VÕ QUỐC BÁ CẨN – TRẦN QUỐC ANH

SỬ DỤNG AM – GM

ĐỂ CHỨNG MINH

BẤT ĐẲNG THỨC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập ĐINH VĂN VANG

Chịu trách nhiệm nội dung và bản quyền:
Nhà sách HỒNG ÂN

Biên tập nội dung:
LƯU THẾ SƠN

Kĩ thuật vi tính:
Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa:
PHẠM VIỆT QUANG

Mã số: 02.02.45/55.PT 2010

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP AM-GM ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân.
Đăng kí kế hoạch xuất bản số: 916–2010/CXB/45-59/ĐHSP kí ngày 14/9/2010.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2011.

Lời nói đầu

"If I feel unhappy, I do mathematics to become happy.
If I am happy, I do mathematics to keep happy."
Alfred Rényi

Người lớn thường quan niệm: "Lớp trẻ bây giờ suy nghĩ không chín chắn". Còn thế hệ trẻ thì lại nhận xét: "Tư tưởng những người đi trước là cổ hủ, lạc hậu". Thực ra, cả hai câu nói thường gặp trên đã mắc cùng một lỗi đó là lấy tuổi tác làm thước đo cho tư duy con người. Điều này chỉ đúng trong những hoàn cảnh cụ thể nhất định. Tư duy thành công thực sự không phụ thuộc nhiều vào độ tuổi, trình độ học vấn hiện tại, hay hoàn cảnh gia đình, hay bất cứ yếu tố ngoại cảnh nào khác.

Chính vì vậy, có thể ngày hôm nay, bạn chưa phải một người giỏi Toán, giỏi tư duy logic, thế nhưng bạn hoàn toàn có thể đạt được những điều đó bằng niềm đam mê và thói quen không ngừng học hỏi của mình. Hãy nhớ rằng: *"Điều quan trọng không phải là vị trí đang đứng, mà là hướng ta đang đi"*. Đối với chúng tôi, người thầy giáo giỏi không phải là người có khả năng "nhồi nhét" lượng kiến thức đồ sộ cho học , inh của mình mà đó phải là người trong thời gian ngắn nhất, truyền thụ được cho học sinh lượng kiến thức cần thiết nhất, một cách hiệu quả nhất và tối ưu nhất. *"Người ta có thể quên đi điều bạn nói, nhưng những gì bạn để lại trong lòng họ thì không bao giờ nhạt phai"*. Triết lí này chính là nguồn động lực quan trọng giúp chúng tôi biên soạn cuốn *"Sử dụng AM-GM để chứng minh bất đẳng thức"*.

Cuốn sách này một lần nữa đã đánh dấu sự thay đổi trong phong cách viết của nhóm tác giả, với nhiều kinh nghiệm quý báu được rút ra từ thành công của cuốn sách cùng bộ là *"Sử dụng phương pháp Cauchy Schwarz để chứng minh bất đẳng thức"*.

Ở đây, bạn sẽ nhận được những chia sẻ nhiệt tình kèm theo sự giải thích tường tận về các ý tưởng cũng như tính toán. Có những lời giải đôi khi không tránh được việc trình bày hơi dài, bởi lẽ chúng tôi muốn mọi chi tiết đều trở nên thật rõ ràng đối với bạn đọc.

Cuốn sách gồm những nội dung sau:

Chương 1. *Những nét chung*: Trong chương này, bạn đọc sẽ được biết thêm về lịch sử ra đời của bất đẳng thức AM-GM và một số chứng minh đặc sắc cho nó.

Chương 2. *Một số kĩ thuật thường sử dụng*: Một trong những quan tâm của nhiều bạn đọc khi theo dõi một lời giải là tại sao có lời giải như thế? Tại sao lại thêm số này, bớt số kia? Tại sao bài tập này lại dùng được AM-GM?

Chương này sẽ giúp các bạn giải tỏa thắc mắc đó. Với mỗi kĩ thuật, trước tiên chúng tôi giới thiệu cách phân tích và định hướng trong việc tìm tòi lời giải, tiếp theo là vận dụng những lí thuyết ấy để giải quyết nhiều lớp bài toán cơ bản, và sau cùng là các bài tập áp dụng.

Chương 3. *Các bài toán tổng hợp*: Trong thực tế giải toán, các bất đẳng thức ta gặp thường rất đa dạng và không rơi vào *dạng* như các bài toán ở chương 2, lúc này ta cần phải phối hợp khéo léo các kĩ thuật mới giải được chúng.Vậy ở chương 3, một lần nữa bạn sẽ ôn lại những kiến thức cơ bản được hệ thống từ chương trước, sau đó là rèn luyện tư duy ứng biến tình huống một cách linh hoạt trước những vấn đề đòi hỏi sự sáng tạo.

Phụ lục 1. *Một số chuyên đề nâng cao*: Gồm 2 phần.

+ *Sắp thứ tự các biến – Đơn giản mà hiệu quả.*

+ *Những bài toán lí thú xoay quanh một đại lượng hoán vị.*

Phụ lục 2. *Các kết quả và kí hiệu cơ bản được dùng trong sách*: Để giúp độc giả tiết kiệm thời gian của mình, chúng tôi đã hệ thống lại các kết quả và kí hiệu (không kèm theo chứng minh) được dùng trong cuốn sách này.

Phụ lục 3. *Một số chia sẻ cùng bạn đọc:* Đây là điểm nhấn quan trọng, cũng là phần kết của cuốn sách với những kinh nghiệm toán học, kinh nghiệm thành công mà chúng tôi đã học hỏi, tích lũy trong một thời gian dài, nay xin được trải lòng cùng bạn đọc. Phần này gồm có các mục sau:

+ *Toán học và cuộc sống;*

+ *Tản mạn về bất đẳng thức;*

+ *Đôi điều suy nghĩ về thành công đối với các bạn trẻ.*

Nhân đây, nhóm tác giả xin được bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới thầy Trần Hữu Hiệp (THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam), thầy Trần Phương (Phó Giám đốc Trung tâm Hỗ trợ & Phát triển tài năng), các anh Nguyễn Văn Dũng (Học viện Kĩ thuật Quân sự), Trần Quang Hùng (Khối Phổ thông Chuyên Toán – Tin, Đại học Khoa học tự nhiên HN) đã dành thời gian để đọc bản thảo và đưa ra những góp ý tích cực. Xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Nhà giáo Hoàng Kiều cùng chú Nguyễn Đình Sơn – Giám đốc Nhà sách Hồng Ân, đã quan tâm, giúp đỡ chúng tôi ngay từ những ngày đầu tiên cho tới khi ấn phẩm đặc biệt này ra đời. Cuối cùng, xin cảm ơn bạn Nguyễn Hồng Nhung (Học viện Công Nghệ Hoàng Gia Melbourne) đã nhiệt tình trong việc tìm kiếm, cung cấp cho chúng tôi những tài liệu lịch sử toán học quý giá và bạn Hoàng Kiều Nam đã đóng góp những bài toán và lời giải thú vị.

Mặc dù được biên soạn một cách công phu nhưng chắc chắn thiếu sót là điều khó tránh khỏi. Nhóm tác giả hi vọng sẽ nhận được nhiều ý kiến phản hồi từ bạn đọc để cuốn sách có thể hoàn thiện hơn nữa trong lần tái bản tiếp theo.

Mọi thư từ góp ý vui lòng liên hệ:

Công Ty Đào Tạo & Tư Vấn Giáo Dục Tia Sáng.

Địa chỉ: *Số 4 – tổ 16A – Khương Trung – Thanh Xuân – Hà Nội.*

Điện thoại: *091 2772 656* Email: *tiasanggiaoduc@gmail.com*

CÁC TÁC GIẢ

Lời tựa

"Một cuốn sách trong những cuốn sách mà tôi thích".

Làm thế nào để giải được đúng, giải nhanh một bài toán, nhất là bất đẳng thức? Các em học sinh sẽ tìm được câu trả lời ở chương II và phần Phụ lục cuối sách.

Với những người dạy Toán, chúng ta sẽ thấy thêm những gợi ý cho học trò của mình và cho chính mình, bởi một vấn đề chắc không chỉ có một cách giải quyết duy nhất, vậy thì: nếu ta lại nhìn vấn đề ấy theo một hướng khác thì sao? Chương III sẽ mang đến thêm những bài toán để ta tập dượt và suy ngẫm.

Tôi quý trọng hai tác giả trẻ này. Mặc dù họ chưa thực sự là những người thầy giáo, nhưng cách trình bày theo định hướng sư phạm đã và sẽ làm cho họ sớm trưởng thành và những cuốn sách của họ sau này sẽ càng hữu ích hơn với số đông độc giả.

