http://laisac.page.tl

Chuyên Đề

THỂ TÍCH

Lưu Tuấn Hiệp

GVTHPT Lai Vung 2

Phần I. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – KHỐI LĂNG TRỤ

Trong trường phổ thông , Hình học Không gian là một bài toán rất khó đối với học sinh, do đó học sinh phải đọc thật kỹ đề bài và từ đó xác định giả thuyết bài toán, vẽ hình rồi tiến hành giải bài toán.

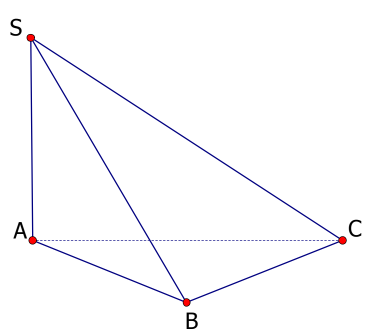
Cả hai chương trình chuẩn và nâng cao đều đề cập đến thể tích của khối đa diện (thể tích khối chóp, khối lăng trụ).

Thông thường bài toán về hình chóp được phân thành 2 dạng như sau:

Cho hình chóp

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy

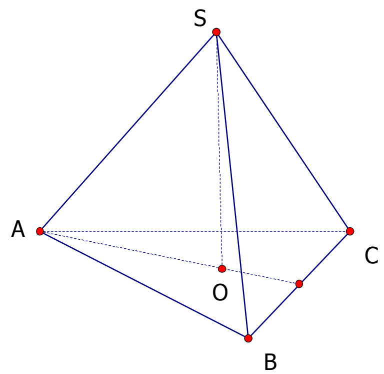
- Tam giác đều
- Hình vuông, chữ nhật



Đa giác đáy :

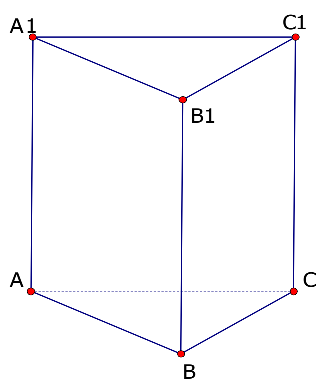
- Tam giác vuông
- Tam giác cân

Hình chóp đều



- Hình chóp tam giác đều
- Hình chóp tứ giác đều

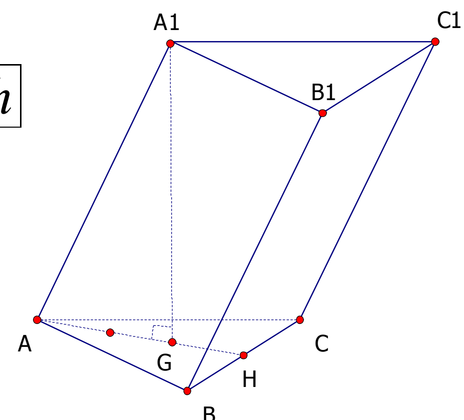
Thông thường bài toán về hình lăng trụ:



$$\boxed{V = B.h}$$

B: diện tích đáy

h : đường cao



Lăng trụ đứng ABC.$A_1B_1C_1$ — Lăng trụ xiên ABC.$A_1B_1C_1$

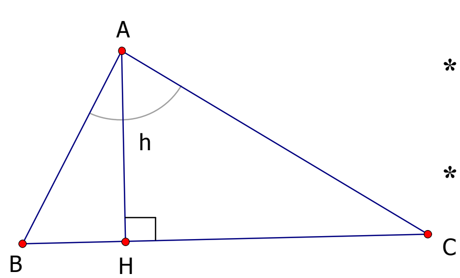
$A_1A \perp (ABC)$ — $A_1G \perp (ABC)$

HỆ THỐNG KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Các Tính Chất :

a. *Tam giác :*

– Diện tích của tam giác

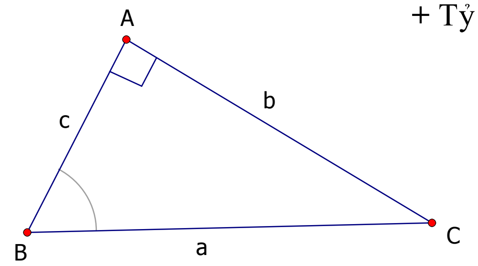


* $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A}$

* $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.BC.AH$

– Các tam giác đặc biệt :

○ ***Tam giác vuông :***



+ Định lý pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

+ Tỷ số lượng giác trong tam giác vuông

$$\sin\widehat{B} = \frac{\text{Đối}}{\text{Huyền}} = \frac{b}{a}$$

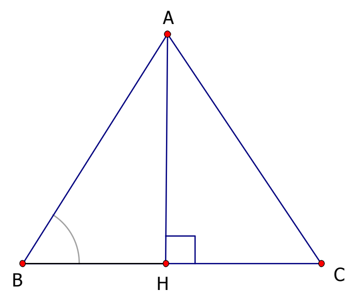
$$\cos\widehat{B} = \frac{\text{Kề}}{\text{Huyền}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan\widehat{B} = \frac{\text{Đối}}{\text{Kề}} = \frac{b}{c}$$

+ Diện tích tam giác vuông:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC$$

- ***Tam giác cân*:**



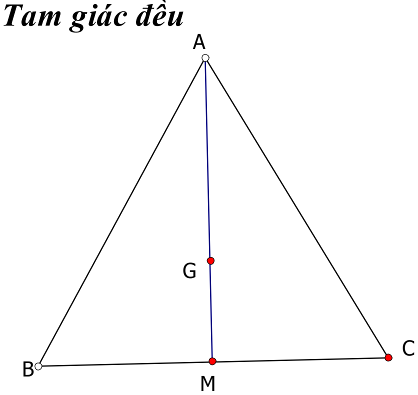
+ Đường cao AH cũng là đường trung tuyến

+ Tính đường cao và diện tích

$$AH = BH.\tan\widehat{B}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BC.AH$$

- ***Tam giác đều***



+ Đường cao của tam giác đều

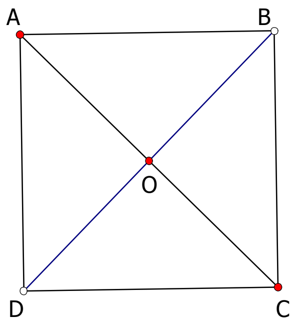
$$h = AM = AB.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(*đường cao h = cạnh* x $\frac{\sqrt{3}}{2}$*)*

+ Diện tích : $S_{\Delta ABC} = (AB)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$

b. *Tứ giác*

– Hình vuông



+ Diện tích hình vuông :

$$S_{ABCD} = (AB)^2$$

(Diện tích bằng cạnh bình phương)

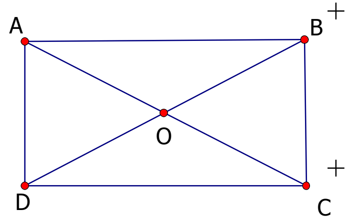
+ Đường chéo hình vuông

$$AC = BD = AB.\sqrt{2}$$

(đường chéo hình vuông bằng cạnh x $\sqrt{2}$ *)*

+ OA = OB = OC = OD

– Hình chữ nhật



+ Diện tích hình vuông :

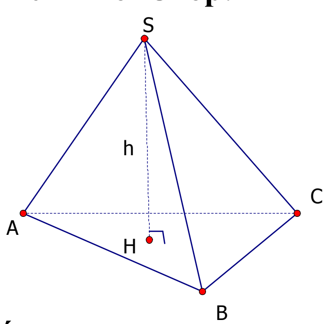
$$S_{ABCD} = AB.AD$$

(Diện tích bằng dài nhân rộng)

+ Đường chéo hình chữa nhật bằng nhau và

OA = OB = OC = OD

B. Thể Tích Khối Chóp:



+ Thể tích khối chóp

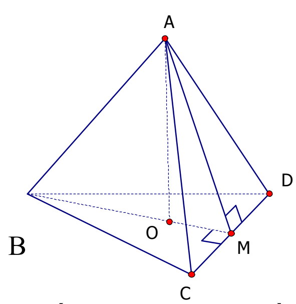
$$\boxed{V = \frac{1}{3}.B.h}$$

Trong đó : B là diện tích đa giác đáy

h : là đường cao của hình chóp

Các khối chóp đặc biệt :

– *Khối tứ diện đều:*



+ Tất cả các cạnh đều bằng nhau

+ Tất cả các mặt đều là các tam giác đều

+ O là trọng tâm của tam giác đáy

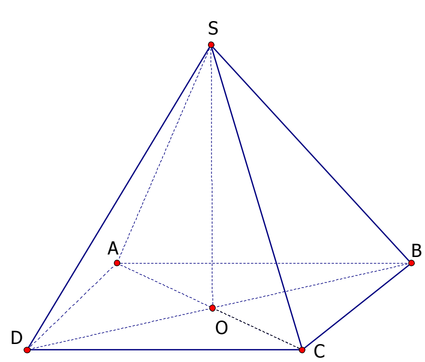
Và AO ⊥ (BCD)

