2 x + \frac{1}{x} dx \leq \frac{5}{2} \int_1^2 dx \Rightarrow 2x \Big|_1^2 \leq \int_1^2 x + \frac{1}{x} dx \leq \frac{5}{2} x \Big|_1^2 \Rightarrow 2 \leq \int_1^2 x + \frac{1}{x} dx \leq \frac{5}{2}$$

Ph ư - ơ ng ph ậ p



Ph ư - ơ ng ph ậ p ặ i bi ố n s ề : $t = v(x)$.

VD . T ớ nh t ớ ch ph ậ n : $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$

S ắ t : $t = x^2 + 1$. Khi $x = 0$ th ấ $t = 1$, khi $x = 1$ th ấ $t = 2$.

Ta c ấ : $dt = 2x dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x dx$. Do ặ :
 $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$

? Quy tr ườ gi ớ i t ố n . $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(v(x))v'(x) dx$

B ứ c 1 . S ắ t $t = v(x)$, $v(x)$ c ấ ộ h ầ m li ầ n t ồ c, ặ i c ể n .

B ứ c 2 . Bi ố u th ể $f(x) dx$ theo t và dt : $f(x) dx = g(t) dt$

B ứ c 3 . T ớ nh $\int_{v(a)}^{v(b)} g(t) dt$.

@ B ầ i t ể p r ồ n l ườ n ph ư - ơ ng ph ậ p :

T ớ nh c ấ c t ớ ch ph ậ n sau :

1. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$

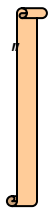
3. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$

4. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^4 - 1}$

5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x}$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x+1}}$

7. $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$



Ph ư - ơ ng ph ậ p ặ i bi ố n s ề : $x = u(t)$.

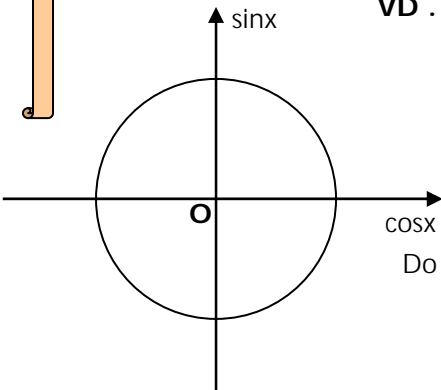
VD . T ớ nh t ớ ch ph ậ n : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

S ắ t $x = \sin t$ $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Khi $x = 0$ th ấ $t = 0$, khi $x = 1$ th ấ $t = \frac{\pi}{2}$

V ể y ví i $x = \sin t$ th ấ $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ và $dx = \cos t dt$.

Do ặ : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$



? Quy tr ườ gi ớ i t ố n . $\int_a^b f(x) dx$

B ứ c 1 . S ắ t $x = u(t)$, $t \in \alpha; \beta$ sao cho $u(t)$ c ấ ộ h ầ m li ầ n t ồ c tr ầ n ộ o 1 n $\alpha; \beta$, $f(u(t))$ ộ i c x, c ộ nh tr ầ n ộ o 1 n $\alpha; \beta$ và $u(\alpha) = a; u(\beta) = b$.



Bước 2 . Biểu th ệ f(x)dx theo t và dt : f(x)dx = g(t)dt

Bước 3 . T ỉnh $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$.

@ **Bài t ậ p r ề n luy ệ n ph ư -ng ph ậ p** :

T ỉnh c ấ c t ỉch ph ậ n sau :

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

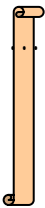
2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

4. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

5. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx$

6. $\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx$ (S ă t x=5cos2t)



Ph ư -ng ph ậ p ậ i bi ệ n s ệ : u(x,t)

VD1 . T ỉnh t ỉch ph ậ n : $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$

Cách (1) S ă t $\sqrt{1+x^2} = x-t \Rightarrow 1 = -2xt+t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$

Khi x=0 th ậ t=-1, khi x=1 th ậ t=1-√2 và $dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt$. Do ậ :

$$I = \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{-t^2-1}{2t} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{t^4+2t^2+1}{t^3} dt = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} t dt + 2 \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{1}{t} dt + \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{1}{t^3} dt =$$

$$= -\frac{t^2}{8} \Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{8t^2} \Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cách (2) : S ă t x=tgt , do x ∈ 0;1 n ậ n ta c ấ th ộ ch ậ t ∈ 0; $\frac{\pi}{4}$. Khi x=0 th ậ t=0, khi x=1 th ậ t = $\frac{\pi}{4}$

và $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$. Do ậ :

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+tg^2 t} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{|\cos t|} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^4 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin t)+(1+\sin t)}{(1-\sin t)(1+\sin t)} d(\sin t) = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t} d(\sin t) =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t} d(\sin t) = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{(1-\sin t)(1+\sin t)} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\sin t} - \frac{1}{1+\sin t} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \frac{\sin t}{\cos^2 t} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

B ậ nh luy ệ n : Bài toán này còn gi ả đ ượ c b ằ ng ph ư ớ ng ph ậ p t ỉch ph ậ n t ừ ng ph ậ n . Còn v ớ i 2 cách gi ả đ ượ c tr ề n r ồ ràng khi bắt g ặ p cách 1) ta nghĩ rằng nó sẽ ch ứ a đ ượ c nh ữ ng ph ệ p t ỉnh toán ph ứ c t ậ p còn cách 2) sẽ ch ứ a nh ữ ng ph ệ p t ỉnh toán đ ồ n g ắ n h ớ n . Nh ữ ng ng ượ c l ậ i sự suy đ ắ n - cách 2) l ậ i ch ứ a nh ữ ng ph ệ p t ỉnh toán dài đ ồ ng và nếu qu ả th ậ t không khá t ỉch ph ậ n thì ch ứ a h ắ n đ ấ là đ ượ c ho ặ c làm đ ượ c mà l ậ i dài đ ồ ng h ớ n .

VD2 . T ỉnh t ỉch ph ậ n : $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Cách (1) S ă t $\sqrt{1+x^2} = x-t \Rightarrow 1 = -2xt+t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$

Khi $x=0$ th $t=-1$, khi $x=1$ th $t=1-\sqrt{2}$ và $dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt$. Do ă :

$$I = \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{-2t}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = - \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{1}{t} dt =$$

$$= -\ln|t| \Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}} = -\ln(\sqrt{2}-1)$$

Cách (2) : S ă t $x=\text{tg}t$, do $x \in 0;1$ n ă n ta c ă th ố ch ă n $t \in 0; \frac{\pi}{4}$. Khi $x=0$ th $t=0$, khi $x=1$ th $t = \frac{\pi}{4}$

và $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$.