Trần Hữu Hiệp

Nguyên Tổ trưởng Tổ Toán THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam

CHƯƠNG 1

NHỮNG NÉT CHUNG

"This, therefore, is Mathematics:
She reminds you of the invisible forms of the soul;
she gives life to her own discoveries;
she awakens the mind and purifies the intellect;
she brings to light our intrinsic ideas;
she abolishes oblivion and ignorance which are ours by birth ..."
Diadochus Proclus

1 GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Trong chương trình Toán phổ thông hiện nay, chúng ta đều biết đến bất đẳng thức sau:

Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các số thực không âm, thì*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \qquad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Bất đẳng thức này có tên gọi chính xác là *bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Inequality of Arithmetic Mean and Geometric Mean)*. Ở nhiều nước trên thế giới, người ta gọi bất đẳng thức này theo kiểu viết tắt là *bất đẳng thức AM-GM (Arithmetic Mean - Geometric Mean)*.

Ở nước ta, bất đẳng thức này được gọi theo tên của nhà Toán học người Pháp *Augustin-Louis Cauchy* (1789 – 1857), tức là *bất đẳng thức Cauchy*. Thật ra, đây là một cách gọi tên không chính xác vì Cauchy không phải là người đề xuất ra bất đẳng thức này mà chỉ là người đưa ra một phép chứng minh đặc sắc cho nó. Vậy bất đẳng thức AM-GM đã ra đời và phát triển như thế nào? Câu hỏi mang tính lịch sử này đã thu hút được nhiều sự quan tâm các nhà Toán học hiện đại.

G. H. Hardy (1877 – 1947), một nhà toán học xuất sắc người Anh nổi tiếng với bài luận *A Mathematician's Apology*, hay với phương pháp *Hardy Littlewood circle* – một trong những công cụ thông dụng nhất hiện nay trong lĩnh vực Giải tích số, được coi là người tiên phong trong việc hệ thống và đưa ra những nghiên cứu về nguồn gốc các bất đẳng thức kinh điển.

Tiếp theo ta cần nhắc tới đóng góp của *D. S. Mitrinovic* (1908 – 1995) – nhà Toán học người Serbia với tham vọng thống kê và tập hợp *tất cả* các bất đẳng thức sơ cấp. Ông là một trong những thành viên sáng lập Hiệp hội Khoa học Serbia, được biết đến với câu danh ngôn độc đáo: *"There are no equalities, even in the human life, the inequalities are always met"* (tạm dịch *"Không có gì là đẳng thức, thậm chí cả trong đời sống con người - bất đẳng thức luôn luôn hiện hữu"*).

Trong cuốn sách này, nhóm tác giả đã tham khảo, tổng hợp nhiều tư liệu lịch sử liên quan đến bất đẳng thức của những nhà Toán học trên, từ đó xâu chuỗi và xin được chia sẻ lại cùng bạn đọc.

Từ thời xa xưa, người cổ đại đã biết tới bất đẳng thức tam giác như một vấn đề xuất phát từ thực tế. Ít lâu sau, *Euclid* (Ơclit) – vị "cha đẻ của hình học" đã sử dụng ý tưởng từ phương pháp hình học để chứng minh bất đẳng thức AM-GM tổng quát với $n = 2$ (AM-GM được coi là *bất đẳng thức nguyên thủy thứ hai* sau bất đẳng thức tam giác).

Vào thời kì cận đại, *Cauchy* (Côsi) được xem như người đầu tiên phát hiện và đưa ra phép chứng minh tài tình cho *bất đẳng thức AM-GM tổng quát* dựa trên phép quy nạp Toán học. Nhưng một điều ít người biết là trên thực tế, trước đó, vào năm 1729, *C. Maclaurin* (1698 – 1746), nhà toán học nổi tiếng người Scotland đã chứng minh được bất đẳng thức này. Ông có nhiều đóng góp lớn trong lĩnh vực bất đẳng thức. Tuy nhiên ông không chú trọng về việc đặt tên những bất đẳng thức tổng quát mình tìm được. Có lẽ vì vậy mà lịch sử bất đẳng thức AM-GM lại ghi dấu ấn của Cauchy chứ không phải là Maclaurin.

Xét về ý nghĩa Toán học, bất đẳng thức AM-GM được coi là một trong bốn cầu nối quan trọng cho sự phát triển bất đẳng thức từ thời đại của *Newton* đến đầu thế kỉ 20.

Trong cuốn sách *"Means and their Inequalities"* (Springer Publishing House 1/1988) của nhóm tác giả *P. S. Bullen, D. S. Mitrinovi, P. M. Vasic*, họ đã đưa ra trên 50 cách chứng minh cho bất đẳng thức AM-GM.

Sau đây là một số chứng minh thông dụng và phổ cập nhất hiện nay.

Cách 1. Đặt $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\alpha^n \geq x_1 x_2 \cdots x_n. \tag{2}$$

Với một bất đẳng thức tổng quát thì phép quy nạp Toán học có lẽ là con đường đầu tiên và khả thi nhất mà chúng ta nghĩ tới. Thật vậy, ta sẽ sử dụng phép quy nạp để chứng minh (2).

Cơ sở: Với $n = 1$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả thiết quy nạp: Giả sử bất đẳng thức đúng với n $(n \geq 1)$, tức: *Với mọi* $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, *thì*

$$\alpha^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Quy nạp: Xét $n+1$ số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, ta có

$$(n+1)\alpha = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}.$$

Nếu tất cả các số đều bằng α thì ta có đẳng thức và từ đó suy ra ngay điều phải chứng minh. Xét các trường hợp còn lại, dễ thấy tồn tại ít nhất một số nhỏ hơn α và một số lớn hơn α. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_n > \alpha$ và $x_{n+1} < \alpha$. Khi đó,

$$(x_n - \alpha)(\alpha - x_{n+1}) > 0. \tag{3}$$

Xét n số $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x'_n$, trong đó $x'_n = x_n + x_{n+1} - \alpha \geq x_n - \alpha > 0$. Từ đó suy ra

$$n\alpha = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1} - \alpha) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x'_n.$$

Do α là trung bình cộng của $x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha \geq (x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x'_n) \cdot \alpha = (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})(x'_n \alpha). \tag{4}$$

Mặt khác từ (3) ta lại có

$$(x_n + x_{n+1} - \alpha)\alpha - x_n x_{n+1} = (x_n - \alpha)(\alpha - x_{n+1}) > 0,$$

suy ra

$$(x_n + x_{n+1} - \alpha)\alpha > x_n x_{n+1}, \text{ hay } x'_n \alpha > x_n x_{n+1}. \tag{5}$$

Hiển nhiên ta có $\alpha > 0$. Nếu có ít nhất một trong các số $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bằng không, dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng và dấu bằng không xảy ra. Xét các trường hợp còn lại, kết hợp (4) và (5) thu được

$$\alpha^{n+1} > (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})(x_n x_{n+1}) = x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}.$$

Từ đó, (1) được giải quyết hoàn toàn.

Cách 2. Xét hàm $f(x) = e^{x-1} - x$ có đạo hàm

$$f'(x) = e^{x-1} - 1.$$

Dễ thấy $f'(1) = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 1$ nên ta có thể kết luận $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $f(1) = 0$.

Từ đó suy ra $e^{x-1} - x \geq 0$, hay $x \leq e^{x-1}$ với mọi số thực x bất kì.

Bây giờ, xét một dãy các số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với trung bình cộng

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \alpha.$$

Áp dụng bất đẳng thức $x \leq e^{x-1}$ vừa chứng minh ở trên, ta có

$$\frac{x_1}{\alpha} \cdot \frac{x_2}{\alpha} \cdots \frac{x_n}{\alpha} \leq e^{\frac{x_1}{\alpha}-1} \cdot e^{\frac{x_2}{\alpha}-1} \cdots e^{\frac{x_n}{\alpha}-1} = e^{\frac{x_1}{\alpha}-1+\frac{x_2}{\alpha}-1+\cdots+\frac{x_n}{\alpha}-1},$$

tức là

$$\frac{x_1}{\alpha} \cdot \frac{x_2}{\alpha} \cdots \frac{x_n}{\alpha} \leq e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\alpha}-n} = e^{n-n} = e^0 = 1.$$

Từ đây, ta được

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \alpha^n, \text{ hay } \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \alpha.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n > 0$.