– *Khối chóp tứ giác đều*

+ Tất cả các cạnh bên bằng nhau

+ Đa giác đáy là hình vuông tâm O

+ SO ⊥ (ABCD)

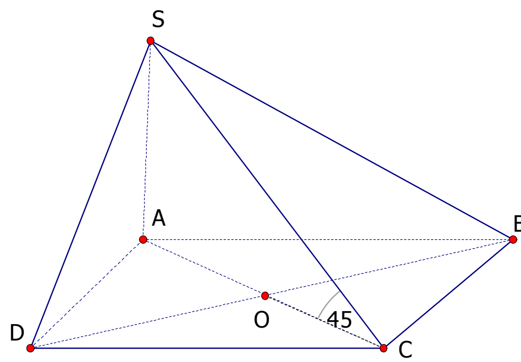


C. Góc:

Cách xác định góc

- ***Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P):***
  - *Tìm hình chiếu d' của d lên mặt phẳng (P)*
  - *Khi đó góc giữa d và (P) là góc giữa d và d'*

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông, SA vuông góc với (ABCD) và góc giữa SC với (ABCD) bằng 45^0. Hãy xác định góc đó.



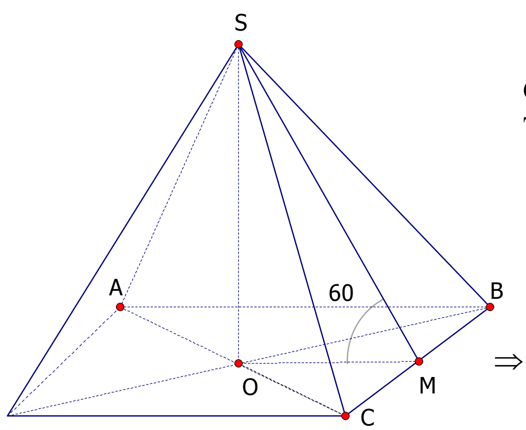
Giải

Ta có : $AC = hc_{(ABCD)}SC$

$\Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA} = 45^o$

- ***Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) :***
  - *Xác định giao tuyến d của (P) và (Q)*
  - *Tìm trong (P) đường thẳng a ⊥ (d) , trong mặt phẳng (Q) đường thẳng b ⊥ (d)*
  - *Khi đó góc giữa (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b*

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có ABCD là hình vuông, và góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60^0. Hãy xác định góc đó.



Giải

Gọi M là trung điểm BC

Ta có :

(SBC) ∩ (ABCD) = BC

(ABCD) ⊃ AM ⊥ BC

(SBC) ⊃ SM ⊥ BC

(vì $AM = hc_{(ABCD)}$ SM)

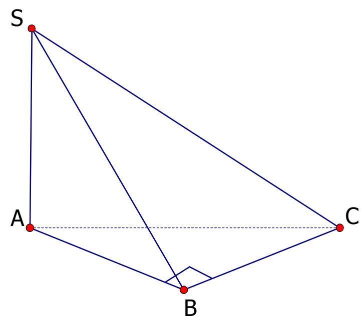
$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA} = 60^o$

Bài Toán **1.1:**

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B, AB = a$\sqrt{2}$, AC = a$\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB = $a\sqrt{3}$.Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao SA ⊥ (ABC) và vẽ thẳng đứng
  - Sử dụng định lý pitago trong tam giác vuông
- *Lời giải*:



Ta có : AB = a$\sqrt{2}$,

AC = a$\sqrt{3}$

SB = $a\sqrt{3}$.

* Δ ABC vuông tại B nên $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a = \frac{a^2.\sqrt{2}}{2}$$

* Δ SAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

* Thể tích khối chóp S.ABC

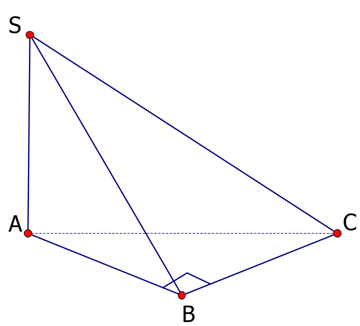
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2.\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^3.\sqrt{2}}{6}$$

Bài Toán **1.2:**

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại B, AC = a$\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB = $a\sqrt{3}$.Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao SA ⊥ (ABC) và vẽ thẳng đứng
  - Tam giác ABC vuông , cân tại B nên BA = BC và sử dụng định lý pitago trong tam giác vuông
- *Lời giải*:



Ta có : AC = a$\sqrt{2}$,

SB = $a\sqrt{3}$.

* Δ ABC vuông, cân tại B nên

$$BA = BC = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}.a.a = \frac{a^2}{2}$$

* Δ SAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

* Thể tích khối chóp S.ABC

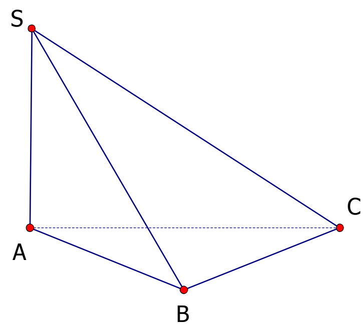
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a = \frac{a^3}{6}$$

Bài Toán **1.3:**

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC đều cạnh 2a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB = $a\sqrt{5}$ .Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao SA ⊥ (ABC) và vẽ thẳng đứng
  - Tam giác ABC đều có ba góc bằng 60^0 và sử dụng định lý pitago trong tam giác vuông SAB
- *Lời giải*:



* Δ ABC đều cạnh 2a nên

AB = AC = BC = 2a

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC.\sin 60^0 = \frac{1}{2}.2a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2.\sqrt{3}$$

* Δ SAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

* Thể tích khối chóp S.ABC

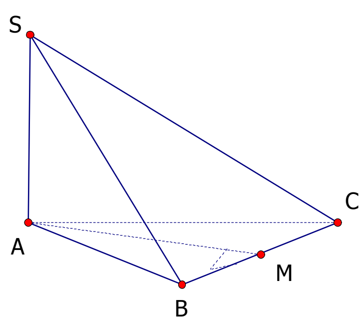
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.a^2.\sqrt{3}.a = \frac{a^3.\sqrt{3}}{3}$$

Bài Toán **1.4:**

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC cân tại A, BC = 2a$\sqrt{3}$, $\widehat{BAC} = 120^0$,cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA =2a.Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao SA ⊥ (ABC) và vẽ thẳng đứng
  - Tam giác ABC cân tại A và Â = 120^0
- *Lời giải*:



* Δ ABC cân tại A, $\widehat{BAC} = 120^0$, BC = 2a$\sqrt{3}$

AB = AC = BC = 2a

Xét Δ AMB vuông tại M có BM = a$\sqrt{3}$, Â = 60^0

$$\Rightarrow AM = \frac{BM}{\tan 60^0} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{1}{2}.a.2a\sqrt{3} = a^2.\sqrt{3}$$

* SA = a

* Thể tích khối chóp S.ABC

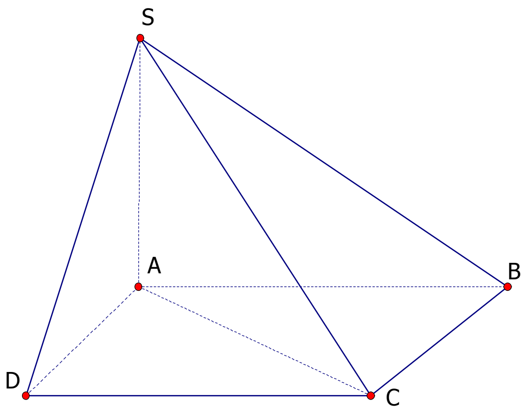
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.a^2.\sqrt{3}.a = \frac{a^3.\sqrt{3}}{3}$$

Bài Toán **1.5:**

> **Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a$\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SC = $a\sqrt{5}$.Tính thể tích khối chóp S.ABCD**

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Vẽ đáy là hình vuông (vẽ như hình bình hành), cao SA $\perp$ (ABCD) và vẽ thẳng đứng
  - ABCD là hình vuông ; sử dụng định lý pitago trong tam giác vuông
- *Lời giải*:



Ta có : ABCD là hình vuông cạnh a$\sqrt{2}$

SC = $a\sqrt{5}$.