Do ă :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 t}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\cos t|}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sin t}{1+\sin t} \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\sqrt{2}-1).$$

@ Bài t ă p r ă n luy ề n ph ư -ng ph ậ p :

T ă nh c ậ c t ă ch ph ậ n sau :

1. $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1} dx$

2. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx$

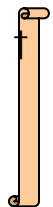
3. $\int_{-1}^0 \sqrt{x^2+2x+2} dx$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{x^2-4x+3}}$

5. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

6. $\int_0^1 \frac{xdx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

z **Ch ố y** : Khi ă ờ ng tr ứ c m ế t bài t ă n t ă ch ph ậ n, kh ă ng ph ậ i bài t ă n n ă o c ồ ng xu ấ t hi ề n nh ậ n t ố ố ch ồ ng ta s ố đ ồ ng ph ư -ng ph ậ p ă i bi ể n s ế . C ă nhi ề u bài t ă n ph ậ i qua 1 hay nhi ề u ph ậ p bi ể n ă i m ớ i xu ấ t hi ề n nh ậ n t ố ố ă t ề n ph ố (s ớ n ă i ă Ồ n ề ph ậ n PH ậ N LO ậ I C Ắ C D Ặ NG T Ồ Ắ N)



Ph ư -ng ph ậ p t ă ch ph ậ n t ồ ng ph ậ n .

N ế u $u(x)$ và $v(x)$ là hai h ằ m s ố c ố đ ạo h ằ m li ề n t ứ c tr ề n đ ọ a n $[a; b]$ th ầ :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = (u(x).v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx$$

hay

$$\int_a^b u(x)dv = (u(x).v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)du$$

VD1. T ă nh $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

S ă t $u = x$, ta c ă : $du = dx$
 $dv = \cos x dx$, $v = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Nhận xét : Mét c ố u hái ra là $u = \cos x$ cũ c kh ố ng ?
 $dv = x dx$

Ta h ỳ th ồ : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$, r ầ r ằ ng t ớ ch ph ầ n $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ cũ n ph ồ c t ớ p h ầ n t ớ ch

ph ầ n cũ n t ớ ch . V ể y vi ồ c l ầ ch ầ n u và dv quy ố t ồ nh r ể t lí n trong vi ồ c s ố đ ồ ng ph ầ - ng ph ầ p t ớ ch ph ầ n t ồ ng ph ầ n . Ta h ỳ x ố t mét VD n ầ a ồ i t ầ m c ố u tr ầ l ề i v ồ a ý nh ể t !

VD2. T ớ ch $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$

Ta th ồ ra : $u = \frac{1}{x^5}$ r ầ r ằ ng ồ t ớ ch $v = \int \ln x dx$ là mét vi ồ c kh ố kh ầ n !
 $dv = \ln x dx$

Giải . S ể t $u = \ln x$ ta cũ : $du = \frac{1}{x}$
 $dv = \frac{1}{x^5} dx$ $v = \int \frac{1}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4}$

Do ồ a : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx = -\frac{\ln x}{4x^4} \Big|_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^4} \Big|_1^2 = \frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$

Nh ể n x ố t : T ồ 2 VD tr ầ n ta cũ th ồ r ồ t ra mét nh ể n x ố t (ví i nh ầ ng t ớ ch ph ầ n ồ - n gi ầ n) : Vi ồ c l ầ ch ầ n u và dv ph ầ i th ồ m ầ n :

- 1 du ồ - n gi ầ n, v đ ồ t ớ ch .
- 2 T ớ ch ph ầ n sau $(\int v du)$ ph ầ i ồ - n gi ầ n h ầ n t ớ ch ph ầ n cũ n t ớ ch $(\int u dv)$.

@ Bài t ể p r ầ n l ầ y ồ n ph ầ - ng ph ầ p :

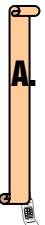
T ớ ch c ầ c t ớ ch ph ầ n sau :

1. $\int_0^1 x e^x dx$
2. $\int_0^1 x e^{3x} dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx$
5. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$
8. $\int_1^e \ln x dx$
9. $\int_2^5 2x \ln(x-1) dx$
10. $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

M ồ i d ầ ng to ầ n cũ a đ ầ ng nh ể ng đ ầ c thù r ề ng cũ a nó !

Ph ầ n ph ầ n l ồ i i c ầ c đ ầ ng to ầ n

% Tích ph ầ n cũ a c ầ c h ầ m h ầ u t ồ



A D ầ ng : $I = \int \frac{P(x)}{ax+b} dx$ ($a \neq 0$)

C«ng thøc cÇn lưu ý : $I = \int \frac{\alpha}{ax + b} dx = \frac{\alpha}{a} \ln|ax + b| + C$

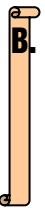
4 TÝnh $I_1 = \int \frac{x+1}{x-1} dx$

4 TÝnh $I_2 = \int \frac{x^2 - 5}{x+1} dx$

4 TÝnh $I_3 = \int \frac{x^3}{2x+3} dx$

Phư-ng ph_p : Thùc hiÕn phĐp chia ®a thøc P(x) cho nhÞ thøc : ax+b, ®uã tÝch ph©n vÒ d'ng :

$I = \int Q(x) dx + \int \frac{\alpha}{ax + b} dx$ (Trong ®ã Q(x) là hàm ®a thøc viÕt dñi i d'ng khai triÕn)



B. D'ng : $I = \int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} dx$ (a ≠ 0)

1. Tam thøc : f(x) = ax² + bx + c **có hai nghiÖm phân biÖt .**

C«ng thøc cÇn lưu ý : $I = \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$

TÝnh $I = \int \frac{2}{x^2 - 4} dx$

C_ach 1. (phương pháp hệ số bất định)

$$\frac{2}{x^2 - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 2 \equiv (A+B)x + 2(A-B) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Do ®ã : $I = \int \frac{2}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$

C_ach 2. (phương pháp nháy tăng lẫu)

Ta cã : $I = \int \frac{2}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 4} dx - \int \frac{2x-4}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4| - \ln|x+2| + C$

4 < Tæng qu_t > TÝnh $I = \int \frac{\alpha}{x^2 - a^2} dx$

4 TÝnh $I = \int \frac{2x}{9 - x^2} dx$

4 TÝnh $I = \int \frac{3x+2}{x^2 - 1} dx$

4 TÝnh $I = \int \frac{x^2}{x^2 - 5x + 6} dx$

4 TÝnh $I = \int \frac{3x^3}{x^2 - 3x + 2} dx$

Phư-ng ph_p :

- Khi bÆc cña ®a thøc P(x) < 2 ta sÏ dõng phư-ng ph_p hÏ sÏ bÆt ®nh hoÆc phư-ng ph_p nhÏy tÇng lÇu.
- Khi bÆc cña ®a thøc P(x) ≥ 2 ta sÏ dõng phĐp chia ®a thøc ®Ó ®uã tÏ sÏ vÒ ®a thøc cã bÆc < 2 .