Cách 3. Với $n = 1$ và $n = 2$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, ta chứng minh nó cũng đúng với $n = 2k$. Thật vậy, sử dụng kết quả trường hợp $n = 2$, ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt[2k]{x_1 x_2 \cdots x_{2k}} &= \sqrt{\left(\sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_k}\right)\left(\sqrt[k]{x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_{2k}}\right)} \\
&\leq \frac{\sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_k} + \sqrt[k]{x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_{2k}}}{2} \\
&\leq \frac{\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} + \dfrac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{2k}}{k}}{2} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k}}{2k}.
\end{aligned}$$

Từ trên, dễ dàng suy ra bất đẳng thức đúng với $n = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$.

Đến đây, ta có tiếp tục như sau: Với mỗi n tùy ý, ta tìm được số q sao cho

$$n + q = 2^m.$$

Khi đó, với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+q} \geq 0$, ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+q}}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+q}}.$$

Trong bất đẳng thức này, chọn $a_1 = x_1, a_2 = x_2, \ldots, a_n = x_n$ và

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+q} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

ta thu được ngay: $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

Cách 4. *Sử dụng đạo hàm kết hợp với quy nạp.*

Với $n = 1$, ta có bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n, ta chứng minh nó cũng đúng cho $n+1$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_{n+1} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$.

Khi đó, dễ thấy $x_{n+1} \geq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Ta coi x_{n+1} là biến số, còn các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hằng.

Xét hàm số

$$f(x_{n+1}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} - x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x_{n+1}) &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^n - x_1 x_2 \cdots x_n \\ &\geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}{n+1}\right)^n - x_1 x_2 \cdots x_n \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n - x_1 x_2 \cdots x_n \\ &\geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}\right)^n - x_1 x_2 \cdots x_n = 0. \end{aligned}$$

Do đó $f(x_{n+1})$ là hàm đồng biến trên miền $\left[\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, +\infty\right)$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{n+1} - x_1 x_2 \cdots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)\left[\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n - x_1x_2\cdots x_n\right]$$

$$\geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)\left[\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)^n - x_1x_2\cdots x_n\right] = 0.$$

Như vậy, ta có

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq x_1x_2\cdots x_nx_{n+1},$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}}.$$

Vậy bất đẳng thức (1) cũng đúng với $n+1$, nghĩa là cũng đúng với mọi số tự nhiên n.

Cách 5. Dễ thấy (1) hiển nhiên đúng với $n = 1$, do đó ta chỉ cần xét trường hợp $n \geq 2$. Ngoài ra, ta thấy rằng nếu trong x_i có một số bằng 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng, do vậy chỉ cần xét $x_i > 0$. Khi đó, bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\frac{A_n}{G_n} \geq 1,$$

trong đó $A_n = \left(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$ và $G_n = x_1x_2\cdots x_n$.

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{A_n}{G_n} \geq \dfrac{A_{n-1}}{G_{n-1}}$. (6)

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{nx_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\left[\frac{n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})}{(n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}\right]^{n-1} \leq 1.$$

Đặt $a = \dfrac{nx_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$ và $b = \dfrac{n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})}{(n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$ thì ta có

$$a, b > 0 \text{ và } a + (n-1)b = n.$$

Bất đẳng thức trên trở thành $ab^{n-1} \leq 1$.

Thay $a = n - (n-1)b$, ta được

$$\left[n-(n-1)b\right]b^{n-1} \le 1,$$
$$n(b^n - b^{n-1}) - (b^n - 1) \ge 0,$$
$$nb^{n-1}(b-1) - (b-1)(b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1) \ge 0,$$
$$(b-1)\left[nb^{n-1} - (b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1)\right] \ge 0,$$
$$(b-1)\left[(n-1)(b^{n-1} - b^{n-2}) + (n-2)(b^{n-2} - b^{n-3}) + \cdots + (b-1)\right] \ge 0,$$
$$(b-1)^2\left[(n-1)b^{n-2} + (n-2)b^{n-3} + \cdots + 2b + 1\right] \ge 0.$$

Do bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta suy ra (6) cũng đúng.

Bây giờ, sử dụng liên tiếp (6), ta được

$$\frac{A_n}{G_n} \ge \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} \ge \cdots \ge \frac{A_2}{G_2} \ge \frac{A_1}{G_1} = 1.$$

2 CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP CỦA AM-GM

Bất đẳng thức AM-GM có nhiều ý nghĩa và ứng dụng trong việc giải toán bất đẳng thức. Ngoài ra, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có thể giải quyết được nhiều lớp bài toán tìm cực trị và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không cần dùng tới kiến thức Giải tích cao cấp.

Trước tiên, chúng ta quan tâm nhiều nhất đến hai trường hợp riêng của bất đẳng thức AM-GM là

- *Trường hợp* $n = 2$. Lúc này bất đẳng thức được viết lại thành: *Nếu* a, b *là các số thực không âm, thì*

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bất đẳng thức này còn được viết ở hai dạng khác tương đương là

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad (a+b)^2 \ge 4ab, \quad a^2 + b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}.$$

- *Trường hợp* $n = 3$. Ta có bất đẳng thức AM-GM cho ba biến không âm: *Nếu* a, b, c *là các số thực không âm, thì*

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Trong thực tế áp dụng, ta còn sử dụng một dạng khác tương đương của bất đẳng thức này là

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Sau đây là 1 chuỗi đánh giá được thiết lập dựa trên bất đẳng thức AM-GM.

Với mọi số thực a, b, c, ta luôn có

(i) $\quad a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca.$

(ii) $\quad a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3}.$

(iii) $\quad (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca).$

(iv) $\quad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c).$

(v) $\quad (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c).$

Chứng minh

(i) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho bộ hai số dạng $x^2+y^2 \ge 2xy$, ta có

$$a^2+b^2 \ge 2ab,\ \ b^2+c^2 \ge 2bc,\ \ c^2+a^2 \ge 2ca.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$2(a^2+b^2+c^2) \ge 2(ab+bc+ca),$$

từ đó suy ra

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

(ii) Bất đẳng thức này tương đương với

$$3(a^2+b^2+c^2) \ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),$$

hay

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca.$$

Đây chính là bất đẳng thức vừa chứng minh ở phần *(i)*.

(iii) Sử dụng phép khai triển tương tự như trên.

(iv) Để ý rằng $abc(a+b+c)=(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)$. Vậy nếu ta đặt $x=ab, y=bc, z=ca$ thì khi đó, bất đẳng thức *(iv)* sẽ trở thành

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx.$$

Một lần nữa, ta lại thu được bất đẳng thức *(i)*, chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi $ab=bc=ca$, tức $a=b=c$, hoặc $b=c=0$, hoặc $c=a=0$, hoặc $a=b=0$.

(v) Tương tự như *(iv)*, đặt $x = ab, y = bc, z = ca$. Lần này ta thu được bất đẳng thức tương tự ở với *(iii)* là

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx).$$

Đẳng thức xảy ra khi $ab = bc = ca$, tức $a = b = c$, hoặc $b = c = 0$, hoặc $c = a = 0$, hoặc $a = b = 0$.

3 BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM SUY RỘNG

Trong cách chứng minh thứ hai của bất đẳng thức AM-GM mà ta đã trình bày ở phần 1 có sử dụng bất đẳng thức sau: *Với mọi số thực x bất kì, ta có*

$$e^{x-1} \geq x.$$

Sử dụng kết quả này, ta còn có thể suy ra một kết quả khác tổng quát hơn, đó là *bất đẳng thức AM-GM suy rộng*:

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Khi đó ta có

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n \geq a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_n^{x_n}.$$

Chứng minh

Nếu $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$ thì ta có $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, và bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n > 0$.

Đặt $a = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n > 0$. Ta có: $a = a^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$,

do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^{x_1}\left(\frac{a_2}{a}\right)^{x_2}\cdots\left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_n} \leq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức $x \leq e^{x-1}$, ta có: $\dfrac{a_1}{a} \leq e^{\frac{a_1}{a}-1}$,

từ đó suy ra: $\left(\dfrac{a_1}{a}\right)^{x_1} \leq e^{\frac{x_1a_1}{a}-x_1}$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^{x_2} \leq e^{\frac{x_2a_2}{a}-x_2}, \ldots, \left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_n} \leq e^{\frac{x_na_n}{a}-x_n}.$$

Nhân các bất đẳng thức trên lại theo vế, ta suy ra

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^{x_1}\left(\frac{a_2}{a}\right)^{x_2}\cdots\left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_n} \le e^{\frac{x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n}{a}-(x_1+x_2+\cdots+x_n)} = e^{1-1} = 1.$$

Bất đẳng thức AM-GM suy rộng được chứng minh.

Nhận xét. Ngoài cách chứng minh như trên, ta cũng có thể sử dụng quy nạp. Bạn đọc có thể tự thử sức mình với cách chứng minh này.