* Diện tích ABCD

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$$

* Ta có : AC = AB.$\sqrt{2}$ = $a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a$

Δ SAC vuông tại A

$$\Rightarrow SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a$$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

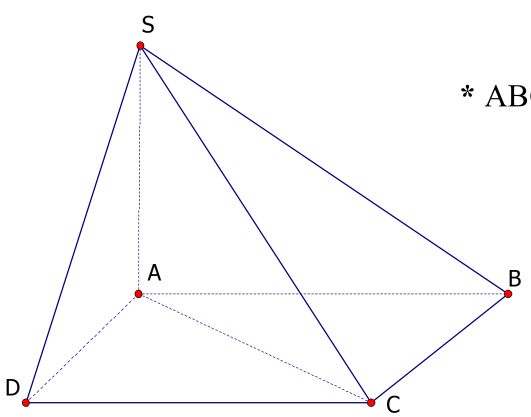
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.2a^2.a = \frac{2a^3}{3}$$

Bài Toán **1.6:**

> **Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = AC = a$\sqrt{2}$.Tính thể tích khối chóp S.ABCD**

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Vẽ đáy là hình vuông (vẽ như hình bình hành), cao SA $\perp$ (ABCD) và vẽ thẳng đứng
  - Biết AC và suy ra cạnh của hình vuông (*Đường chéo hình vuông bằng cạnh nhân với* $\sqrt{2}$)
- *Lời giải*:



Ta có : SA = AC = a$\sqrt{2}$

* ABCD là hình vuông

$$AC = AB.\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$$

Diện tích ABCD : $S_{ABCD} = a^2$

* SA = a$\sqrt{2}$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

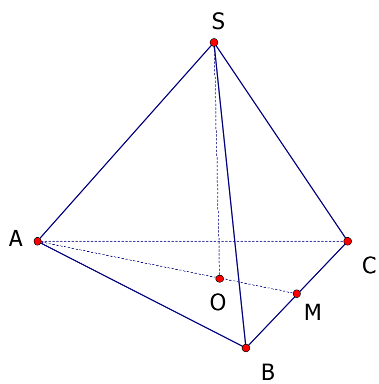
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.a^2.a.\sqrt{2} = \frac{a^3.\sqrt{2}}{3}$$

Bài Toán **1.7:**

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a$\sqrt{3}$, cạnh bên bằng 2a.Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều tâm O
    - + Gọi M là trung điểm BC
    - + *O là trọng tâm của tam ABC*
    - + AM là đường cao trong Δ ABC
  - Đường cao của hình chóp là SO (SO $\perp$ (ABC))
- *Lời giải*:



* S.ABC là hình chóp tam giác đều

Gọi M là trung điểm BC

Δ ABC đều cạnh $a\sqrt{3}$, tâm O

SO $\perp$ (ABC)

SA=SB=SC = 2a

* Δ ABC đều cạnh $a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \text{AM} = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow \text{AO}=\frac{2}{3}.AM = \frac{2}{3}.\frac{3a}{2} = a$$

$$\Rightarrow \text{S}_{\Delta\text{ABC}} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^0 = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2.\sqrt{3}}{4}$$

* Δ SAO vuông tại A có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a.\sqrt{3}$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3.\sqrt{3}}{4}$$

- *Nhận xét*: học sinh thường làm sai bài toán trên
  - Học sinh vẽ “sai” hình chóp tam giác đều vì

    + không xác định được vị trí điểm O

    + không hiểu tính chất của hình chóp đều là SO $\perp$ (ABC)

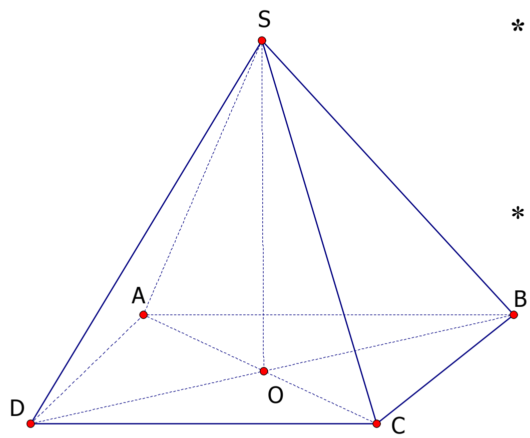
    + không tính được AM và không tính được AO
  - Tính toán sai kết quả thể tích

Bài Toán **1.8:**

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ .Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Hình chóp tứ giác đều có
    - \+ đa giác đáy là hình vuông ABCD tâm O
    - \+ $SO \perp (ABCD)$
    - \+ tất cả các cạnh bên bằng nhau
  - Đường cao của hình chóp là SO (SO $\perp$ (ABCD))
- *Lời giải*:



* S.ABCD là hình chóp tứ giác đều

ABCD là hình vuông cạnh 2a , tâm O

SO $\perp$ (ABCD)

SA=SB=SC =SD = $a\sqrt{3}$

* Diện tích hình vuông ABCD

$\Rightarrow$ AC = 2a.$\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \text{AO}=\frac{\text{AC}}{2}=\frac{2a\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ABCD}}=(2a)^2=4a^2$$

* Δ SAO vuông tại O có $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=a$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

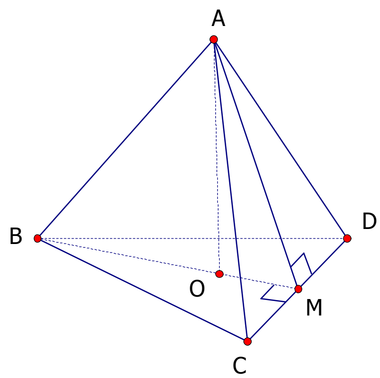
$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}.4a^2.a=\frac{4a^3}{3}$$

- *Nhận xét*: học sinh thường làm sai bài toán trên
  - Học sinh vẽ “sai” hình chóp tứ giác đều
    - \+ không xác định được tính chất đa giác đáy là hình vuông
    - \+ không SO $\perp$ (ABCD) mà lại vẽ SA Δ (ABCD)
    - \+ không tính được AC và không tính được AO
  - Tính toán sai kết quả thể tích

Bài Toán 1.9: **Tính thể tích của khối tứ diện đều cạnh a**

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Tứ diện đều ABCD có các tính chất
    - + tất cả các cạnh đều bằng nhau
    - + tất cả các mặt là các tam giác đều
    - + gọi O là trọng tâm của tam giác đáy
  - Đường cao của hình chóp là AO (AO $\perp$ (BCD))
- *Lời giải*:



* ABCD là tứ diện đều cạnh a

Gọi M là trung điểm CD

Ta có : AB=AC=AD = AC=CD=BD = a

Δ BCD đều cạnh a**,** tâm O

$\Rightarrow$ AO $\perp$ (BCD)

* Δ BCD đều cạnh a

$$\Rightarrow \text{BM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{BO}=\frac{2}{3}.BM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$$

* Δ AOB vuông tại O có

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{(a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

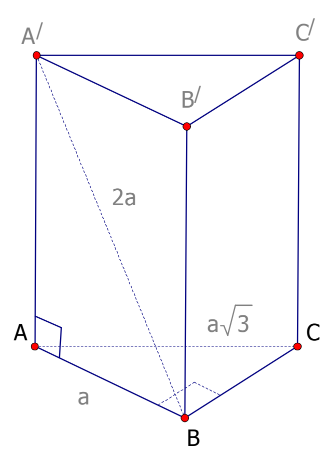
* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.S_{BCD}.AO = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3.\sqrt{2}}{12}$$

Bài Toán 1.10:

Cho lăng trụ đứng ABC.A/B/C/ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB=a, AC=a$\sqrt{3}$, cạnh A/B = 2a. Tính thể tích khối lăng trụ

Giải



* Tam giác ABC vuông tại B

$$\Rightarrow \text{BC} = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

* Tam giác A/AB vuông tại A

$$\Rightarrow A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$$

$$* \; V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'A = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

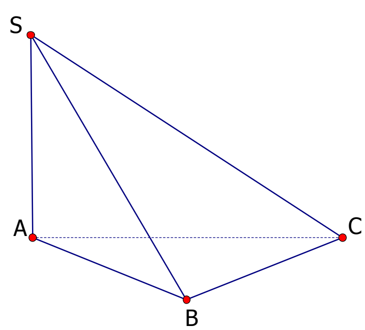
Dạng 2. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP- KHỐI LĂNG TRỤ LIÊN QUAN ĐẾN GÓC

Trong chương trình Toán phổ thông , Hình học Không gian được phân phối học ở cuối năm lớp 11 và đầu năm lớp 12, kiến thức về góc (*góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ; góc giữa hai mặt phẳng*) được học vào cuối năm lớp 11 và đến đầu năm lớp 12 sẽ được vận dùng vào bài toán tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ. Đó là một vấn đề rất khó đối với học sinh lớp 12 khi vận dụng vì đa số học sinh quên và không biết cách vận dụng, từ đó đa số học sinh đều bỏ hoặc làm sai bài toán tính thể tích của khối chóp , khối lăng trụ trong các kỳ thi học kỳ, thi Tốt nghiệp THPT

