CHUYÊN ĐỀ SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN TRONG VIỆC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Vĩnh Duy-CTK6

Lời Mở Đầu

Nhiều lúc tôi đặt ra câu hỏi khi đọc lời giải của khá nhiều bài toán đặc biệt là BĐT tôi không thể hiểu nổi tại sao lại có thể nghĩ ra nó nên cho rằng đấy là những lời giải không đẹp và thiếu tự nhiên. Đến cấp ba khi được học những kiến thức mới tôi mới bắt đầu có tư tưởng đi sâu vào bài toán và lời giải của chúng.Và cũng từ đó cộng thêm những kiến thức có được trong quá trình trình học tập tôi đã đi vào tìm hiểu một phương pháp chứng minh bất đẳng thức: ‘‘ Phương pháp sử dụng tiếp tuyến ’’. Đây là phương pháp chứng minh bất đẳng thức liên quan đến các hàm số có đạo hàm.

Một số bài toán trong chuyên đề này đã có ở một số sách tham khảo, chuyên đề về BĐT, tuy nhiên trong chuyên đề này các kết quả đó được xây dựng một cách khách quan và sắp xếp từ đơn giản đến phức tạp giúp người đọc có một cái nhìn tổng quan hơn. Một số bài toán có phần chú ý để chúng ta có thể nhìn nhận bài toán từ nhiều hướng khác nhau.Chuyên đề gồm hai phần chính:

Phần I :SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN TRONG VIỆC CHỨNG MINH BĐT

Phần II : MỘT SỐ MỞ RỘNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN TRONG VIỆC CHỨNG MINH BĐT

Vì năng lực còn nhiều hạn chế nên ở chuyên đề có những thiếu sót nhất định. Rất mong nhận được sự thông cảm và góp ý để chuyên đề được tốt hơn.

Phần I:SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN TRONG VIỆC CHỨNG MINH BĐT

Nhận xét: Nếu $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0; y_0)$ (A không phải là điểm uốn) , khi đó tồn tại một khoảng D chứa điểm x_0 sao cho $f(x) \geq ax + b \quad \forall x \in D$ hoặc $f(x) \leq ax + b \quad \forall x \in D$. Đẳng thức xảy ra khi $x = x_0$

*Nếu $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0; y_0)$ thì ta luôn phân tích được $f(x) - (ax + b) = (x - x_0)^k g(x)$, $k \geq 2$

Bây giờ ta vận dụng nhận xét này để chứng minh một số bất đẳng thức.

Bài toán 1: Cho a,b,c,d >0 thỏa mãn a+b+c+d=1.CMR: $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$

Nhận xét. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{4}$. BĐT cần chứng minh:

$$(6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2) \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{1}{8}$$

Trong đó $f(x) = 6x^3 - x^2$. Ta có tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{4}$ là

$$y = f'(\frac{1}{4})(x - \frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}) = \left[18.\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2.\left(\frac{1}{4}\right)\right]\left(x - \frac{1}{4}\right) + 6\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow y = \frac{5x-1}{8}$$

Điều chúng ta cần: $f(x) \geq \frac{5x-1}{8}$ với $x \in (0;1)$

Lời giải.

Ta có: $(6a^3 - a^2) \geq \frac{5a-1}{8} \Leftrightarrow 48a^3 - 8a^2 - 5a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (4a-1)^2(3a+1) \geq 0$ (Đúng $\forall x \in (0;1)$)

Vậy: $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5(a+b+c+d) - 8}{8} = \frac{1}{8}$ (đpcm)

Bài toán 2: Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ và $a + b + c = 1$. CMR: $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$

Nhận xét. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$ và BĐT chứng minh có dạng $f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{9}{10}$ trong đó $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ với $x \in \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right]$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là: $y = \frac{36x+3}{50}$

Lời giải. Ta có $\frac{36a+3}{50} - \frac{a}{a^2+1} = \frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)} \geq 0$

$\forall a \in \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right] \Rightarrow \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{36a+3}{50} \quad \forall a \in \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right]$ Vậy: $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{36(a+b+c)+9}{50} = \frac{9}{10}$

đpcm

Chú ý: Bài toán 1.67(Poland)/trang101 Sáng tạo BĐT

Bài toán 3 :Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. CMR : $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-(a+b+c)\ge 2\sqrt{3}$

Nhận xét. Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ và BĐT đã cho có dạng

$f(a)+f(b)+f(c)\ge 2\sqrt{3}$ trong đó $f(x)=\frac{1}{x}-x$ với $x\in(0;1)$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ là: $y=-4x+2\sqrt{3}$

Ta sẽ đánh giá $f(x)\ge -4x+2\sqrt{3}$.