2. Tam thức : $f(x) = ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)^2$ có nghiệm kép.

Công thức cần lưu ý : $I = \int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx = -\frac{1}{u(x)} + C$

4 Tính $I = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} + C$

4 Tính $I = \int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx$.

Sét : $2x - 1 = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$, lúc ã ta cã :
 $2x = t + 1$

$I = 2 \int \frac{t+1}{t^2} dx = 2 \int \frac{dt}{t} + 2 \int \frac{dt}{t^2} = 2 \ln|t| - \frac{2}{t} + C$

4 Tính $I = \int \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 4} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} dx$

Phư-ng ph_p : Số tr_nh phoc t_p khi biõn ã ta thưng ã : $\alpha x + \beta = t \Rightarrow x = \frac{t - \beta}{\alpha}$ và thay vào biõu thoc tr^n tò sè .

3. Tam thức : $f(x) = ax^2 + bx + c$ vô nghiệm .

4 Tính $I = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$

Sét : $x = \tan \alpha \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$, ta cã :

$I = \int \frac{1}{\cos^2 \alpha (\tan^2 \alpha + 1)} d\alpha = \int d\alpha = \alpha + C$, ví i ($\tan \alpha = x$)

4 < Tạng qu_t > Tính $I = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$. HD Sét $x = a \tan \alpha \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$, ta cã :

$I = \int \frac{d\alpha}{a} = \frac{\alpha}{a} + C$

4 Tính $I = \int \frac{2}{x^2 + 2x + 2} dx$

4 Tính $I = \int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^3}{x^2 + 9} dx$

C. Định nghĩa : $I = \int \frac{P(x)}{ax^3 + bx^2 + cx + d} dx$ ($a \neq 0$)

1. Đa thức : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có một nghiệm bội ba.



C ề ng th ố c c ầ n l ư u ý : $I = \int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C \quad (n \neq 1)$

T ỉ nh $I = \int \frac{1}{(x-1)^3} dx$

N ố u $x > 1$, ta c ầ : $I = \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = \int (x-1)^{-3} d(x-1) = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$

N ố u $x < 1$, ta c ầ : $I = -\int \frac{1}{(1-x)^3} dx = \int (1-x)^{-3} d(1-x) = \frac{(1-x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$

V ề y : $I = \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$

Ch ố y : $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, v ớ i $x > 0$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x}{(x-1)^3} dx$

S ă t : $x - 1 = t$ ta c ầ : $I = \int \frac{t+1}{t^3} dt = \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + C$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^2 - 4}{(x-1)^3} dx$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^3}{(x-1)^3} dx$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^4}{(x+1)^3} dx$

2. **Đ a th ứ c :** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **c ó hai nghi ệ m .**

T ỉ nh $I = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2} dx$

S ă t : $x + 1 = t$, ta c ầ : $I = \int \frac{1}{t^2(t-2)} dt = \int \frac{dt}{t^3 - 2t^2}$

C ầ ch 1 < Phương pháp nh ẩ t ầ ng l ầ u >

Ta c ầ : $\frac{1}{t^3 - 2t^2} = \frac{3t^2 - 4t}{t^3 - 2t^2} - \frac{1}{4} \frac{3t^2 - 4t - 4}{t^3 - 2t^2} = \frac{3t^2 - 4t}{t^3 - 2t^2} - \frac{1}{4} \frac{3t + 2}{t^2} = \frac{3t^2 - 4t}{t^3 - 2t^2} - \frac{1}{4} \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}$

Đ o ầ : $I = \int \frac{3t^2 - 4t}{t^3 - 2t^2} dt - \frac{1}{4} \int \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2} dt = \ln|t^3 - 2t^2| - \frac{3}{4} \ln|t| + \frac{1}{t} + C$

C ầ ch 2 < Phương pháp h ệ s ố b ấ t đ ị nh >

$$\frac{1}{t^3 - 2t^2} = \frac{At + B}{t^2} + \frac{C}{t - 2} \Rightarrow 1 \equiv (A + C)t^2 + (-2A + B)t - 2B \Rightarrow \begin{cases} -2B = 1 \\ -2A + B = 0 \\ A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Đ o ầ : $\int \frac{1}{t^3 - 2t^2} dt = -\int \frac{1}{4} \frac{t+2}{t^2} - \frac{1}{t-2} dt = -\int \frac{1}{4} \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t-2} dt = -\frac{1}{4} \ln|t| - \frac{2}{t} - \ln|t-2| + C$



- ☉ Phư-ng ph-**ph** “nh-ly t-**ng** l-**u**” : b-**i**t c-**ả** hi-**u** qu-**ả** khi t-**ò** s-**ẽ** c-**ả** ph-**õn** th-**oc** là mét h-**ng** s-**ẽ** .
- ☉ Phư-ng ph-**ph** “h-**õ** s-**ẽ** b-**Ê**t” : b-**Ê**c c-**ả** th-**oc** tr-**ên** t-**ò** s-**ẽ** lu-**õn** nh-**á** h-**n** b-**Ê**c m-**ê**u s-**ẽ** 1 b-**Ê**c .

4 T-**ĩn**h $I = \int \frac{2x+1}{x^2(x-2)} dx$

S-**õ** s-**õ** đ-**õ**ng phư-ng ph-**ph** nh-ly t-**ng** l-**u** ta s-**ĩ** ph-**õn** t-**ĩ**ch nh-**ư** sau :

$$\frac{2x+1}{x^2(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x^2(x-2)}$$

4 T-**ĩn**h $I = \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} dx$

S-**õ** đ-**õ**ng phư-ng ph-**ph** h-**õ** s-**ẽ** b-**Ê**t : $\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

Do : $x^2 \equiv (x+2)(Ax+B) + C(x-1)^2$

Cho : $x=-2$, suy ra : $C = \frac{4}{9}$

$x=0$, suy ra : $B = -\frac{2}{9}$

$x=1$, suy ra : $A = \frac{5}{9}$

Phư-ng ph-**ph** tr-**ên** g-**á**i là phư-ng ph-**ph** “g-**ũn** tr-**úc** t-**ĩ**p g-**ũ**, tr-**ở** c-**ả** b-**i**õn s-**ẽ**” t-**ìm** A, B, C.

4 T-**ĩn**h $I = \int \frac{x^3-1}{x^3+2x^2+x} dx$

3. **Đa thức** : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **có ba nghiệm phân biệt** .

T-**ĩn**h $I = \int \frac{1}{x(x^2-1)} dx$

C-h** 1** . Ta c-**ã** : $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{2} \frac{3x^2-1}{x^3-x} - \frac{3x^2-3}{x(x^2-1)} = \frac{1}{2} \frac{3x^2-1}{x^3-x} - \frac{3}{x}$

Do : $I = \int \frac{1}{2} \frac{3x^2-1}{x^3-x} - \frac{3}{x} dx = \frac{1}{2} \ln|x^3-x| - \frac{3}{2} \ln|x| + C$

C-h** 2** . Ta c-**ã** : $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 1 \equiv A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

Cho $x=0$, suy ra $A = -1$.