Ở đây, tôi hệ thống lại một số sai lầm mà học sinh thường gặp khi giải bài toán tính thể tích liên quan đến giả thuyết về góc

Góc

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

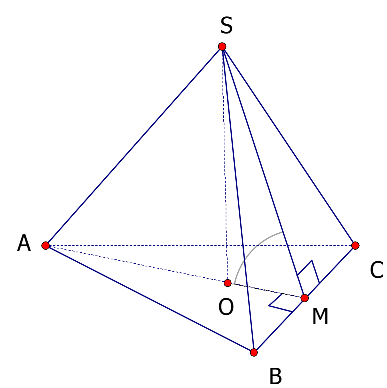


Xác định Góc giữa SB và (ABC)

Ta có : $AB = hc_{(ABC)} SB$

$\Rightarrow \widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{(SB,AB)} = \widehat{SBA}$

Góc giữa hai mặt phẳng



Xác định góc giữa (SBC) và (ABC)

Ta có : (SBC) $\cap$ (ABC) = BC

SM $\perp$ BC

AM $\perp$ BC

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA}$

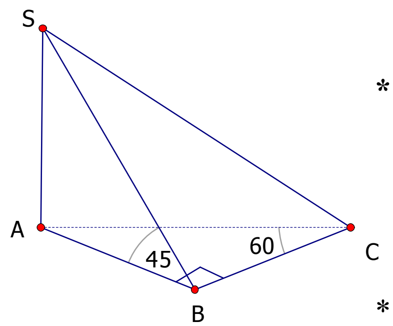
<u>Chú ý</u> : Xác định hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm

Bài Toán 2.1:

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B, AB = a, $\widehat{ACB}=60^0$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45^0 .Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao SA ⊥ (ABC) và vẽ thẳng đứng
  - Xác định góc giữa SB và (ABC) là góc giữa SB với hình chiếu của nó lên (ABC)
- *Lời giải*:



* Ta có : AB = a ,

$AB = \underset{(ABC)}{hc}\,\mathrm{SB}$

$\Rightarrow\ \widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{(SB,AB)} = \widehat{SBA} = 45^o$

* Δ ABC vuông tại B có AB = a, $\widehat{ACB}=60^0$

$\Rightarrow\ BC = \dfrac{AB}{\tan 60^0} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow\ S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2.\sqrt{3}}{6}$

* Δ SAB vuông tại A có AB= a, $\widehat{B}=45^0$

$\Rightarrow\ SA = AB.\tan 45^o = a$

* Thể tích khối chóp S.ABC

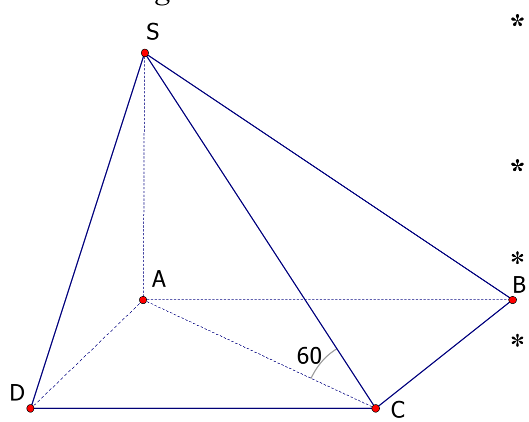
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{6}.a = \frac{a^3.\sqrt{3}}{18}$$

Bài Toán 2.2:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SC tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0 .Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao SA ⊥ (ABC) và vẽ thẳng đứng
  - Xác định góc giữa SC và (ABCD) là góc giữa SC với hình chiếu AC của SC lên (ABCD)
- *Lời giải*:



* Ta có : ABCD là hình vuông cạnh a ,

$AC = \underset{(ABCD)}{hc}\,\mathrm{SC}$

$\Rightarrow\ \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA} = 60^o$

* Diện tích hình vuông

$\Rightarrow\ S_{ABCD} = a^2$

* Δ SAC vuông tại A có AC= $a\sqrt{2}$, $\widehat{C}=60^0$

$\Rightarrow\ SA = AC.\tan 60^o = a\sqrt{6}$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.a^2.a\sqrt{6} = \frac{a^3.\sqrt{6}}{3}$$

Bài Toán 2.3:

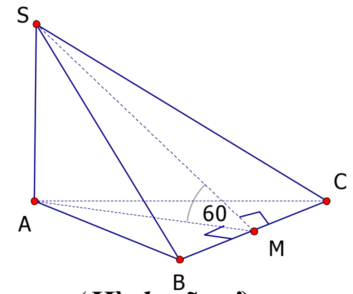
Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B, AB = $a\sqrt{3}$, BC = a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ; mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc bằng 60^0 .Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- ***Sai lầm của học sinh**:*
  - Gọi M là trung điểm BC
  - Ta có AM $\perp$ BC

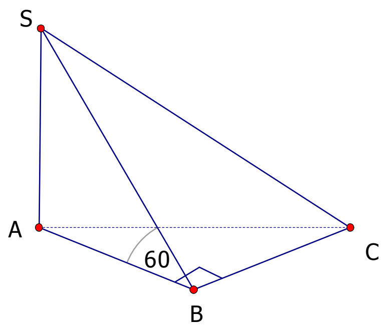
    SM $\perp$ BC

$$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA} = 60^o$$



(*Hình vẽ sai*)

- ***Lời giải đúng*:**



* Ta có : AB = $a\sqrt{3}$,

(SBC) $\cap$ (ABC) = BC

AB $\perp$ BC (vì Δ ABC vuông tại B)

SB $\perp$ BC (vì $AB = hc_{(ABC)}$ SB

$$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} = 60^o$$

* Δ ABC vuông tại B có AB = $a\sqrt{3}$,BC =a

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a = \frac{a^2.\sqrt{3}}{2}$$

* Δ SAB vuông tại A có AB= a, $\hat{B} = 60^0$

$$\Rightarrow SA = AB.\tan 60^o = 3a$$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{2}.3a = \frac{a^3.\sqrt{3}}{2}$$

- ***Nhận xét*:**

  – Học sinh không lý luận để chỉ ra góc nào bằng 60^o , do đó mất 0.25 điểm

  – Học sinh xác định góc giữa hai mặt phẳng bị sai vì đa số học sinh không nắm rõ cách xác định góc và cứ hiểu là góc SMA với M là trung điểm BC

  - Nếu đáy là tam giác vuông tại B (hoặc C), hình vuông và SA vuông góc với đáy thì góc giữa mặt bên và mặt đáy sẽ là góc được xác định tại một trong hai vị trí đầu mút của cạnh giao tuyến
  - Nếu đáy là một tam giác cân (đều) và SA vuông góc với đáy hoặc là hình chóp đều thì góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc ở tại vị trí trung điểm của cạnh giao tuyến.

Bài Toán 2.**4:**

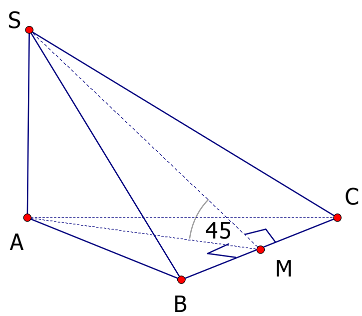
Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh BC = $a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ; mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc bằng 45^0 .Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- ***Sai lầm của học sinh****:*

$$\Rightarrow \ \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SBA} = 45^o$$

- ***Lời giải đúng*****:**



* Ta có : AB = $a\sqrt{3}$,

(SBC) $\cap$ (ABC) = BC

Gọi M là trung điểm BC

AM $\perp$ BC (vì Δ ABC cân tại A)

SM $\perp$ BC (vì $AM = hc_{(ABC)}$ SM

$$\Rightarrow \ \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA} = 45^o$$

* Δ ABC vuông cân tại A có ,BC = $a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ AB = BC = a và AM = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.a.a = \dfrac{a^2}{2}$

* Δ SAM vuông tại A có AM= $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $\widehat{M} = 45^0$

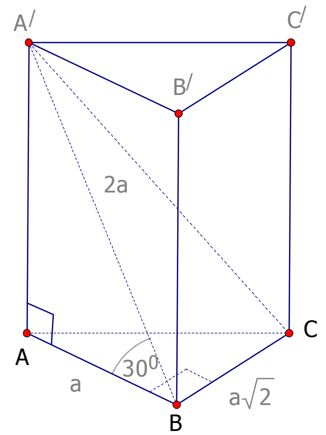
$\Rightarrow$ $SA = AB.\tan 45^o = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3.\sqrt{2}}{12}$$

Bài Toán 2.5:

Cho lăng trụ đứng ABC.$A^/B^/C^/$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB=a, BC = $a\sqrt{2}$, mặt bên ($A^/$BC) hợp với mặt đáy (ABC) một góc 30^0 .Tính thể tích khối lăng trụ.