4 SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC KINH ĐIỂN KHÁC

Có rất nhiều bất đẳng thức kinh điển (mà chúng ta vẫn thường hay sử dụng) có thể được suy ra từ bất đẳng thức AM-GM. Dưới đây, chúng ta sẽ sử dụng AM-GM để chứng minh lại các kết quả kinh điển đó.

4.1. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz được phát biểu như sau:

Với hai dãy số thực tùy ý $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ta có

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2). \quad (1)$$

Trong thế giới của những bất đẳng thức thì AM-GM và Cauchy-Schwarz được xem là hai bất đẳng thức kinh điển và thông dụng nhất. Chúng thường được sử dụng trong việc giải toán và chứng minh bất đẳng thức.

Và một điều đặc biệt là, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz lại có thể được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức AM-GM. Sau đây là chứng minh (bằng cách sử dụng AM-GM) của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ thì ta có $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ và (1) hiển nhiên đúng.

Tương tự như vậy với trường hợp $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$.

Bây giờ, ta xét trường hợp $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$ và $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 > 0$. Lấy căn bậc hai hai vế của (1), sau đó chia cả hai vế cho $\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$, ta được

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}}\right| \le 1.$$

Tới đây, sử dụng tính chất về dấu giá trị tuyệt đối kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i||b_i|}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{\sum_{j=1}^{n}a_i^2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j^2}{\sum_{j=1}^{n}b_i^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

4.2. Chứng minh bất đẳng thức Holder

Ở trên, ta đã sử dụng thành công AM-GM để chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Có một điểm đáng chú ý là, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz mới chỉ cho phép ta so sánh các đại lượng với lũy thừa 2. Vậy trong trường hợp các số mũ khác thì sao?

Xuất phát từ câu hỏi này, nhà Toán học người Đức *Otto Ludwig Holder* (1859 – 1937) đã tìm được dạng mở rộng cho bất đẳng thức này. Và tên ông đã được dùng để đặt cho bất đẳng thức tổng quát đó – *bất đẳng thức Holder*:

Cho m,n là hai số nguyên dương và x_{ij} $(i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n)$ là các số thực dương tùy ý. Giả sử $w_1,w_2,\dots,w_n$ là các số dương sao cho

$$w_1+w_2+\cdots+w_n=1.$$

Khi đó, ta có

$$(x_{11}+\cdots+x_{m1})^{w_1}(x_{12}+\cdots+x_{m2})^{w_2}\cdots(x_{1n}+\cdots+x_{mn})^{w_n}\ge$$
$$\ge x_{11}^{w_1}x_{12}^{w_2}\cdots x_{1n}^{w_n}+x_{21}^{w_1}x_{22}^{w_2}\cdots x_{2n}^{w_n}+\cdots+x_{m1}^{w_1}x_{m2}^{w_2}\cdots x_{mn}^{w_n}.$$

Chứng minh

Đặt $y_i=x_{1i}+x_{2i}+\cdots+x_{mi}$ và $y_{ji}=\dfrac{x_{ji}}{y_i}$ với

$i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m$ thì ta có $y_{1i}+y_{2i}+\cdots+y_{mi}=1$

và

$$x_{11}^{w_1}x_{12}^{w_2}\cdots x_{1n}^{w_n}+x_{21}^{w_1}x_{22}^{w_2}\cdots x_{2n}^{w_n}+\cdots+x_{m1}^{w_1}x_{m2}^{w_2}\cdots x_{mn}^{w_n}=$$
$$=y_1^{w_1}y_2^{w_2}\cdots y_n^{w_n}(y_{11}^{w_1}y_{12}^{w_2}\cdots y_{1n}^{w_n}+y_{21}^{w_1}y_{22}^{w_2}\cdots y_{2n}^{w_n}+\cdots+y_{m1}^{w_1}y_{m2}^{w_2}\cdots y_{mn}^{w_n}).$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$y_{11}^{w_1}y_{12}^{w_2}\cdots y_{1n}^{w_n}+y_{21}^{w_1}y_{22}^{w_2}\cdots y_{2n}^{w_n}+\cdots+y_{m1}^{w_1}y_{m2}^{w_2}\cdots y_{mn}^{w_n}\le 1.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng, ta được

$$y_{11}^{w_1}y_{12}^{w_2}\cdots y_{1n}^{w_n} \le w_1y_{11} + w_2y_{12} + \cdots + w_ny_{1n},$$
$$y_{21}^{w_1}y_{22}^{w_2}\cdots y_{2n}^{w_n} \le w_1y_{21} + w_2y_{22} + \cdots + w_ny_{2n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{m1}^{w_1}y_{m2}^{w_2}\cdots y_{mn}^{w_n} \le w_1y_{m1} + w_2y_{m2} + \cdots + w_ny_{mn}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế, ta suy ra

$$\begin{aligned} &y_{11}^{w_1}y_{12}^{w_2}\cdots y_{1n}^{w_n} + y_{21}^{w_1}y_{22}^{w_2}\cdots y_{2n}^{w_n} + \cdots + y_{m1}^{w_1}y_{m2}^{w_2}\cdots y_{mn}^{w_n} \le \\ &\le w_1(y_{11} + y_{21} + \cdots + y_{m1}) + \cdots + w_n(y_{1n} + y_{2n} + \cdots + y_{mn}) \\ &= w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức Holder được chứng minh.

4.3. Chứng minh bất đẳng thức Minkowski

Trong phần trên, ta đã chứng minh được bất đẳng thức Holder bằng cách sử dụng AM-GM. Và từ bất đẳng thức Holder, ta có thể suy ra được một kết quả kinh điển khác – *bất đẳng thức Minkowski*:

Cho m, n là hai số nguyên dương và x_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n)$ là các số thực dương tùy ý.

Khi đó với mọi $p > 1$, ta có: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$

Chứng minh

Đặt $q = \dfrac{p}{p-1}$ thì ta có $q > 1$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Do đó, theo bất đẳng thức Holder,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^p &= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^{p-1}\right] = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^{p-1}\right] \\ &\le \sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}\right\} = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$

Bất đẳng thức Minkowski được chứng minh.

CHƯƠNG 2

MỘT SỐ KĨ THUẬT THƯỜNG SỬ DỤNG

"Each problem that I solved became a rule, which served afterwards to solve other problems"
Rene Descartes

1 NHỮNG KĨ NĂNG CƠ BẢN NHẤT CẦN CÓ

Để sử dụng thành công bất đẳng thức AM-GM, đầu tiên độc giả cần trang bị cho mình đầy đủ công cụ cơ bản (gồm những biến thể AM-GM thường dùng). Sau đó là việc rèn luyện cách nhìn tổng quan về từng lớp bài toán cũng như những phương pháp, những kĩ thuật cụ thể cho từng dạng. Có những bài toán thoạt nhìn có thể ra ngay lời giải, nhưng cũng có không ít bài toán sẽ làm tốn của bạn hàng ngày, hàng tuần lễ, thậm chí lâu hơn nữa.

Trong cuốn sách này, các vấn đề được trình bày từ đơn giản đến phức tạp, phù hợp với lối tư duy phát triển phổ biến hiện nay. Sau đây là những ví dụ đậm chất "nguyên thủy", được coi như màn khởi động nhẹ nhàng cho cuộc hành trình khám phá thế giới bất đẳng thức.

Ví dụ 1. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh*

$$xy(x^2 + y^2) \le 2.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4}$, ta có

$$xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2xy)(x^2 + y^2) \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\left[2xy + (x^2 + y^2)\right]^2}{4} = \frac{(x+y)^4}{8} = 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. □

Ví dụ 2. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh

$$x^3y^3(x^3 + y^3) \le 2.$$

Lời giải

Do $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2(x^2 - xy + y^2)$ nên ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh

$$x^3y^3(x^2 - xy + y^2) \le 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ 4 số dạng: $abcd \le \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4$,

ta có: $x^3y^3(x^2 - xy + y^2) = (xy)(xy)(xy)(x^2 - xy + y^2)$

$$\le \left[\frac{xy + xy + xy + (x^2 - xy + y^2)}{4}\right]^4 = \left[\frac{(x+y)^2}{4}\right]^4 = 1.$$

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. □

Nhận xét. *Từ ví dụ 1 và ví dụ 2*, một cách tự nhiên, ta nghĩ tới bài toán tổng quát sau: Cho x, y *là các số thực dương thỏa mãn* $x + y = 2$ *và hằng số* $k \in \mathbb{Z}^+$. *Chứng minh rằng*

$$x^k y^k (x^k + y^k) \le 2.$$

Bài toán này xin được dành lại cho bạn đọc thử sức. (*Gợi ý:* Ta có thể dùng phép quy nạp toán học để chứng minh kết quả này).