$x=1$, suy ra $B = \frac{1}{2}$

$x=-1$, suy ra $C = \frac{1}{2}$

Do : $I = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C$

4 Tính $I = \int \frac{x+1}{x(x^2-4)} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^3}{(x^2-1)(x-2)} dx$

4 Tính $I = \int \frac{dx}{(2x+1)(4x^2+4x+5)}$

Đặt: $2x + 1 = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$, ta có:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t^2-6)} = \frac{1}{24} \int \frac{3t^2-6}{t^3-6t} dt - \int \frac{3t^2-18}{t(t^2-6)} dt = \frac{1}{24} \ln|t^3-6t| - 3 \ln|t| + C$$

4. **Đa thức**: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có một nghiệm (khác bội ba)

Tính $I = \int \frac{1}{x^3-1} dx$

Đặt $x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$, ta có:

$$I = \int \frac{dt}{t(t^2+3t+3)} = \frac{1}{3} \int \frac{t^2+3t+3}{t(t^2+3t+3)} dt - \int \frac{t^2+3t}{t(t^2+3t+3)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t+3}{t^2+3t+3} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{2t+3}{t^2+3t+3} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \ln|t| - \frac{1}{2} \ln|t^2+3t+3| - \alpha\sqrt{3} + C \quad (\text{Với } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha)$$

4 Tính $I = \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$

4 Tính $I = \int \frac{1}{x(x^2+2x+2)} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^2}{x^3+1} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^3}{x^3-8} dx$

4 Tính $I = \int \frac{1}{x^3-3x^2+3x-2} dx$

Tâm lý: Ta thường sử dụng hai phép biến đổi:

t Tõ sẽ là nghiệm của mẫu sẽ.

u Tõ sẽ là đạo hàm của mẫu sẽ.

và phân thức được quy về 4 dạng cơ bản sau:

$$\in \frac{1}{ax+b} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{ứng với} \end{matrix} \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$\frac{u'}{u} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{ứng với} \end{matrix} \int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$f \quad \frac{u'}{u^n} \quad (n \geq 2) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{u'}{u^n} dx = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$$

↑ ứng với

$$" \quad \frac{1}{(x+d)^2+a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{(x+d)^2+a^2} dx = \frac{a}{a} + C, \quad \text{v ớ i } x+d = atg\alpha$$

↑ ứng với



D. D Ạ NG : $I = \int \frac{Q(x)}{P(x)} dx$ < P(x) là ① a th ố c b ế c cao > V Ậ M Ộ T S Ố K Ỉ TH U Ậ T T Ì M NG U Ệ N H Ầ M .

1. K Ỉ TH U Ậ T b ấ n ① ă i t ố s ề ch ồ a nghi ồ m c ầ a m ế u s ề .

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{x(x-1)(x+7)(x+8)}$

HD : $I = \int \frac{x(x+7) - (x-1)(x+8)}{x(x-1)(x+7)(x+8)} dx$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$

HD : $I = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{1}{8} \int \frac{(x^2+9) - (x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+9)}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{x^6 + 6x^4 - 13x^2 - 42}$

HD : $I = \int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)(x^2+7)}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{5x^5 + 20x}$

HD : $I = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x(x^4+4)} = \frac{1}{20} \int \frac{(x^4+4) - x^4}{x(x^4+4)}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{x^7 - 10x^3}$

HD : $I = \int \frac{dx}{x^3(x^4-10)} = \frac{1}{10} \int \frac{x^4 - (x^4-10)}{x^3(x^4-10)}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{(x^2-2)(2x^2+1)(3x^2-4)}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{x^8 - 10x^6 + 35x^4 - 50x^2 + 24}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{(x+1)(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 9)}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^4 dx}{x^4 - 1}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^4 dx}{x^4 + 1}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^4 dx}{x^6 - 1}$



4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^6 dx}{x^6 - 1}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{3x^{100} + 5x}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{dx}{x(2x^{50} + 7)^2}$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{(1 - x^{2000}) dx}{x(1 + x^{2000})}$

2. K ỹ thu ệ t ă t ề n ph ố v ớ i t ỉ ch ph ầ n c ấ d 1 ng : $I = \int \frac{P(x)}{(ax + b)^\alpha} dx$ ($\alpha \neq 1$)

T ỉ nh $I = \int \frac{x^3 + x + 1}{(x - 2)^{30}} dx$

S ă t $x - 2 = t \Rightarrow \begin{matrix} dx = dt \\ x = t + 2 \end{matrix}$, ta c ấ :

$I = \int \frac{(t+2)^3 + t + 3}{t^{30}} dt = \int \frac{t^3 + 6t^2 + 13t + 11}{t^{30}} dt = -\frac{1}{26t^{26}} + 6\frac{1}{27t^{27}} + 13\frac{1}{28t^{28}} + 11\frac{1}{29t^{29}} + C = \dots$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^4}{(x - 3)^{45}} dx$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{3x^4 - 5x^3 + 7x - 8}{(x + 2)^{50}} dx$

Ch ố y : V ớ i lo ạ i to á n n ằ y tr ờ ng cu ố n “T ỉ ch Ph ầ n - T. Ph ư - ằ ng ” đ ă s ử d ụ ng ph ư ờ ng ph á p kh ả i tri ể n Taylor nh ư ng t ờ i c ả m th ấ y c ách l ằ n n ằ y kh ồ ng nh ằ ng h ồ n l ằ i g ắ y nhi ề u ph ứ c t ậ p ch ồ h ồ c s ỉ nh n ằ n đ ă kh ồ ng n ề u r ằ .

3. K ỹ thu ệ t bi ể n ă i t ờ s ề ch ồ ă 1 ỏ h ằ m c ấ m Ể u s ề .

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x dx}{x^4 - 1}$

S ă t $x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 1}$

T ỉ nh $I = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$

$I = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d \left(x + \frac{1}{x} \right)}{x + \frac{1}{x} - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right| + C$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{(x^2 - 1)}{x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 5x + 1} dx$

4 T ỉ nh $I = \int \frac{(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 2x + 1} dx$



4 Tính $I = \int \frac{(x^2 - 2)}{x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 6x + 4} dx$

4 Tính $I = \int \frac{(x^2 + 3)}{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x + 9} dx$

4 Tính $I = \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$

4 Tính $I = \int \frac{dx}{x^4 - 3x^2 + 4}$

Bình luận : Loạt bài toán này làm tôi khá ấn tượng với phép chia cả tử số và mẫu số cho x^2 . Quả thật tôi luôn cố gắng tìm tòi xem liệu mình có thể nghĩ ra một phương pháp nào khác hay hơn chăng, nhưng ...” bã tay.com “. Thủ mí i hiều to_n hác : “luôn tiềm ẩn những vẻ đẹp làm người ta sửng sốt”.