Giải

* Ta có $A^/A \perp (ABC)$

$(A'BC) \cap (ABC) = BC$

AB $\perp$ BC

Mà AB = $hc_{(ABC)}A'B$ nên $A^/B \perp BC$

$\Rightarrow \left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right) = \widehat{A'BA} = 30^0$

* Tam giác ABC vuông tại B

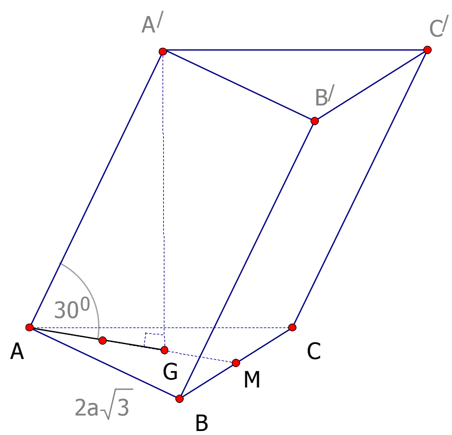
$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

* Tam giác $A^/$AB vuông tại A $\Rightarrow A'A = AB.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

* $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'A = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Bài Toán 2.6:

Cho lăng trụ ABC.$A^/B^/C^/$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 2a$\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của $A^/$ lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC, cạnh $A^/$A hợp với mặt đáy (ABC) một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ.



Giải

* Gọi M là trung điểm BC

G là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có $A^/G \perp (ABC)$

GA = $hc_{(ABC)}A'A$

$\Rightarrow \left(\widehat{A'A,(ABC)}\right) = \widehat{A'AG} = 30^0$

* Tam giác ABC đều cạnh 2a$\sqrt{3}$ $\Rightarrow S_{ABC} = \left(2a\sqrt{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = 3a^2\sqrt{3}$

* Tam giác $A^/$AG vuông tại G có $\hat{A} = 30^0, AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2a$

$\Rightarrow A'G = AG.\tan 30^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'A = 6a^3$

Dạng 3. TỶ SỐ THỂ TÍCH

- Việc tính thể tích của một khối chóp thường học sinh giải bị nhiều sai sót, Tuy nhiên trong các đề thi lại yêu cầu học sinh tính thể tích của một khối chóp "nhỏ" của khối chóp đã cho. Khi đó học sinh có thể thực hiện các cách sau:

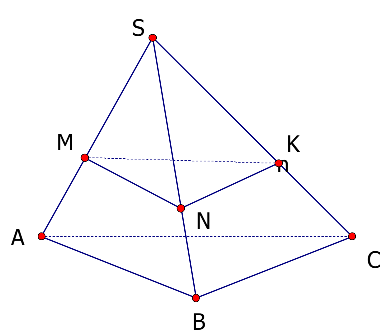
+ Cách 1:

- Xác định đa giác đáy
- Xác định đường cao (phải chứng minh đường cao vuông gới với mặt phẳng đáy)
- Tính thể tích khối chóp theo công thức

+ Cách 2

- Xác định đa giác đáy
- Tình các tỷ số độ dài của đường cao (nếu cùng đa giác đáy) hoặc diện tích đáy (nếu cùng đường cao) của khối chóp "nhỏ" và khối chóp đã cho và kết luận thể tích khối cần tìm bằng k lần thể tích khối đã cho

+ Cách 3: dùng tỷ số thể tích



Hai khối chóp S.MNK và S.ABC có chung đỉnh S và góc ở đỉnh S

Ta có : $\dfrac{V_{S.MNK}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SK}{SC}$

Cả hai chương trình chuẩn và nâng cao đều có đề cập đến tính thể tích của một khối chóp "nhỏ" liên quan đến dữ kiện của khối chóp lớn.Tuy nhiên

Chương Trình Chuẩn	Chương Trình Nâng Cao
- **Không** trình bày khái niệm tỷ số thể tích của 2 khối chóp	**Có** trình bày khái niệm tỷ số thể tích của 2 khối chóp

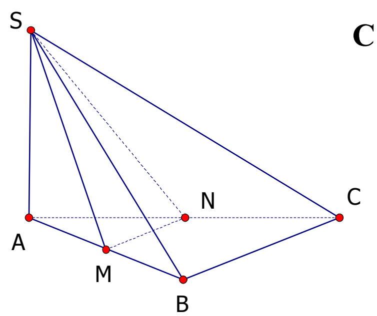
Bài Toán **3.1:**

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC đều cạnh 2a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = $a\sqrt{3}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tính thể tích khối chóp S.AMN

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  – Hướng dẫn học sinh tính thể thể tích một khối chóp "nhỏ" dựa trên dữ kiện liên quan đến khối chóp đã cho

- *Lời giải*:



Cách 1: *(dùng công thức thể tích* $V=\frac{1}{3}.S.h$*)*

* Khối chóp S.AMN có

-Đáy là tam giác AMN

- Đường cao là SA

* Δ AMN có $\hat{A}=60^0$, AM=AN = a

$$\Rightarrow S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0=\frac{1}{2}.a.a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$$

* SA = $a\sqrt{3}$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.AMN}=\frac{1}{3}.S_{AMN}.SA=\frac{1}{3}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}.a.\sqrt{3}=\frac{a^3}{4}$$

Cách 2 : (*Dùng công thức tỷ số thể tích)*

Khối chóp S.AMN và S.ABC có chung đỉnh A và góc ở đỉnh A

Do đó theo công thức tỷ số thể tích , ta có

$$\frac{V_{A.SMN}}{V_{A.SBC}}=\frac{AS}{AS}.\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}=1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN}=V_{A.SMN}=\frac{1}{4}.V_{A.SBC}=\frac{V_{S.ABC}}{4}$$

Ta có : $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{4a^2.\sqrt{3}}{4}.a.\sqrt{3}=a^3$

Vậy $V_{S.AMN}=\frac{V_{S.ABC}}{4}=\frac{a^3}{4}$

- *Nhận xét*:
  – Học sinh thường lúng túng khi gặp thể tích của khối chóp "nhỏ" hơn khối chóp đã cho và khi đó xác định đa giác đáy và đường cao thường bị sai.
  – Trong một số bài toán thì việc dùng "tỷ số thể tích " có nhiều thuận lợi hơn.

Bài Toán **3.2:**

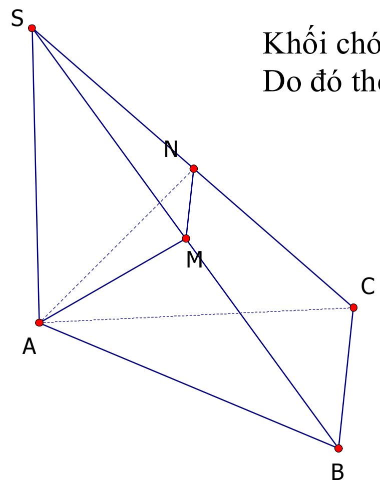
Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC đều cạnh 2a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = $a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC. Tính thể tích khối chóp S.AMN và A.BCNM

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Hướng dẫn học sinh tính thể thể tích một khối chóp "nhỏ" dựa trên dữ kiện liên quan đến khối chóp đã cho

- *Lời giải*:

(Dùng công thức tỷ số thể tích)



Khối chóp S.AMN và S.ABC có chung đỉnh S và góc ở đỉnh S
Do đó theo công thức tỷ số thể tích , ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{V_{S.ABC}}{4} = \frac{\frac{1}{3}.a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}$$

$$\Rightarrow V_{A.BCNM} = \frac{3}{4}.V_{S.ABC} = \frac{3a^3}{4}$$

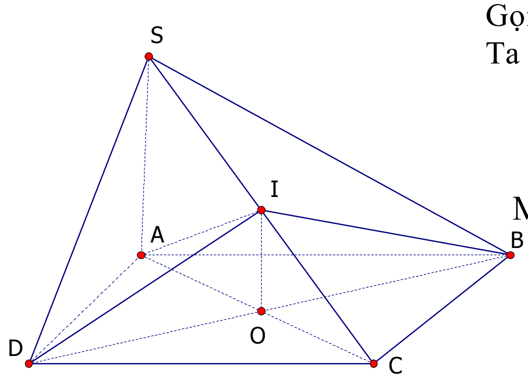
Bài Toán **3.3:**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = 2a . Gọi I là trung điểm SC. Tính thể tích khối chóp I.ABCD

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
  - Hướng dẫn học sinh tính thể thể tích một khối chóp "nhỏ" dựa trên dữ kiện liên quan đến khối chóp đã cho

- *Lời giải*:



Gọi O là giao điểm AC và BD
Ta có : IO // SA và SA ⊥ (ABCD)

$\Rightarrow$ IO ⊥ (ABCD)

$$\Rightarrow V_{I.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.IO$$

Mà : $S_{ABCD} = a^2$

$$IO = \frac{SA}{2} = a$$

Vậy $V_{I.ABCD} = \frac{1}{3}.a^2.a = \frac{a^3}{3}$

Dạng 4. DIỆN TÍCH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI CHÓP
THỂ TÍCH KHỐI CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI CHÓP

Trong chương trình toán phổ thông, yêu cầu xác định tâm , bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và tính diện tích của mặt cầu, thể tích của khối cầu đó.