Ví dụ 3. Cho $c > 0$ và $a, b \ge c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$P = \sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \le 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$, ta có

$$P \le \frac{\dfrac{c}{b} + \dfrac{a-c}{a}}{2} + \frac{\dfrac{c}{a} + \dfrac{b-c}{b}}{2} = \frac{\dfrac{c}{b} + 1 - \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{a} + 1 - \dfrac{c}{b}}{2} = 1.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b-c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Ví dụ, đẳng thức có thể xảy ra khi $a = b = 2c$. □

Ví dụ 4. Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{x^3+3yzt}+\frac{y^3}{y^3+3ztx}+\frac{z^3}{z^3+3txy}+\frac{t^3}{t^3+3xyz}\geq 1.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $3abc \leq a^3+b^3+c^3$, dễ thấy

$$\frac{x^3}{x^3+3yzt}+\frac{y^3}{y^3+3ztx}+\frac{z^3}{z^3+3txy}+\frac{t^3}{t^3+3xyz}\geq$$

$$\geq \frac{x^3}{x^3+(y^3+z^3+t^3)}+\frac{y^3}{y^3+(z^3+t^3+x^3)}+$$

$$+\frac{z^3}{z^3+(t^3+x^3+y^3)}+\frac{t^3}{t^3+(x^3+y^3+z^3)}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t>0$. $\square$

Ví dụ 5. *Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn*

$$(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)>0.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}\geq 2.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\sqrt{xy}\leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$\sqrt{a(b+c+d)}\leq \frac{a+(b+c+d)}{2},$$

suy ra:

$$\frac{2\sqrt{a(b+c+d)}}{a+b+c+d}\leq 1.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này cho $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}\geq 0$, ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}\geq \frac{2a}{a+b+c+d}. \qquad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}\geq \frac{2b}{a+b+c+d}, \sqrt{\frac{c}{d+a+b}}\geq \frac{2c}{a+b+c+d},$$

$$\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2d}{a+b+c+d}.$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên, ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq$$

$$\geq \frac{2a}{a+b+c+d} + \frac{2b}{a+b+c+d} + \frac{2c}{a+b+c+d} + \frac{2d}{a+b+c+d} = 2.$$

Phép chứng minh đến đây được hoàn tất.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong a,b,c,d có hai số bằng nhau và hai số bằng 0. □

Nhận xét. Bạn đọc cũng có thể nhận ra đánh giá (1) bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c+d)}} \geq \frac{2a}{a+(b+c+d)}. \quad (2)$$

Tuy nhiên, cách trình bày này không phù hợp với chương trình sách giáo khoa của nước ta, vì nếu $a=0$ thì sẽ không tồn tại đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c+d)}}.$$

Và cũng chính vì lí do như vậy, chúng tôi đã chọn cách trình bày khá rườm rà như trên để tránh được *sự cố ngoài ý muốn* này. Mặc dù như thế, ý tưởng của chúng ta vẫn là xuất phát từ (2).

Ví dụ 6. *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} > 0.$$

Từ đó suy ra

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$. □

Ví dụ 7. *Cho $x, y > 1$. Chứng minh rằng* $\dfrac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)} \geq 8.$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)} &= \frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1}\cdot\frac{y^2}{x-1}} \\ &= \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}}.\end{aligned} \tag{1}$$

Mặt khác, lại để ý rằng nếu sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ hai số dạng $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, thì

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{1\cdot(x-1)} \leq \frac{1+(x-1)}{2} = \frac{x}{2},$$
$$\sqrt{y-1} = \sqrt{1\cdot(y-1)} \leq \frac{1+(y-1)}{2} = \frac{y}{2}.$$

Nhân hai bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$\sqrt{(x-1)(y-1)} \leq \frac{xy}{4},$$

suy ra
$$\frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \geq 8. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta dễ dàng thu được điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y-1} = \dfrac{y^2}{x-1} \\ x=2, y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2.$ □

Ví dụ 8. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, ta luôn có*

$$\frac{a^{11}}{bc}+\frac{b^{11}}{ca}+\frac{c^{11}}{ab}+\frac{3}{a^2b^2c^2} \geq \frac{a^6+b^6+c^6+9}{2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^{11}}{bc}+abc \geq 2a^6.$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại, ta suy ra

$$\frac{a^{11}}{bc}+\frac{b^{11}}{ca}+\frac{c^{11}}{ab}\geq 2(a^6+b^6+c^6)-3abc.$$

Vậy chỉ cần chứng minh được

$$2(a^6+b^6+c^6)-3abc+\frac{3}{a^2b^2c^2}\geq \frac{a^6+b^6+c^6+9}{2}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$3(a^6+b^6+c^6)+\frac{6}{a^2b^2c^2}-6abc\geq 9.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$a^6+b^6+c^6\geq 3a^2b^2c^2.$$

Do đó, bài toán quy về chứng minh

$$9t^2+\frac{6}{t^2}-6t\geq 9 \text{ với } t=abc>0.$$

Đây là một kết quả đúng, vì theo AM-GM ta có

$$9t^2+\frac{6}{t^2}-6t\geq 9t^2+\frac{6}{t^2}-3(t^2+1)=6\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-3$$

$$\geq 6\cdot 2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{t^2}}-3=12-3=9.$$

Bài toán được giải quyết xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 9. *Cho các số thực dương a,b,c,d. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2}{abcd}\geq 64.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2\geq 64abcd.$$

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM-GM dạng $(x+y)^2\geq 4xy$, ta có

$$(a+b+c+d)^2\geq 4d(a+b+c),$$

$$(a+b+c)^2\geq 4c(a+b),(a+b)^2\geq 4ab.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta suy ra

$$(a+b)^2(a+b+c)^2(a+b+c+d)^2\geq 64abcd(a+b)(a+b+c). \quad (1)$$

Từ đó, bằng cách đơn giản cả hai vế của (1) cho $(a+b)(a+b+c)$, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d = a+b+c \\ c = a+b \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow d = 2c = 4b = 4a > 0. \qquad \square$$

Ví dụ 10. *Cho các số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}} + \frac{16abcd}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \geq 5.$$

Lời giải

Để ý rằng: $a+b+c+d = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+d}{2} + \frac{d+a}{2}$,

do đó bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{a+b}{2\sqrt[4]{abcd}} + \frac{b+c}{2\sqrt[4]{abcd}} + \frac{c+d}{2\sqrt[4]{abcd}} + \frac{d+a}{2\sqrt[4]{abcd}} + \\ + \frac{16abcd}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \geq 5,$$

hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM bộ bốn số thì

$$VT \geq 5\sqrt[5]{\frac{a+b}{2\sqrt[4]{abcd}} \cdot \frac{b+c}{2\sqrt[4]{abcd}} \cdot \frac{c+d}{2\sqrt[4]{abcd}} \cdot \frac{d+a}{2\sqrt[4]{abcd}} \cdot \frac{16abcd}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}} \\ = 5.$$

Chứng minh hoàn tất.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d > 0$. $\square$

Ví dụ 11. *Cho $x > 0$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương tùy ý không lớn hơn x. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) \geq \frac{x^n}{n}.$$

Lời giải

Đặt $t = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, 0 < t \leq x$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) \leq \left[\frac{(x-a_1)+(x-a_2)+\cdots+(x-a_n)}{n}\right]^n \\ = (x-t)^n.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh được: $\frac{x^{n+1}}{nt} - (x-t)^n \geq \frac{x^n}{n}$.

Bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$\frac{x^n(x-t)}{nt} \geq (x-t)^n,$$

$$nt(x-t)^{n-1} \leq x^n.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$nt(x-t)^{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot (n-1)t \cdot (x-t)^{n-1}$$

$$\leq \frac{n}{n-1}\left[\frac{(n-1)t + (n-1)\cdot(x-t)}{n}\right]^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} x^n \leq x^n.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x$. □

BÀI TẬP

1. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq \frac{8}{9}(a+b)(b+c)(c+a).$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$2^{a^2} + 2^{b^2} + 2^{c^2} \geq 2^{ab} + 2^{bc} + 2^{ca}.$$

4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{1}{2}.$$

5. Chứng minh rằng với $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ là các số thực dương, ta có

$$(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(m^3+n^3+p^3) \geq$$

$$\geq (axm+byn+czp)^3.$$

6. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=3$ thì

$$\frac{a^2b}{2a+b} + \frac{b^2c}{2b+c} + \frac{c^2a}{2c+a} \leq \frac{3}{2}.$$

7. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right).$$

8. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

2 KĨ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI

Trong bất đẳng thức, "kĩ thuật chọn điểm rơi" là một kĩ thuật tối quan trọng. Ý tưởng chính là việc xác định được dấu đẳng thức xảy ra khi nào để ta có thể sử dụng những đánh giá hợp lí. Bạn hãy tưởng tượng nếu bạn là một du khách nước ngoài, muốn biết đường đến hồ Gươm nhưng lại cầm trên tay tấm bản đồ TP Hồ Chí Minh và cố gắng tìm kiếm. Điều này là vô ích. Trong bất đẳng thức cũng như vậy, bất kì đánh giá nào (trong chuỗi đánh giá của bạn) không "bảo toàn" được dấu bằng của bài toán thì chứng minh của bạn sẽ bị phủ nhận hoàn toàn. Hãy xét những ví dụ sau để hiểu rõ hơn điều chúng tôi muốn đề cập.