4 Tính $I = \int \frac{x^5}{x^6 + 1} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x}{x^6 - 1} dx$

Sæt $x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$, ta cã : $I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^3 - 1}$

4 Tính $I = \int \frac{x^3}{x^6 - 1} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^3 + x}{x^6 + 1} dx$ HD : $I = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{x^6 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^6 + 1}$

4 Tính $I = \int \frac{x^3}{x^6 + 1} dx$ HD : $I = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{(x^2)^3 + 1} d(x^2)$

4 Tính $I = \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2x - 1)}{x^6 - 14x^3 - 1} dx$

HD : $I = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2} \quad x - \frac{1}{x} + 2}{x^3 - \frac{1}{x^3} - 14} dx = \int \frac{x - \frac{1}{x} + 2}{x - \frac{1}{x} + 3 \quad x - \frac{1}{x} - 14} d \quad x - \frac{1}{x}$

4 Tính $I = \int \frac{x^{19}}{(3 + x^{10})^2} dx$

HD . $I = \int \frac{x^{10} \cdot 10x^9}{(3 + x^{10})^2} dx = \frac{1}{10} \int \frac{x^{10}}{(3 + x^{10})^2} d(x^{10})$

4 Tính $I = \int \frac{x^{99}}{(2x^{50} - 3)^7} dx$

4 Tính $I = \int \frac{x^{2n-1}}{(ax^n + b)^k} dx$

4. Kĩ thuật chång nhĩ thøc .

C-ĩ sẽ cũa phư-ng ph_p :

Số tãm nguy^an hàm cũ d'ng : $I = \int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^m} dx$, ta ðũa vào c-ĩ sẽ : $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

và ph©n tĩch biõu thøc ðĩi ðĩu tĩch ph©n vò d'ng :

$$I = k \int f \frac{ax+b}{cx+d} \frac{dx}{(cx+d)^2} = k \int f \frac{ax+b}{cx+d} d \frac{ax+b}{cx+d}$$

VD . Tĩnh

$$I = \int \frac{(3x-5)^{10}}{(x+2)^{12}} dx = \int \frac{3x-5}{x+2} \frac{dx}{(x+2)^{12}} = \frac{1}{11} \int \frac{3x-5}{x+2} d \frac{3x-5}{x+2} = \frac{1}{121} \frac{3x-5}{x+2}^{11} + C$$

4 Tĩnh $I = \int \frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}} dx$

4 Tĩnh $I = \int \frac{dx}{(x+3)^5 (x+5)^3}$

HD . $I = \int \frac{dx}{\frac{x+3}{x+5} (x+5)^8} = \int \frac{1}{\frac{x+3}{x+5} (x+5)^6 (x+5)^2} dx = \frac{1}{2^6} \int \frac{1}{\frac{x+3}{x+5} (x+5)^6} \frac{(x+3)-(x+5)^6}{x+5} \frac{dx}{(x+5)^2}$

Ðể trång sự ðổ sộ trong tĩnh toán ta có thể sử dụng phếp ðặt ẩn phũ như sau :

SÆt $\frac{x+3}{x+5} = t \Rightarrow \frac{1}{(x+5)^2} dx = \frac{dt}{2}$, n^an ta cũ :

$$\frac{x+5-2}{x+5} = t \Rightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{1-t}{2}$$

$$\frac{1}{2^6} \int \frac{1}{\frac{x+3}{x+5} (x+5)^6} \frac{(x+3)-(x+5)^6}{x+5} \frac{dx}{(x+5)^2} = \int \frac{1}{2^7} \frac{(t-1)^6 dt}{t^5}$$

4 Tĩnh $I = \int \frac{dx}{(3x-2)^7 (3x+4)^3}$

4 Tĩnh $I = \int \frac{dx}{(2x-1)^3 (3x-1)^4}$

SÆt $\frac{3x-1}{2x-1} = t \Rightarrow -\frac{1}{(2x-1)^2} dx = dt$ và $\frac{1}{2x-1} = 2t-3$

Do ðã ta cũ : $I = \int \frac{dx}{(2x-1)^3 (3x-1)^4} = \int \frac{dx}{(2x-1)^7} \frac{3x-1}{2x-1}^4 = -\int \frac{(2t-3)^5 dt}{t^4}$

% Tích ph©n của các hãm lĩng gi¸c

A. Số dõng thu¸n tuy¸c các công thức lĩng gi¸c .

Công thức hạ bậc : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

VD . Tìm hã nguyªn hãm : $\int \cos^2 x dx$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Bài tãp . Tìm hã nguyªn hãm :

1. $\int \sin^2 x dx$ 2. $\int \cos^4 x dx$ 3. $\int \cos^4 3x dx$

4. $\int \sin^2 5x dx$ 5. $\int \sin^4 5x dx$ 6. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$

Công thức hạ bậc : $\sin^3 x = \frac{-\sin 3x + 3 \sin x}{4}$; $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$

Bài tãp . Tìm hã nguyªn hãm :

1. $\int \sin^6 x dx$ 2. $\int \cos^6 3x dx$ 3. $\int \cos^6 4x dx$

Công thức biến đổi tích thành tổng :

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2} \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$\cos a . \cos b = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

$$\sin a . \cos b = \frac{1}{2} \sin(a + b) + \sin(a - b)$$

VD . Tìm hã nguyªn hãm : $\int \sin 2x . \cos x dx$

$$\int \sin 2x \cos x dx = \int \frac{1}{2} [\sin 3x + \sin x] dx = \frac{1}{6} \int \sin 3x d(3x) + \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C$$

Bài tãp . Tìm hã nguyªn hãm :

1. $\int \sin x \cos 3x dx$ 2. $\int \cos x . \cos 2x . \cos 3x dx$ 3. $\int \cos 4x . \sin 5x . \sin x dx$

Công thức cộng :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

VD . $\int \frac{dx}{\sin 2x - \sin 10x} = \frac{1}{2 \cos 10} \int \frac{\cos(x+5) - (x-5)}{\cos(x+5) \cos(x-5)} = \frac{1}{2 \cos 10} \int \cot g(x-5) + tg(x+5) dx$

$$= \frac{1}{2 \cos 10} \ln \left| \frac{\sin(x-5)}{\cos(x-5)} \right| + C$$

Bài tãp :

1. $\int \frac{dx}{\sin 2x - \sin x}$

2. $\int \frac{dx}{\sin x + \sin 3x}$

3. $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

B. Tính tích ph©n khi biõt d(ux) .

VD . Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x . \cos x dx$



S ă t $t = \sin x$, $t \in [0; 1]$. Khi $x = 0$ th ă $t = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ th ă $t = 1$ và $dt = \cos x dx$. Do ă :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

V ă i lo ă i tích phân này học sinh có thể tự sáng tạo ra một loạt các bài toán, tôi thử đưa ra một vài phương án :

4 Bi ă t $d(\sin x) \rightleftharpoons \cos x dx$.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot \cos x dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^n x} dx$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \neq 1$)

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3 x dx$

4. $\int (\sin 3x)^{10} (\cos 3x)^5 dx$

5. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2}$

4 Bi ă t $d(\cos x) \rightleftharpoons -\sin x dx$.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot \sin x dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^n x} dx$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \neq 1$)