- Xác định tâm I và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hinh chóp
- Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

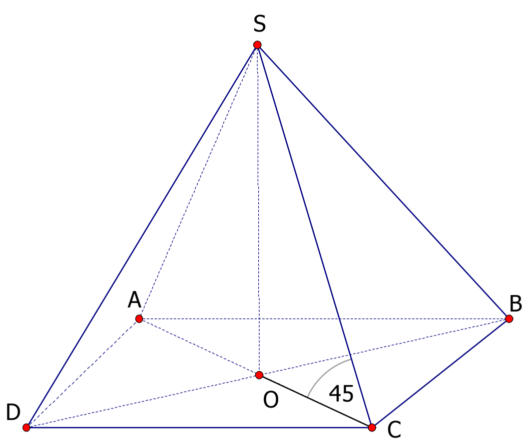
$$S_{(s)} = 4\pi R^2 \qquad V_{(s)} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

<u>Bài Toán **4.1:**</u>

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 45^o .Tính thể tích khối chóp S.ABCD và thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp

Giải

- *Lời giải*:



* S.ABCD là hình chóp tứ giác đều

ABCD là hình vuông cạnh 2a , tâm O

SO $\perp$ (ABCD)

$OC = hc_{(ABCD)}$ SC

$\Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,OC)} = \widehat{SCO} = 45^o$

* Diện tích hình vuông ABCD

$\Rightarrow$ AC = 2a.$\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ OC=AO=$\frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

* Δ SOC vuông tại O có OC = $a\sqrt{2}$, $\widehat{SCO} = 45^o$

$\Rightarrow$ SO = OC = $a\sqrt{2}$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.4a^2.a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$$

* Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp

Ta có OA=OB=OC=OD=OS= $a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp S.ABCD có tâm O và bán kính R = $a\sqrt{2}$

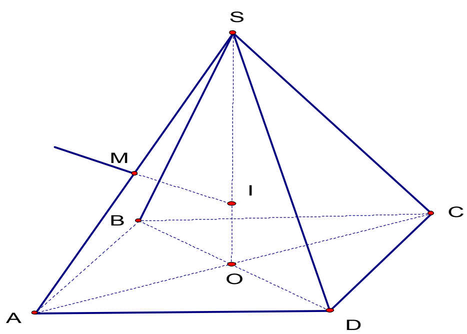
Vậy $V_{(s)} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi(a\sqrt{2})^3}{3} = \frac{8\pi a^3.\sqrt{2}}{3}$

Bài Toán 4.2:

Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên 2a.

1) **Tính thể tích của khối chóp.**
2) **Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp trên.**
3) **Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp trên.**

Giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có : SO ⊥ (ABCD)

$V = \frac{1}{3}.SO.dt(ABCD)$ 0,25

dt(ABCD) = a^2 0,25

$SO^2 = SC^2 - \frac{2a^2}{4} = 4a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{7a^2}{2}$ 0,25

$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

Vậy : $V = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$ 0,25

Dựng trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Dựng trung trực của SA 0,25

$\Rightarrow d \perp SA$ tại trung điểm M

Xét (SAO) có d cắt SO tại I, ta có :

SI = IA

IA = IB = IC = ID 0,25

$\Rightarrow$ IS = IA = IB = IC = ID

$\Rightarrow$ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD có tâm là I và bán kính r = SI.

$\Delta SIM \sim \Delta SAO \Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SO}$

$\Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{14}}{7}$. Vậy : $r = SI = \frac{2a\sqrt{14}}{7}$ 0,25

$S = 4\pi r^2 = \frac{224\pi.a^2}{49}$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{448\pi a^3\sqrt{14}}{1029}$ 0,25

Bài Tập Về Thể Tích Khối Đa Diện

Bài 1.1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

Bài 1.2 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là a; góc giữa cạnh bên và đáy là 60^0. Tính thể tích khối chóp theo a ?

Bài 1.3 Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có AB = a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0 . Tính thể tích khối chóp theo a.

Bài 1.4 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, các cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 1.5 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$. Cạnh bên SB bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 1.6 Cho hình chóp S.ABC có ABC vuông cân tại B, AC = 2a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa SB và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Bài 1.7 Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}, AC = 2a$, góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC

Bài 1.8 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, AB = 2a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), cạnh SB tạo với đáy một góc 30^0. Gọi M là trung điểm SB. Tính thể tích khối chóp M.ABC

Bài 1.9 Cho khối chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với BC = 2a , biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 60^o . Tính thể tích khối chóp SABC.

Bài 1.10 Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Tính tỷ số thể tích của hai khối chóp SMNK và SABC.

Bài 1.11 Cho hình chóp S.ABC có SB = $a\sqrt{2}$, AB=AC = a, $\widehat{BAC} = 60^0$, Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Bài 1.12 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AC = $a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy (ABC) một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC

Bài 1.13 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SA= b. Cắt khối chóp bằng mặt phẳng (SBD) ta được hai khối chóp đỉnh S.

a) Kể tên và so sánh thể tích của hai khối chóp đó.

b) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp S.ABCD.

c) Tính thể tích của hai khối chóp S.ABC và S.ABCD.

Bài 1.14 Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh bằng a .

a). Chứng minh rằng SABCD là khối chóp tứ giác đều .

b). Tính thể tích của khối chóp SABCD .

c). Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABCD .

Bài 1.15 Cho hình chóp S.ABC , có đáy ABC là tam giác đều cạnh 3a , tâm O.Các cạnh bên SA=SB=SC và cạnh bên SA tạo với mặt đáy một góc 45^o.

a).Tính thể tích của khối chóp SABC

b). Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Bài 1.16 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều tâm O, cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = 2a.

a). Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

b). Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Bài 1.17 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, SA=SB=SC=SD . Biết AB = 3a, BC = 4a và $\widehat{SAO} = 45^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 1.18 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$, hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và SA = $a\sqrt{2}$.

a). Tính thể tích của khối chóp S.ABC

b). Tính diện tích và thể tích của mặt cầu và khối cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC

Bài 1.19 Cho lăng trụ $ABC.A^/B^/C^/$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $A^/A=A^/B=A^/C$, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$, cạnh $A^/A$ tạo với mặt đáy góc 30^0 . Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài 1.20 Cho tứ diện đều ABCD cạnh a.Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Tính diện tích mặt cầu và Tính thể tích khối cầu tương ứng.

Bài 1.21 Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh a, cạnh bên hợp đáy góc 60^0. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích mặt cầu và Tính thể tích khối cầu tương ứng.

Bài 1.22 Cho lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có đáy ABC là tam giác cân với AB=AC=a và $\widehat{BAC} = 120^0$, cạnh AA’= a. Gọi I là trung điểm của CC’.

a) Chứng minh rằng Tam giác AB’I vuông tại A.

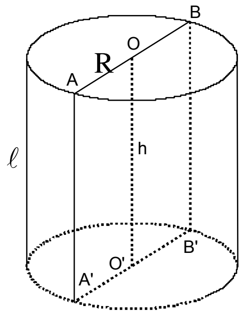
b) Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A’B’C’.

Bài 1.23 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông tại B; AB = a, BC = 2a.Cạnh SA$\perp$(ABC) và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SC.Tính thể tích khối chóp S.AMB, và khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AMB).

Phần II. MẶT TRÒN XOAY

HÌNH TRỤ

$\boxed{\ell = h}$



* Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = 2\pi Rl$$

* Diện tích toàn phần

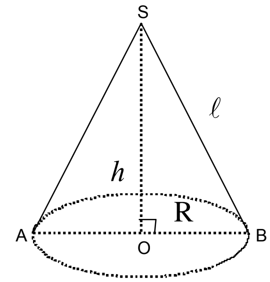
$$S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$$

* Thể Tích Khối trụ

$$V_{(T)} = \pi R^2 h$$

HÌNH NÓN

$\boxed{\ell^2 = h^2 + R^2}$



* Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = \pi Rl$$

* Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$$

* Thể Tích Khối trụ

$$V_{(N)} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

<u>Ví dụ 2.1:</u>

Cho hình trụ có bán kính R = a, mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $6a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ.