Ví dụ 2.2.1. *Cho $x \geq 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$y = 3x + \frac{1}{2x}.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Lời giải sai. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, "dễ thấy"

$$y = 3x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{3x\cdot\frac{1}{2x}} = \sqrt{6}.$$

Vậy ta có kết luận $\min y = \sqrt{6}$.

Nguyên nhân. Lời giải trên sở dĩ sai vì trong đánh giá trên, dấu bằng của bài toán chỉ xảy ra khi $3x = \frac{1}{2x}$, tức $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Tuy nhiên, giá trị này lại không nằm trong miền xác định của bài toán là $x \geq 1$ (vì $\frac{1}{\sqrt{6}} < 1$). Nói cách khác, người đưa ra lời giải này đã chọn sai "điểm rơi" của bài toán.

Sau đây là lời giải đúng.

Lời giải đúng. Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Để "bảo toàn" được dấu bằng khi sử dụng AM-GM, ta sẽ chọn hằng số α sao cho

$$\alpha x = \frac{1}{2x}.$$

Cho $x = 1$, ta thu được $\alpha = \frac{1}{2}$. Từ đó, có lời giải,

$$y = 3x + \frac{1}{2x} = \frac{5x}{2} + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) \geq \frac{5x}{2} + 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2x}} = \frac{5x}{2} + 1 \geq \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}.$$

Vậy $\min_x y = \frac{7}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $x = 1$. □

Ví dụ 2. *Cho* $a \geq 10, b \geq 100$ *và* $c \geq 1000$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Bài toán này thực chất có thể tách thành ba bài toán nhỏ là

- Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_1 = a + \frac{1}{a}$ với $a \geq 10$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_2 = b + \frac{1}{b}$ với $b \geq 100$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_3 = c + \frac{1}{c}$ với $c \geq 1000$.

Trước hết, ta xét biểu thức $P_1 = a + \frac{1}{a}$.

Dự đoán $\min P_1 = \frac{101}{10}$ đạt được khi $a = 10$. Khi đó, ta sẽ chọn α sao cho

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{a}.$$

Với $a = 10$, ta có ngay $\alpha = 100$.

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a + \frac{1}{a} = \frac{99a}{100} + \left(\frac{a}{100} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{99a}{100} + 2\sqrt{\frac{a}{100}\cdot\frac{1}{a}}$$
$$= \frac{99a}{100} + \frac{1}{5} \geq \frac{99\cdot 10}{100} + \frac{1}{5} = \frac{101}{10}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chỉ ra được

$$P_2 \geq 100 + \frac{1}{100},\quad P_3 \geq 1000 + \frac{1}{1000}.$$

Từ đó, ta đi đến kết luận: $\min P = 1110 + \frac{111}{1000}$,

đạt được khi và chỉ khi $a = 10, b = 100$ và $c = 1000$. □

Ví dụ 3. *Cho $a,b,c > 0$ thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$, khi đó

$$\begin{cases} a = b = c = \dfrac{1}{3} \\ a + b = b + c = c + a = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Từ đó, để "bảo toàn" được dấu bằng cho bài toán, ta sẽ đánh giá như sau. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} + \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} + \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \leq 2.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} \leq \frac{\frac{2}{3} + (a+b)}{2},\quad \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} \leq \frac{\frac{2}{3} + (b+c)}{2},$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \leq \frac{\frac{2}{3} + c + a}{2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế với chú ý $a + b + c = 1$, ta thu được ngay điều phải chứng minh. □

Ví dụ 4.

(a) Cho $x \geq 1$ và $y \geq 1$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy.$$

(b) Cho $x, y > 0$ và $x + y \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right).$$

Phân tích & định hướng lời giải

(a) Ý tưởng đầu tiên chúng ta nghĩ tới là làm thế nào để phá bỏ được lớp căn thức ở vế trái (vì biểu thức bên vế phải không chứa căn). Một cách tự nhiên, ta nhớ lại bất đẳng thức AM-GM bộ hai số dạng

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

Thật vậy, để ý rằng: $\sqrt{y-1} = \sqrt{1 \cdot (y-1)} \le \dfrac{1 + (y-1)}{2} = \dfrac{y}{2}$.

Suy ra: $x\sqrt{y-1} \le \dfrac{xy}{2}$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có: $y\sqrt{x-1} \le \dfrac{xy}{2}$.

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $1 = y - 1$ và $1 = x - 1$, tức $x = y = 2$.

(b) Nhận thấy $A = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{y^2}\right)$ là một biểu thức đối xứng chứa x^2, y^2 ở dưới mẫu (tức là $xy \neq 0$) nên ta dự đoán dấu bằng sẽ xảy ra khi

$$x = y = \frac{1}{2},$$

khi đó $A = 9$. Sau đây, ta sẽ chứng minh nhận định này là đúng, tức

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \ge 9.$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) \ge 9x^2y^2,$$

hay tương đương $\quad 1 \ge x^2 + y^2 + 8^2xy^2.$

Để ý rằng $1 \ge (x+y)^2$ nên ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh

$$(x+y)^2 \ge x^2 + y^2 + 8x^2y^2.$$

Sau khi thu gọn, ta viết được bất đẳng thức lại thành

$$2xy(1 - 4xy) \ge 0,$$

đúng vì theo AM-GM, ta có

$$0 < xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \le \frac{1}{4}.$$

Bài toán được giải quyết xong.

Vậy ta kết luận $\min A = 9$ khi $x = y = \frac{1}{2}$. □

Ví dụ 5. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + xy = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^2 + y^2.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Sai lầm thường gặp. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^2 + 1 \ge 2x, \quad y^2 + 1 \ge 2y, \quad x^2 + y^2 \ge 2xy.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế và rút gọn, ta suy ra

$$x^2 + y^2 + 1 \ge x + y + xy = 8.$$

Do đó

$$P = x^2 + y^2 \ge 7.$$

Kết luận: $\min P = 7$.

Nhận xét. Lời giải trên là sai vì ta chỉ chứng minh được $P > 7$ chứ không phải $P \ge 7$. Thật vậy, nếu xét tới dấu bằng thì để thỏa mãn những đánh giá trên, ta phải có $x = y = 1$ và $x + y + xy = 8$. Tuy nhiên, điều này là không thể xảy ra, hay nói một cách khác $P > 7$.

Bạn đọc lưu ý rằng khi kết luận min - giá trị nhỏ nhất (hay max - giá trị lớn nhất) của 1 biểu thức là một hằng số nào đó thì nhất định phải chỉ ra được sự tồn tại của dấu bằng, đó là điều quan trọng nhất. Và sau đây là lời giải đúng.

Lời giải đúng. Để ý rằng theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$8 = x + y + xy \le x + y + \frac{(x+y)^2}{4} = t + \frac{t^2}{4},$$

trong đó $t = x + y$.

Từ đây ta suy ra $t^2 + 4t - 32 \ge 0$, tức $t \le -8 \vee t \ge 4$.

Và do đó $t^2 \ge 16$. Mặt khác, ta lại có

$$x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{t^2}{2} \ge \frac{16}{2} = 8.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x+y=4 \\ x=y \\ x+y+xy=8 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2.$

Vậy ta kết luận $\min P = 8$. □

Ví dụ 6. *Cho các số thực a, b thỏa mãn các điều kiện*

$$0 \le a \le 3,\ 8 \le b \le 11 \text{ và } a+b=11.$$

Tìm giá trị lớn nhất của tích: $P = ab$.