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$

4. $\int (\sin 2x)^7 (\cos 2x)^{100} dx$

5. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x - 1}$

4 Bi ă t $d(\operatorname{tg} x) \rightleftharpoons \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x) dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{tg} 3x)^7}{(\cos 3x)^6} dx$

4. $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$

5. $\int \frac{dx}{\cos^{2n} x}$

6. $\int (\operatorname{tg}^5 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + 1) dx$

4 Bi ă t $d(\operatorname{cotg} x) \rightleftharpoons -\frac{1}{\sin^2 x} dx$.

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x) dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$

3. $\int \frac{(\operatorname{cotg} 5x)^{10}}{(\cos 5x)^8} dx$

4. $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$

5. $\int \frac{dx}{\sin^{2n} x}$

6. $\int (\operatorname{cotg}^5 x + \operatorname{cotg}^4 x + \operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg}^2 x) dx$

4 Bi ă t $d(\sin x \pm \cos x) \rightleftharpoons (\cos x \pm \sin x) dx$

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$

3. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

4. $\int \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{2 \sin x - 3 \cos x + 1} dx$

5. $\int \frac{(\sin 2x + 2 \cos 4x) dx}{\cos 2x - \sin 4x}$

4 Bi ă t $d(a \sin^2 x \pm b \cos^2 x \pm c \sin 2x \pm d) \rightleftharpoons (a \mp b \pm c) \sin 2x dx$

1. $\int \frac{\sin 2x}{3 \sin^2 x + \cos^2 x} dx$

2. $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} dx$

4 Bi ă t $d(f(x))$ v ă i $f(x)$ là mét hàm l ă i ng gi ă c b ă t k ă nào ă .

VD. Ch ă n $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x \Rightarrow d(f(x)) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 + 1}{\cos^2 x}$



Như vậy ta cần thử ra một bài toán tìm nguyên hàm như sau : $\int \frac{(\sin x + \operatorname{tg} x)(\cos^3 x + 1)}{\cos^2 x} dx$

Số tình huống khả của bài toán bên cần thử thực hiện một vài phép biến đổi vì do :

$$\frac{(\sin x + \operatorname{tg} x)(\cos^3 x + 1)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x(1 + \cos x)(\cos^3 x + 1)}{\cos^3 x} = \sin x(1 + \cos x) + \frac{1}{\cos^3 x}$$

Tõ là ta cần bài toán tìm nguyên hàm : $\int \sin x(1 + \cos x) + \frac{1}{\cos^3 x} dx$

Đĩ nhiên để có một bài tìm nguyên hàm nhìn đẹp mắt lại phụ thuộc vào việc chọn hàm $f(x)$ và khả năng biến đổi lượng giác của bạn !

VD . Tìm chặn hàm sẽ : $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x \Rightarrow d(f(x)) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}$, như vậy ta cần thử ra một bài

toán như “ tìm nguyên hàm ” như sau : *Tìm họ nguyên hàm :* $\int \frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x)^{2007}}{\sin^2 2x} dx$

Nếu thấy chưa hài lòng ta thử biến đổi tiếp xem sao ?

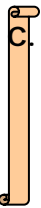
Ta cần : $\operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x)^{2007}}{\sin^2 2x} = \frac{2^{2007} \cos^{2007} 2x}{\sin^{2009} 2x}$

Vậy bên sẽ cần một bài toán mới : *Tìm họ nguyên hàm :* $\int \frac{\cos^{2007} 2x}{\sin^{2009} 2x} dx$.. Cần thử bên sẽ thấy buồn khi bài toán này là cả chục giờ nghiên cứu còn không chóng tay !

Nhưng để sao công phải từ an ủi mình : “ **Thực ra trên mặt đất làm gì có đường ..**”

Chẳng lẽ chúng ta không thu được điều gì chăng ? Nhưng tôi lại có suy nghĩ khác, biết đâu những nhà viết sách lại xuất phát từ những ý tưởng như chúng ta ...???

Hãy thử xét sang một dạng toán khác :



C. Tìm ra $d(u(x))$ để tính tích phân .

VD . Tính tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

Rõ ràng bài toán không xuất hiện hình dáng : $\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du$

Vậy để làm được bài toán, một phương pháp ta cần nghĩ đến là tìm ra $d(u(x))$ như sau :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$$

Bên cần nghĩ rằng mình công cả khả năng sáng tạo ra dáng toán này !

¶ Tìm $d(\sin x) \Rightarrow \cos x dx$.

1. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$

2. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos x} dx$

3. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

4. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$

5. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\cos 3x}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$

¶ Tìm $d(\cos x) \Rightarrow -\sin x dx$.

1. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

2. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$



$$4. \int \frac{dx}{\sin x (\cos^3 x - 1)}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sin x \cos^6 x}$$

$$6. \int \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x}$$

¶ T 1 o $d(\operatorname{tg} x) \rightleftharpoons \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{(\sin x)^3 (\cos x)^3}$$

$$4. \int \operatorname{tg}^8 x dx$$

$$5. \int \frac{dx}{2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x}$$

$$6. \int \frac{1}{(\sin x - 2 \cos x)^2} dx$$

¶ T 1 o $d(\operatorname{cotg} x) \rightleftharpoons -\frac{1}{\sin^2 x} dx$.

$$1. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}^3 x dx$$

$$2. \int \frac{1}{\sin^2 x - 2 \cos^2 x} dx$$

$$3. \int \frac{(\operatorname{cotg} 5x)^{10}}{(\sin 5x)^8} dx$$

$$4. \int \frac{1}{\sin^4 x} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{\sin^{2n} x}$$

¶ T 1 o $d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \rightleftharpoons \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$. < Ph ậ p ặ t ừ n ằ ng $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ > .

$$1. \int \frac{dx}{3 \sin x + \cos x}$$

$$2. \int \frac{1}{2 \cos 3x + 7 \sin 3x} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{2 \sin x + 5 \cos x + 3}$$

$$4. \int \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2 \cos x + 3} dx$$

$$5. \int \frac{7 \sin x - 5 \cos x}{(3 \sin x + 4 \cos x)^2} dx$$

D. SÁNG TẠO BÀI TẬP

Nếu được phép hỏi, tôi sẽ hỏi rằng bạn có cảm thấy nhàm chán khi bạn cứ suốt ngày ôm lấy một cuốn sách tham khảo và làm hết bài tập này đến bài tập khác, mà đôi lúc bạn vẫn cảm giác rằng khả năng giải toán của mình không giỏi lên. Còn tôi đam mê môn Toán từ khi tôi biết thế nào là sáng tạo .. Bạn có muốn thử xem mình có khả năng sáng tạo hay không ?

Dù khả năng sáng tạo bài tập được xuất phát từ những bản chất rất sơ đẳng, có thể bạn sáng tạo một bài toán mà bạn đã bắt gặp ở một cuốn sách nào đó.. nhưng dấu sao nó vẫn mang “dấu ấn” của bạn .

Tôi mạn phép tư duy để cùng tham khảo cho “vui” !