Giải

* Mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một hình chữ nhật

$$\Rightarrow \text{S} = \ell.2R = 6a^2 \qquad \Rightarrow \ \ell = \frac{6a^2}{2R} = 3a$$

* Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.a.3a = 6\pi a^2$

* Thể tích khối trụ : $V_{(T)} = \pi R^2 h = \pi.a^2.3a = 3\pi a^3$

<u>Ví dụ 2.2:</u>

Cho hình nón,mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra thiết diện là tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

Giải

* Mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra tam giác đều cạnh 2a

$$\Rightarrow \ \ell = 2R = 2a \qquad \Rightarrow \ h = \sqrt{\ell^2 - R^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

* Diện tích xung quanh : $S_{xq} = \pi Rl = \pi.a.2a = 2\pi a^2$

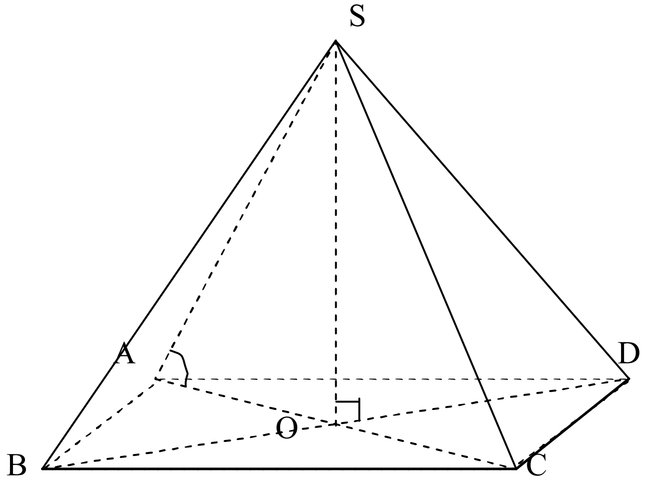
* Thể tích khối trụ : $V_{(T)} = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = \dfrac{\pi.a^2.a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

<u>Ví dụ 2.3:</u> Cho khối chóp đều S.ABCD có AB = a, gọi O là tâm của đáy, $\widehat{SAO}=60^0$.

1.Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

2.Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD

Giải

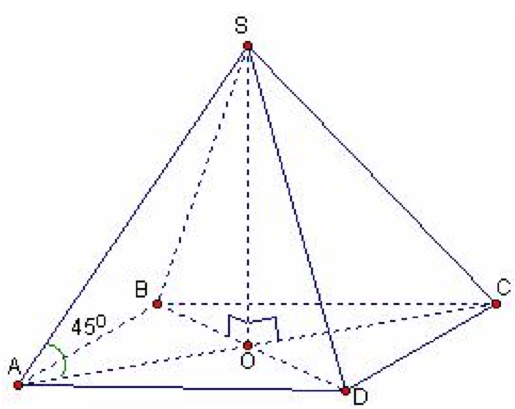
1). Vì S.ABCD đều nên $SO \perp (ABCD)$	0.25
Ta có : $S_{ABCD}=a^2$;	0.25
ΔSOA vuông tại O có : $SO = AO\tan\widehat{SAO}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan 60^0=\frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$	0.25
$\Rightarrow \mathrm{V}_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\mathrm{S}_{ABCD}.\mathrm{SO}=\frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ (đvtt)	0.25
	
2.Gọi l,r lần lượt là đường sinh,bán kính đáy của hình nón .	
Ta có : $r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;	0.25
$l = SA = \sqrt{SO^2+AO^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}=a\sqrt{2}$	0.25
$\Rightarrow \mathrm{S}_{xq}=\pi\mathrm{rl}=\pi\frac{a\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2}=\pi a^2$ (đvdt)	0.5

<u>Ví dụ 2.4:</u> Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc SAC bằng 45^o.

a) Tính thể tích khối chóp .

b) Tính diện tích xung quanh của mặt nón ngoại tiếp hình chóp S.ABCD

<u>Giải</u>



a) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow$ SO $\perp$ (ABCD).

$$V=\frac{1}{3}B.h,\ B=a^2;\ h=SO=OA.\tan 45^0=a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow\ V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\ \text{(đvtt)}$$

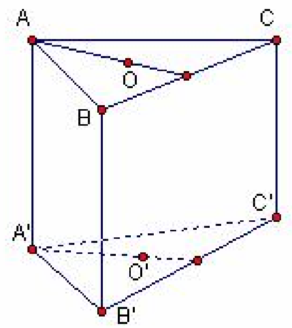
b) Ta có R =OA, l =SA= a.

Vậy $S_{xq}=\pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}a=\pi\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 2.5: **Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a.**

a) Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

b) **Tính diện tích của mặt trụ tròn xoay ngoại tiếp hình trụ**



a) Ta có $V = B.h$,

trong đó B là diện tích đáy của lăng trụ, h là chiều cao lăng trụ .

Vì tam giác ABC đều, có cạnh bằng a nên $B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

h = AA' = a $\Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt)

b) Diện tích xung quanh mặt trụ được tính theo công thức $S_{xq} = 2\pi.R.l$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow R = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, l =AA' =a

Vậy diện tích cần tìm là $S_{xq} = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a = 2\pi\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ (đvdt)

Ví dụ 2.6: **Một hình nón có đường sinh bằng 2a và thiết diện qua trục là tam giác vuông.**

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

b) Tính thể tích của khối nón

Giải

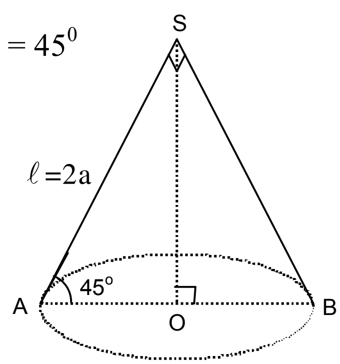
a) Thiết diện qua trục là tam giác SAB vuông cân tại S nên $\hat{A} = \hat{B} = 45^0$

$\Rightarrow$ SO = OA = h=R=$\frac{\ell}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{xq} = \pi R\ell = \pi.a\sqrt{2}.2a = 2\sqrt{2}\pi a^2$

$\Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\sqrt{2}\pi a^2 + 2\pi a^2 = (2\sqrt{2}+2)\pi a^2$

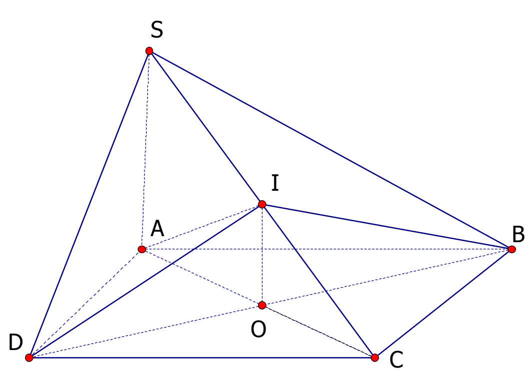
b) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}.\pi 2a^2.a\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$



Ví dụ 2.7: **Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a và SA vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm SC**

a) Tính thể tích khối chóp I.ABCD

b) Tính thể tích khối nón ngoại tiếp khối chóp I.ABCD (*khối nón có đỉnh I và đáy là hình tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD*)



a). Ta có IO ⊥ (ABCD) và $IO = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$

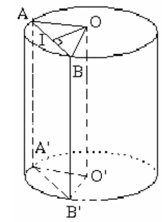
Thể tích $V_{I.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.IO = \frac{a^3}{6}$

b). Ta có khối nón có h = IO = $\frac{a}{2}$

Bán kính hình tròn đáy R = $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}.\pi.\frac{a^2}{2}.\frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{12}$

Bài Tập Về Mặt Tròn Xoay



Bài 2.1 Một hình trụ có khoảng cách hai đáy bằng 7a .Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một đoạn d = 3a theo một thiết diện có diện tích $S=56a^2$ .Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ.

Bài 2.2 Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a. Tính thể tích khối nón và diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

Bài 2.3 Cho hình nón tròn xoay có đường cao h=a, bán kính đáy r=1,5a. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón đã cho theo a.

Bài 2.4 Cho tam giác ABC vuông cân tại A,có BC=$20\sqrt{2}$ (cm). Hình nón tròn xoay khi quay đường gấp khúc CBA xung quanh trục là đường thẳng chứa cạnh AB. Tính Diện tích xung quanh của hình nón và Thể tích của khối nón.

Bài 2.5 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a .Gọi O là tâm hình vuông ABCD

a). Tính thể tích của hình chóp $O.A'B'C'$

b). Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$

Bài 2.6. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a có SA vuông góc với đáy và SA = AC.

a). Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b). Khi quay tam giác SAB quanh trục SA tạo ra hình nón. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón.