Phân tích & định hướng lời giải

Từ các giả thiết $0 \le a \le 3, 8 \le b \le 11$ và $a+b=11$, ta dự đoán P sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $a=3$ và $b=8$ (khi đó, $8a=3b$). Vậy ta sẽ sử dụng bất đẳng thức AM-GM một cách khéo léo như sau

$$P = \frac{1}{24}\cdot(8a)\cdot(3b) \le \frac{1}{24}\cdot\frac{(8a+3b)^2}{4} = \frac{\left[3(a+b)+5b\right]^2}{96}$$
$$= \frac{(33+5a)^2}{96} \le \frac{(33+5\cdot 3)^2}{96} = 24.$$

Vậy ta kết luận được $\max P = 24$, đạt được khi và chỉ khi $a=3, b=8$. □

Ví dụ 7. *Cho các số thực $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 3$ thỏa mãn $a+b+c=6$.*

Chứng minh rằng: $abc \le \dfrac{27}{4}$.

Lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = \dfrac{3}{2}, c = 3$. Khi đó, $a+b=c$.

Vì vậy, sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$, ta có

$$abc \le \frac{c(a+b)^2}{4} = \frac{a+b}{4}\cdot c\cdot(a+b) \le \frac{a+b}{4}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{4} = \frac{9}{4}(a+b).$$

Mặt khác, theo giả thiết thì $a+b+c=6$ và $c \ge 3$ nên ta dễ dàng suy ra $a+b \le 3$. Từ đó

$$abc \le \frac{9}{4}(a+b) \le \frac{9}{4}\cdot 3 = \frac{27}{4}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 8. *Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Nhận xét. Với đa số những biểu thức ba biến đối xứng thì giá trị nhỏ nhất (và cả giá trị lớn nhất) của chúng thường đạt được khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$.

Trong bài toán này, để dự đoán min của P, ta sẽ thử chọn $a = b = c = \frac{2}{3}$, sau đó so sánh với trường hợp $a = b = 1, c = 0$ (trường hợp này tam giác của ta được gọi là *tam giác suy biến*). Thật thú vị khi trong bài toán này, ở cả hai trường hợp ta đều thu được $P = 8$.

Vậy ta sẽ thử chứng minh

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 8,$$

hay là (bước này được gọi là đồng bậc hoá bất đẳng thức)

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq (a + b + c)^3.$$

Ta có

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)\right] + 6abc,$$

do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3\left[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)\right] + 6abc \leq$$
$$\leq 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc,$$

hay tương đương

$$\begin{aligned} P &= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - ab(a + b - c) - bc(b + c - a) - ca(c + a - b) \geq 0. \end{aligned}$$

Do a,b,c là ba cạnh của một tam giác nên

$$a + b - c \geq 0, \quad b + c - a \geq 0, \quad c + a - b \geq 0.$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$ab(a + b - c) + bc(b + c - a) + ca(c + a - b) \leq$$
$$\leq \frac{(a + b)^2}{4}(a + b - c) + \frac{(b + c)^2}{4}(b + c - a) + \frac{(c + a)^2}{4}(c + a - b)$$
$$= \frac{(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - c(a + b)^2 - b(c + a)^2 - a(b + c)^2}{4}$$

$$= \frac{2(a^3+b^3+c^3)+2[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]-6abc}{4}$$
$$= \frac{(a^3+b^3+c^3)+[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]-3abc}{2}.$$

Suy ra

$$P \geq a^3+b^3+c^3 - \frac{a^3+b^3+c^3+\sum ab(a+b)-3abc}{2}$$
$$= \frac{a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)}{2} = \frac{P}{2}.$$

Do vậy, $P \geq 0$. Bài toán được giải quyết xong.

Vậy ta đi đến kết luận $\min P = 8$, đạt được khi $a=b=c=\frac{2}{3}$ hoặc khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 9. *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=2$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x}+\sqrt{xy^3+yz^3+zx^3} \leq 2.$$

(Nguyễn Anh Cường)

Phân tích & định hướng lời giải

Để ý rằng dấu đẳng thức xảy ra ví dụ khi $x=y=1, z=0$. Khi đó,

$$\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x} = \sqrt{xy^3+yz^3+zx^3}.$$

Vì vậy, ta hoàn toàn có thể sử dụng đánh giá $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ (hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM-GM) để loại bỏ căn thức mà vẫn giữ nguyên được dấu bằng của bài toán. Vậy ta đã quy được bài toán về chứng minh

$$x^3y+y^3z+z^3x+xy^3+yz^3+zx^3 \leq 2,$$

hay tương đương

$$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2) \leq 2.$$

Mặt khác, dễ thấy

$$\begin{aligned}&xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2) \leq \\ &\quad \leq xy(x^2+y^2+z^2)+yz(y^2+z^2+x^2)+zx(z^2+x^2+y^2) \\ &\quad = (xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2) \leq 2.$$

Tới đây, áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4}$, ta được

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2) &= \frac{1}{2}\cdot 2(xy+yz+zx)\cdot(x^2+y^2+z^2)\\ &\le \frac{1}{2}\cdot\frac{\left[2(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)\right]^2}{4}\\ &= \frac{(x+y+z)^4}{8} = \frac{2^4}{8} = 2.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 0$ hoặc các hoán vị. □

/í dụ 10. *Cho A, B, C là ba góc của một tam giác sao cho*

$$5\cos A + 6\cos B + 7\cos C = 9.$$

Chứng minh rằng: $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^3\dfrac{B}{2} + \sin^4\dfrac{C}{2} \ge \dfrac{7}{16}$.

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Đây là một bài toán rất đặc biệt. Tuy giả thiết cũng như bất đẳng thức cần hứng minh chứa những hệ số và số mũ hoàn toàn lệch nhau nhưng đẳng ức lại xảy ra khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$. Trước hết, ta sẽ "đại số hóa" bất đẳng ức lượng giác này bằng phép đặt ẩn phụ như sau.

Đặt $x = \sin\dfrac{A}{2}, y = \sin\dfrac{B}{2}$ và $z = \sin\dfrac{C}{2}$ (dễ thấy $x, y, z > 0$). Khi đó, ta ó một hệ quả quen thuộc là

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Ngoài ra từ giả thiết ta dễ dàng suy ra

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 = \frac{9}{2} \text{ (do } \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\text{)}.$$

Quay trở lại bài toán, ta cần chứng minh: $x^2 + y^3 + z^4 \ge \dfrac{7}{16}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$ nên sử dụng bất đẳng thức M-GM kết hợp kĩ thuật chọn điểm rơi, ta có

$$\frac{y^3}{2}+\frac{y^3}{2}+\frac{1}{16}\ge 3\sqrt[3]{\frac{y^3}{2}\cdot\frac{y^3}{2}\cdot\frac{1}{16}}=\frac{3}{4}y^2\Rightarrow y^3\ge\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{16},$$

$$z^4+\frac{1}{16}\ge 2\sqrt{z^4\cdot\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}z^2\Rightarrow z^4\ge\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{16}.$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại theo vế, thu được

$$y^3+z^4\ge\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{8}.$$

Sử dụng đánh giá này kết hợp với (1), ta được

$$\begin{aligned}x^2+y^3+z^4 &\ge x^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{8}\\ &=x^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{2}z^2+\frac{5x^2+6y^2+7z^2-\frac{9}{2}}{4}-\frac{1}{8}\\ &=\frac{9}{4}(x^2+y^2+z^2)-\frac{5}{4}\ge\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=\frac{7}{16}.\end{aligned}$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều. □

Nhận xét. Bất đẳng thức (1) có thể được chứng minh bằng cách sử dụng AM-GM như sau: Do $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$ nên ta có

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$xyz=\sqrt{x^2y^2z^2}\le\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}.$$

Kết hợp với trên, ta thu được: $x^2+y^2+z^2+2\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}\ge 1,$

từ đó dễ dàng suy ra (1).