Tôi sẽ lấy một hàm số $f(x)$ nào đó mà tôi thích, rồi đạo hàm để tìm $d(f(x))$.

h T ắ i ch ậ n : $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $f'(x) = 4(\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x) = 2 \cdot \sin 2x (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sin 4x$

Mét bài to ậ n n ằ ng gi ả i n ằ ng c ấ t 1 o ra : **Tính** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

Mét bài to ậ n n ằ ng kh ả n ằ ng n ằ ng m ặ t, b 1 n ằ ng g ặ p ặ c ầ u ch ư a ? N ằ u g ặ p bài to ậ n này tr ứ c khi b 1 n bi ế t s ắ ng t 1 o b 1 n gi ả i quy ết n ằ như th ế nào ?

Số t ằ ng kh ả n ằ ng “ đ ắ nh l ừ a tr ứ c g ắ c ” b 1 n c ấ th ố t 1 o m ế u s ằ thành mét hàm s ằ h ằ p n ằ ặ q uen th ứ c , v ớ đ ồ :

Tính các tích phân sau :

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}} dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{(\sin^4 x + \cos^4 x)^{2007}} dx$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\cos^2 (\sin^4 x + \cos^4 x)} dx$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg}(\sin^4 x + \cos^4 x)} dx$$

Biết đâu một lúc nào đó có ai hỏi tôi về cách giải các bài toán trên tôi lại quên ..!!!!
Tôi biết bạn sẽ nghĩ tư duy kiểu này “ cũ rích “. Vậy sao ta không thử tư duy một kiểu nào đó cho hơi “ lạ ” một tý :
 $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x)^2 \dots$ Bài toán này sẽ xuất phát từ đâu ?

$$\text{Tính : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

i Nếu như xuất phát từ lượng giác để tạo ra các bài toán tích phân của hàm lượng giác nghe có vẻ hiển nhiên quá, ta hãy xuất phát từ hàm phân thức hữu tỷ xem sao ?

$$\text{Tôi sẽ xuất phát từ bài toán tìm nguyên hàm : } I = \int \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

$$\text{Tôi sẽ đặt : } x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt \text{ và ra mắt bài toán : } I = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} dx$$

Bạn sẽ suy nghĩ rằng “ quá đơn giản ” .. nhưng bạn sẽ cho cách giải thế nào với bài toán này :

$$I = \int \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} dx, \text{ phải chăng bạn sẽ nghĩ } I = \int \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} dx = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)} \dots \text{ hãy nhường chỗ cho}$$

những lời giải thông minh hơn ..!!!

a Bạn đang ôn thi đại học, bạn đọc khá nhiều tài liệu.. đôi khi bạn sẽ gặp những bài toán khó hay những lời giải dài dòng hơn bạn.. bạn thấy mình đang từng ngày tiến bộ . Đôi khi bạn gặp một phương pháp nào đó với tên gọi làm bạn hoảng hốt . **Hãy dừng lại và tư duy, bạn sẽ tìm ra lời giải đáp !**

Tôi đơn cử một ví dụ .. Khi bạn đọc tài liệu bạn thấy cụm từ “ tích phân liên kết ” có thể bạn bỏ qua vì nghĩ rằng “ quá khó ”

$$\text{VD . Tính } E = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$$

$$\text{Lời giải : Xét tích phân liên kết với } E \text{ là } E_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$E + E_1 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C_1$$

Ta có :

$$E - E_1 = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| + C_2$$

$$E = \frac{1}{2}(x + \ln |\sin x + \cos x|) + C$$

Giải hệ phương trình suy ra :

$$E_1 = \frac{1}{2}(x - \ln |\sin x + \cos x|) + C$$

Bình luận : Sự đồ sộ làm bạn hoảng hốt, nhưng hãy suy nghĩ xem thực chất nó cũng chỉ là một phép tách đơn giản :

$$E = \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{2} x + \ln |\sin x + \cos x| + C$$

Nếu chưa thục sù tin b 1n c ả th ờ th ờ ví i mét lo 1t c ụ c bài to 1n kh ụ c tư -ng từ :

$$1. \int \frac{\sin x}{3 \cos x + 7 \sin x} dx \quad 2. \int \frac{\sin 3x}{2 \cos 3x - 5 \sin 3x} dx \quad 3. \int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

Việc đưa ra bài toán trên chỉ là sự cố gắng để rèn luyện kỹ năng phân tích là sự sáng tạo, nhưng n ả gi ố p chúng ta l ấ gi ố p ừ -c mét ừ i ứ u quan tr ầ ng trong s ự ng t 1o bài t ế p : là mu ề n c ả mét bài t ế p hay b 1n c ậ n k ố t h ớ p nhi ề u ph ứ p bi ể n ừ i và đ ầ nhi ề n ừ i hái b 1n ph ứ i ki ể n tr ừ và mét ch ố t y ầ u t ề “ may m ả n ”.

d Tôi thử lấy hàm số : $f(x) = 2 \sin^2 x - \sin 2x + 5 \cos^2 x$ và tách nó thành 2 kiểu khác nhau :

$$\text{Kiểu 1. } f(x) = 2 \sin^2 x - \sin 2x + 5 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin x + 2 \cos x)^2 = 1 + (\sin x + 2 \cos x)^2 = 1 + u^2$$



Kiểu 2. $f(x) = 2\sin^2 x - \sin 2x + 5\cos^2 x = 6(\sin^2 x + \cos^2 x) - (\cos x - 2\sin x)^2 = 6 - (\cos x - 2\sin x)^2 = 6 - v^2$
 ẽ ki ̣u 1. $u' = \cos x - 2\sin x$ và ki ̣u 2 $v' = -\sin x - 2\cos x \Rightarrow u' + v' = -3(\sin x + \cos x)$

V ̣y ph ̣i ch ̣ng bài to ̣n này s ̣ r ̣t kh ̣ : $\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x} dx$

Tôi nhìn thấy bạn đang cười “ chế diễu ” bởi bạn đã bắt gặp nó..nhưng có 2 điều tôi muốn nói với bạn :

- **Hãy giải bài toán này bằng một cách thật thông minh .**
- **Hãy “ mượn tạm “ tư duy này để ra bài tập .**

B ̣n ̣. qu ̣ quen ví i bài to ̣n này : $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ nhưng t ̣i kh ̣ng ̣nh b ̣n s ̣ c ̣ mét ch ̣t b ̣n kh ̣n ví i bài to ̣n :

Tìm h ̣ nguyên hàm : $I = \int \frac{\sin x \cos x (\sin^4 x + \sin^2 x + \sin x + 1)}{\sin^6 x - 1} dx$

Gi ̣i

$$I = \int \frac{\sin x \cos x (\sin^4 x + \sin^2 x + \sin x + 1)}{\sin^6 x - 1} dx = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin^6 x - 1} + \int \frac{\sin x \cos x (\sin^4 x + \sin^2 x + 1)}{\sin^6 x - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(\sin^3 x)}{(\sin^3 x)^2 - 1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sin^2 x - 1}$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 1} + \frac{1}{2} \ln(\cos^2 x) + C \dots \text{bạn tìm lời giải nhanh hơn nh ̣ !}$$