Bài 2.7. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a có SA vuông góc với đáy cạnh $SB = a\sqrt{3}$.

a). Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b). Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Bài 2.8. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. Gọi I là trung điểm của BC.

a). Tính thể tích khối chóp S.ABC và S.ABI theo a.

b). Một hình nón có đỉnh trùng với đỉnh của hình chóp và đáy là hình tròn ngoại tiếp đa giác đáy của hình chóp. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón.

Bài 2.9 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Biết AB=a, $BC = a\sqrt{3}$, SA=3a.

a). Tính thể tích khối chóp S.ABC.

b). Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC.

Bài 2.10 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Biết SA=AB=BC=a.

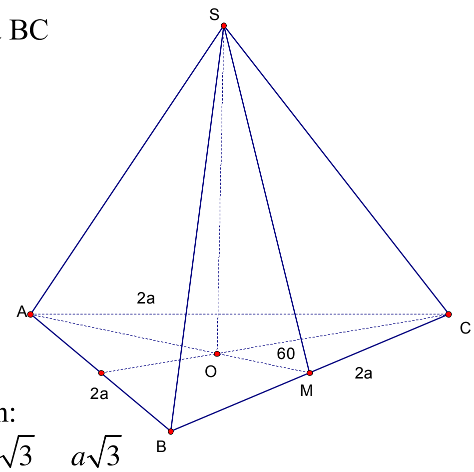
a). Tính thể tích khối chóp S.ABC.

b). Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC

MỘT SỐ ĐỀ THI LIÊN QUAN ĐẾN THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1. ***Đề Thi Học Kỳ 1- Năm học 2008-2009 (1,0 điểm)***

Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 2a, góc giữa mặt bên và

Gọi O là tâm của đáy và M là trung điểm của BC Do S.ABC là hình chóp tam giác đều nên: $\begin{cases} SO \perp (ABC) \\ g\big((SBC);(ABC)\big) = \widehat{SMO} = 60^0 \end{cases}$	0,25
	
Vì tam giác ABC là tam giác đều cạnh 2a nên: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ và $OM = 2a\dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	0,25
Xét tam giác vuông SMO: $SO = OM.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$	0,25
Vậy $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$	0,25

mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

2. ***Đề Thi Học Kỳ 1- Năm học 2009-2010 (2,0 điểm)***

Cho hình chóp S.ABC có $AB = BC = CA = a\sqrt{3}$; góc giữa các cạnh SA, SB, SC với mặt phẳng (ABC) bằng 60^0.

a) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

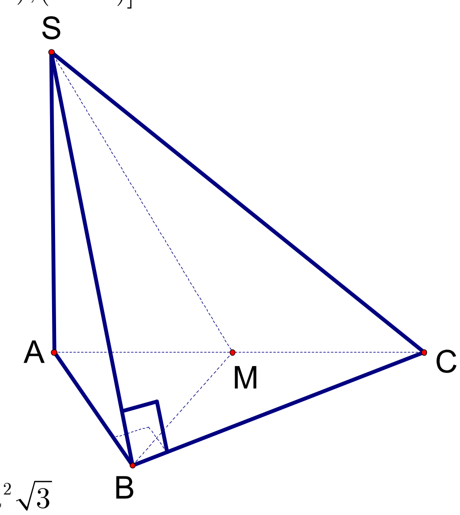
b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp này.

Đáp số : $V = \dfrac{3a^3}{4}, R = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

3. Đề Thi Diễn Tập TN 2009. (1,0 điểm)

Cho hình chóp S.ABC có SA **vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B,** $AB = a\sqrt{3}, AC = 2a$**, góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng** 60^0**. Gọi M là trung điểm của AC. Tính thể tích khối chóp S.BCM và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).**

Giải

<table>
<tr><td>Tính thể tích khối chóp S.BCM và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>Do $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{[(SBC);(ABC)]} = 60^0$
</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Xét tam giác vuông SAB và SBC ta có:
$\begin{cases} SA = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3a \\ SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a\sqrt{3} \\ BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a \\ dt(\Delta MBC) = \frac{1}{2}dt(\Delta ABC) = \frac{1}{4}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2}SB.BC = a^2\sqrt{3} \end{cases}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Suy ra:
$V_{S.BCM} = \frac{1}{3}dt(\Delta MBC).SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.3a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$d(M,(SBC)) = \frac{3V_{S.BCM}}{dt(\Delta SBC)} = \frac{3\frac{a^3\sqrt{3}}{4}}{a^2\sqrt{3}} = \frac{3a}{4}$</td><td>0.25</td></tr>
</table>

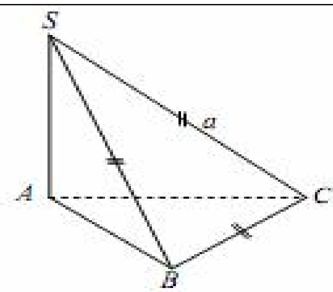
4. Đề Thi Diễn Tập TN 2010. (1,0 điểm)

Câu 3 *(1,0 điểm)*. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, $AC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB, tính thể tích của khối chóp G.ABC theo a.

Đáp số : $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

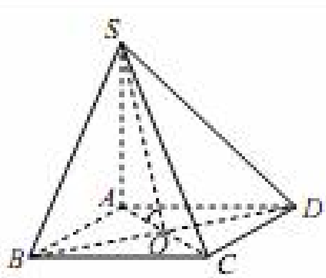
5. Đề thi TN 2009

Cho hình chóp S.ABC có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $\widehat{BAC} = 120^0$, tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

Vì $SA \perp mp(ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$. Xét hai tam giác vuông SAB và SAC, ta có $\left.\begin{matrix} SA \text{ chung} \\ SB = SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta SAB = \Delta SAC$ $\Rightarrow AB = AC$ 	0,25
Áp dụng định lí côsin cho tam giác cân BAC, ta được $a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 2AB^2(1-\cos 120^0) = 3AB^2$ Suy ra $AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.	0,50
Vì vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SA = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$.	0,25
***Lưu ý:** Ở câu này, **không** cho điểm hình vẽ.*	

6. Đề thi TN 2010

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a

 Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AO \perp BD$. (1) Vì $SA \perp mp(ABCD)$ nên: + SA là đường cao của khối chóp $S.ABCD$; + $SA \perp BD$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp mp(SOA)$. Do đó $SO \perp BD$. (3) Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{SOA}$ là góc giữa mp(SBD) và mp($ABCD$). Do đó $\widehat{SOA} = 60^0$.	0,50
Xét tam giác vuông SAO, ta có: $SA = OA.\tan\widehat{SOA} = \dfrac{AC}{2}.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.	0,25
Vì vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.	0,25

PHỤ LỤC ĐÁP SỐ

Phần I

1.1. $\frac{a^3}{3}$

1.2. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

1.3. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

1.4. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

1.5. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

1.6. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

1.7. $a^3\sqrt{3}$

1.8. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$

1.9. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

1.10. $\frac{1}{4}$

1.11. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

1.12. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

1.13. $S_{xq} = a\left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$

$S_{tq} = a\left(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}a^2b$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2b$

1.14. b).V = $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

c). R = $\frac{AC}{2}\ \frac{a\sqrt{2}}{2}$

1.15. $\frac{9a^3}{4}$, R = OA=a $\sqrt{3}$

1.16. a). V= $\frac{a^3.\sqrt{3}}{6}$

b). R = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

1.17. $10a^3$

1.18. V= $\frac{a^3}{3}$, R = $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

1.19. V = $\frac{3a^3}{2}$

1.20. R= $\frac{a\sqrt{6}}{4}$,S= $\frac{3\pi.a^2}{2}$.

V= $\frac{\pi.a^3\sqrt{6}}{8}$

1.21. R= $\frac{a\sqrt{6}}{3}$,S= $\frac{8\pi.a^2}{3}$

V= $\frac{8\pi.a^3\sqrt{6}}{27}$

1.22. V= $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

1.23. V= $\frac{a^3}{3}$, h = $\frac{a}{2}$

Phần II

2.1. $S_{xq} = 70\pi a^2, V = 175\pi a^3$

2.2. V= $\frac{\pi.a^3}{24}$;

$S_{xq} = \frac{\pi.a^2.\sqrt{2}}{4}$

2.3. $S_{xq} = \frac{3\pi a^2\sqrt{13}}{4}, V = \frac{3\pi a^3}{4}$

2.4. S = $400\sqrt{2}\pi$,V= $\frac{8000}{3}\pi$

2.5. S_{xq}= $\frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$,$V_{(N)}$= $\frac{\pi a^3}{12}$

2.6. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

2.7. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

2.8. $V_{S.ABI} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}$

2.9. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}, R = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

2.10. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$