Trên đây, chúng ta đã được tiếp xúc với những bài toán mà ở đó việc dự đoán điểm rơi có thể được thực hiện khá dễ dàng. Tuy nhiên, trong thực tế, việc giải một bài toán không phải lúc nào cũng suôn sẻ như vậy. Có những bài toán mà nếu chỉ bằng quan sát và cảm nhận thì ta không thể nào dự đoán được điểm rơi sẽ là tại đâu (vì đôi lúc điểm rơi có thể là những điểm có giá trị lẻ). Trong những trường hợp như thế, cách tốt nhất để vượt qua khó khăn chính là *giả định* điểm rơi sẽ đạt được tại một bộ nào đó rồi bằng những suy luận thích hợp, ta tìm cách đánh giá và chọn lựa bộ số cho thích hợp (có thể bạn sẽ phải giải nhiều phương trình, hệ phương trình thì mới chọn được bộ thích hợp). Để rõ hơn về ý tưởng này, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 11. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^2 + y^2 + 2z^2.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Để tìm $\min P$, ta mong muốn có một bất đẳng thức dạng

$$x^2 + y^2 + 2z^2 \geq k(xy + yz + zx),$$

để từ đó sử dụng giả thiết $xy + yz + zx = 1$ và suy ra kết quả nếu dấu bằng có thể xảy ra. Bất đẳng thức này có dạng giống với kết quả cơ bản

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Một bất đẳng thức đã quá quen thuộc và chắc hẳn rằng mỗi chúng ta ai cũng biết được cách chứng minh, đó là thực hiện việc ghép cặp rồi sử dụng bất đẳng thức AM-GM

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} \geq xy + yz + zx.$$

Từ đây gợi cho ta một điều: *Tại sao lại không thử ghép cặp như thế cho bài toán này rồi sử dụng AM-GM?* Có thể thấy được cơ sở của việc ghép cặp cho bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ là dựa trên hai yếu tố:

- Vế trái có dạng tổng của các bình phương, còn vế phải có dạng tổng của các tích. Chính từ điều đó gợi cho ta nghĩ đến việc sử dụng đánh giá quen thuộc $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ (bất đẳng thức AM-GM cho hai số).
- Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Như vậy, muốn áp dụng kĩ thuật tương tự vào bài toán này, ta cần biết được dấu đẳng thức sẽ xảy ra khi nào. Tuy nhiên, việc quan sát bài toán chỉ cho ta một dữ kiện duy nhất, đó là ta có thể *dự đoán được khi P đạt min thì dấu bằng sẽ xảy ra khi $x = y$* (do vai trò đối xứng của chúng), có nghĩa là ta vẫn chưa biết được giá trị cụ thể của x, y, z là bao nhiêu.

Lúc này ta làm như sau: *Giả sử rằng khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì*

$$x = y = a > 0, \quad z = b > 0, \quad (a^2 + 2ab = xy + yz + zx = 1).$$

(Ta chỉ cần xét miền số dương, vì khi thay (x,y,z) bởi $(-x,-y,-z)$ thì bài toán vẫn không đổi). Khi đó, $bx = by = az$ và để đảm bảo được dấu đẳng thức của bài toán thì cách sử dụng AM-GM sau là tự nhiên nhất

$$xy \le \frac{x^2+y^2}{2}, \tag{1}$$

$$abyz \le \frac{b^2y^2+a^2z^2}{2}, \tag{2}$$

$$abzx \le \frac{a^2z^2+b^2x^2}{2}. \tag{3}$$

Cái mà ta mong đợi là đánh giá làm sao để có thể tận dụng được giả thiết

$$xy+yz+zx=1.$$

Do đó, nếu cộng trực tiếp các bất đẳng thức (1), (2), (3) theo vế thì ta vẫn chưa thu được điều gì vì hệ số của xy, yz, zx chưa bằng nhau, ta vẫn chưa thể sử dụng được giả thiết. Như vậy, ta cần thêm một bước chuyển nhỏ để giúp đưa hệ số của xy, yz, zx về bằng nhau, đó là nhân cả hai vế của (1) cho ab, khi đó

$$abxy \le \frac{ab(x^2+y^2)}{2}. \tag{4}$$

Cộng ba bất đẳng thức (2), (3), (4) lại theo vế, ta suy ra

$$\begin{aligned} ab = ab(xy+yz+yz) &\le \frac{ab(x^2+y^2)+(b^2y^2+a^2z^2)+(a^2z^2+b^2x^2)}{2} \\ &= \frac{(ab+b^2)(x^2+y^2)+2a^2z^2}{2}, \end{aligned}$$

tức
$$2ab \le (ab+b^2)(x^2+y^2)+2a^2z^2. \tag{5}$$

Đến đây thì ý tưởng đã rõ, nếu ta chọn các số a,b sao cho hệ số của z^2 gấp 2 lần hệ số của x^2, y^2, tức $2a^2 = 2(ab+b^2)$, thì vế phải của (5) sẽ có dạng của biểu thức P, cụ thể là

$$\begin{aligned} 2ab &\le (ab+b^2)(x^2+y^2)+2(ab+b^2)z^2 \\ &= (ab+b^2)(x^2+y^2+2z^2) = (ab+b^2)P. \end{aligned}$$

Và ta sẽ thu được cái mình cần, đó là một đánh giá cho P với dấu đẳng thức có thể xảy ra, tức ta sẽ tìm được $\min P$. Như vậy, các số a,b thích hợp mà ta đã *giả định* ở trên chính là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+2ab=1 \\ a^2=ab+b^2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này (có thể sử dụng phương pháp thế, từ phương trình đầu suy ra $b = \frac{1-a^2}{2a}$, thay vào phương trình thứ hai sẽ tìm được nghiệm), ta tìm được $a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}, b = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}}$. Từ đó ta suy ra

$$P \geq \frac{2ab}{b^2+ab} = \frac{2ab}{a^2} = \frac{2b}{a} = \sqrt{5}-1,$$

với đẳng thức xảy ra khi $x = y = a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ và $z = b = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}}$. □

Nhận xét. Mặc dù phải trải qua một quá trình dài kết hợp với nhiều suy luận như trên, ta mới đến được lời giải cho bài toán, nhưng khi trình bày lời giải thì ta không cần phải viết lại quy trình tìm ra và như thế nó sẽ trở nên khá ngắn gọn (chứ không phải dài dòng như ở trên). Ví dụ, ở bài này ta có thể viết lại lời giải như sau: Đặt $a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} > 0$ và $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}} > 0$.

Khi đó dễ thấy $a^2 + 2ab = 1$ và $a^2 = ab + b^2$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$ab(x^2+y^2) \geq 2abxy, \quad b^2y^2 + a^2z^2 \geq 2abyz, \quad b^2x^2 + a^2z^2 \geq 2abxz.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} 2ab = 2ab(xy+yz+zx) &\leq ab(x^2+y^2) + (b^2y^2+a^2z^2) + (b^2x^2+a^2z^2) \\ &= (ab+b^2)(x^2+y^2) + 2a^2z^2 = a^2(x^2+y^2) + 2a^2z^2 = a^2P, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$P \geq \frac{2ab}{a^2} = \frac{2b}{a} = \sqrt{5}-1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = a$ và $z = b$.

Ví dụ 12. *Cho x, y, z, t là các số thực thỏa mãn $xy + yz + zt + tx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = 5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + t^2.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Ở bài này, nếu quan sát kĩ một chút, bạn đọc sẽ nhận thấy

$$xy + yz + zt + tx = (x+z)(y+t),$$

và qua đó nhận ra được vai trò của x và z trong bài toán là đối xứng (vì vai trò của chúng trong P cũng đối xứng). Như vậy, ta có thể dự đoán được khi P đạt min thì $x = z$. Nhưng cũng như bài trên, đây là dữ kiện duy nhất về điểm rơi mà ta có thể thu thập được từ việc quan sát bài toán. Do đó, ta cần sử dụng kĩ thuật *giả định* về điểm rơi rồi bằng những phân tích hợp lí đưa đến cách đánh giá và chọn lựa bộ số cho thích hợp

Giả sử khi P đạt min thì $x = z = a > 0, y = b > 0$ và $t = c > 0$. Khi đó

$$bx = bz = ay, \quad cx = cz = at,$$

và ta nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$abxy \le \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{2}, \tag{1}$$

$$abyz \le \frac{a^2y^2 + b^2z^2}{2}, \tag{2}$$

$$aczt \le \frac{c^2z^2 + a^2t^2}{2}, \tag{3}$$

$$actx \le \frac{a^2t^2 + c^2x^2}{2}. \tag{4}$$

Từ (1), (2), (3) và (4), ta suy ra

$$abcxy \le \frac{c(b^2x^2 + a^2y^2)}{2}, \tag{5}$$

$$abcyz \le \frac{c(a^2y^2 + b^2z^2)}{2}, \tag{6}$$

$$abczt \le \frac{b(c^2z^2 + a^2t^2)}{2}, \tag{7}$$

$$abctx \le \frac{b(a^2t^2 + c^2x^2)}{2}. \tag{8}$$

Cộng các bất đẳng thức (5), (6), (7), (8) lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} abc &= abc(xy + yz + zt + tx) \\ &\le \frac{c(b^2x^2 + a^2y^2) + c(a^2y^2 + b^2z^2) + b(c^2z^2 + a^2t^2) + b(a^2t^2 + c^2x^2)}{2} \\ &= \frac{(b^2c + bc^2)(x^2 + z^2) + 2a^2cy^2 + 2a^2bt^2}{2}, \end{aligned}$$

tức

$$(b^2c + bc^2)(x^2 + z^2) + 2a^2cy^2 + 2a^2bt^2 \ge 2abc. \tag{9}$$