Bài to ̣n tr ̣n “ b ̣ l ̣ ý tưởng gi ̣i to ̣n khi xu ̣t hi ̣n : $\sin^4 x + \sin^2 x + 1$ nhưng bài to ̣n này b ̣n h ̣ y gi ̣i quyết đ ̣m

Tìm h ̣ nguyên hàm : $I = \int \frac{\sin x \cos x (\sin x + 1)}{\sin^6 x - 1} dx$

Ví i ý tưởng này b ̣n c ̣ th ̣o ung dung nghĩ r ̣ng : người kh ̣c s ̣ ̣au ̣ ̣u v ̣ bài to ̣n c ̣a b ̣n ! H ̣ y th ̣o theo ý tưởng c ̣a b ̣n, ̣m b ̣o t ̣i s ̣ “ bã tay . com .vn “ ...!!!

DÙNG ĐỒ CỦA NGƯỜI KHÁC CẢM ZÁC KHÔNG THOẢI MÁI...NHƯNG .. DÙNG MÁI MÀ NGƯỜI TA KHÔNG BẮT TRẢ LẠI THÌ THÀNH CỦA MÌNH ! < .. triết lí kh ̣ng ? >

S ̣m khuya l ̣m r ̣i, t ̣m chia tay ví i t ̣ch ph ̣n hàm l ̣ng gi ̣c ! Nhưng l ̣i s ̣n ch ̣i cho c ̣c b ̣n !

Tìm h ̣ nguyên hàm : $\int \frac{\sin 4x + \cos 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$ (Với giá dùng thử chỉ có 4 dấu “ = “)

*Vì đời ph ̣ ki ̣p tài hoa
 Vì người gian đ ̣u hay ra đ ̣a tình ...?!*

% Tích ph ̣n c ̣a c ̣c h ̣m ch ̣a đ ̣u gi ̣ tr ̣ tuyệt ̣i

VD . Tính $\int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = -\int_0^1 (x-1) d(x-1) + \int_1^2 (x-1) d(x-1)$
 $= (1-x) \Big|_0^1 + (x-1) \Big|_1^2 = -2$

Tích ph ̣n c ̣a h ̣m ch ̣a đ ̣u gi ̣ tr ̣ tuyệt ̣i kh ̣ng kh ̣ l ̣m, n ̣a ph ̣o th ̣c hoàn toàn vào kh ̣ n ̣ng x ̣t đ ̣u c ̣a h ̣m s ̣ trong đ ̣u gi ̣ tr ̣ tuyệt ̣i .

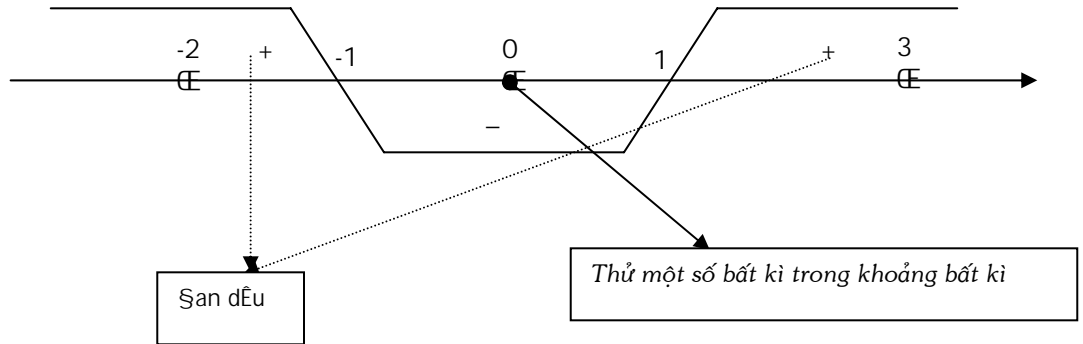
Khi x ̣t đ ̣u c ̣a h ̣m ̣a th ̣c ch ̣a trong đ ̣u gi ̣ tr ̣ tuyệt ̣i b ̣n c ̣n lưu ý mét “ **m ̣o v ̣t** “ : Đ ̣a th ̣c có n nghiệm thì ta xét trên (n+1) khoảng. Đ ̣a th ̣c bậc n có n nghiệm thì đ ̣n dấu trên các khoảng, khác n nghiệm thì mất tính đ ̣n dấu .



VD1 . T ỉ nh $\int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx$

Nh ậ p : $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$ (tam th ố c b ế c 2 c ấ 2 nghi ễ m)

x ế t d ấ u :



Gi ả i . $\int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} |x^2 - 1| dx + \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^3 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \frac{28}{3}$

VD2 . T ỉ nh $\int_{-1}^1 |x^3 - x^2| dx$

Ch ố ng ta th ườ ng nh ậ m l ế n khi x ấ t đ ều là ậ a th ố c c ấ 2 nghi ễ m và ậ an đ ều tr ậ n 3 k ỏ a ờ ng s ỉ cho k ồ t qu ả sai ! H ậ y làm nh ư sau :

$\int_{-1}^1 |x^3 - x^2| dx = \int_{-1}^0 x^2 |x - 1| dx + \int_0^1 x^2 |x - 1| dx + \int_1^2 x^2 |x - 1| dx = \dots$

C ấ c bài t ậ p r ề n l uy ễ n :

1. $\int_0^2 |x^3 - x| dx$

2. $\int_{-1}^2 ||x| - 1| dx$

3. $\int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$

4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^3 x - \cos^2 x} dx$

% T ỉ ch ph ậ n t ồ ng ph ậ n

1. T ỉ ch ph ậ n đ 1 ng : $\int_a^b P(x) \sin x dx$, $\int_a^b P(x) \cos x dx$

Đ ặ t $u = P(x)$ đ ể gi ả m b ậ c của $P(x)$.

VD . T ỉ nh $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

S ắ t $\begin{matrix} u = x^2 & \Rightarrow & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & \Rightarrow & v = -\cos x \end{matrix}$. Do ậ ấ :

$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = x^2 (-\cos x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x \cos x dx = \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} x \cos x dx$

Ta s ỉ t ỉ nh t ỉ ch ph ậ n : $\int_0^{\pi} x \cos x dx$



SÆt
$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= \cos x dx & v &= \sin x \end{aligned}$$
 . Do ®ã :

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2$$

Vÿ
$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$$

Bài tÿp tù luyÖn :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ 2. $\int_0^{\pi} x^3 \cos x dx$ 3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin x \cos^2 x dx$ 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^3 x dx$ 5. $\int_0^{\pi} x^3 \sin^3 \frac{x}{2} dx$

2. TÝch ph©n d¹ng : $\int_a^b P(x) \ln x dx$

Đặt $dv = P(x) dx$ để dễ tìm v .