Lời giải. $f(x)=\frac{1}{x}-x\ge -4x+2\sqrt{3}\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x}\ge -4x+2\sqrt{3}\Leftrightarrow(\sqrt{3}x-1)^2\ge 0$ đúng $\forall x$ và dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy ta có: $f(a)+f(b)+f(c)\ge -4(a+b+c)+6\sqrt{3}$

Mặt khác : $a+b+c\le\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=\sqrt{3}\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge 2\sqrt{3}$ đpcm

Chú ý : Ta thấy rằng yếu tố quan trọng nhất để chúng ta có thể sử dụng phương pháp này là ta chuyển được BĐT về dạng $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\ge m$ hoặc $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\le m$ và $a_i\ (i=1,..,n)$ thỏa mãn điều kiện nào đó.

Bài toán 4: Cho a,b,c >o và a+b+c=3 .CMR: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge$ ab+bc+ca (1)

Nhận xét. BĐT tương đương :

$a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c}\ge(a+b+c)^2=9\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge 9$

Trong đó $f(x)=x^2+2\sqrt{x}$ với $x\in(0;3)$. Dấu "=" xảy ra khi a=b=c=1 và tiếp tuyến của đồ thị hàm số y= $f(x)=x^2+2\sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ x=1 là: y=3x

Xét: $f(x)-3x=(\sqrt{x}-1)^2(x+2\sqrt{x})\ge 0$ ∀x∈(0;3). Vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải. (1) $\Leftrightarrow a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c}\ge 9$

Ta có: $a^2+2\sqrt{a}-3a=(\sqrt{a}-1)^2(a+2\sqrt{a})\ge 0$

$\Rightarrow a^2+2\sqrt{a}\ge 3a$

Tương tự: $b^2+2\sqrt{b}\ge 3b; c^2+2\sqrt{c}\ge 3c$

Cộng ba BĐT trên ta có đpcm.

Chú ý: Với bài toán trên ta có thể sử dụng BĐT Cauchy để chứng minh.
Bài toán 2.3 Rusia MO 2000/trang106 Sáng tạo BĐT

Bài toán 5: Cho các số thực a,b,c >0 thỏa mãn $a+b+c=1$.CMR: $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\geq\frac{9}{10}$

Lời giải. Ta có $bc\leq(\frac{b+c}{2})^2=(\frac{1-a}{2})^2$; $ac\leq(\frac{a+c}{2})^2=(\frac{1-b}{2})^2$; $ab\leq(\frac{a+b}{2})^2=(\frac{1-c}{2})^2$

$\Rightarrow\quad \frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\geq\frac{4a}{a^2-2a+5}+\frac{4b}{b^2-2b+5}+\frac{4c}{c^2-2c+5}$

(**Nhận xét**: Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ và tiếp tuyến của hàm số đồ thị $y=f(x)=\frac{4x}{x^2-2x+5}$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{3}$ là: $y=\frac{99x-3}{100}$)

Ta có: $\frac{4x}{x^2-2x+5}-\frac{99x-3}{100}=\frac{(3x-1)^2(15-11x)}{100(x^2-2x+5)}\geq 0\quad \forall x\in(0;1)$

Suy ra: $\frac{4a}{a^2-2a+5}+\frac{4b}{b^2-2b+5}+\frac{4c}{c^2-2c+5}\geq\frac{99(a+b+c)-9}{100}=\frac{9}{10}$ đpcm

Bài toán 6: Cho các số dương a,b,c có tổng bằng 3.CMR: $\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca}\leq\frac{3}{8}$

Nhận xét. Ta có: $ab\leq(\frac{a+b}{2})^2=(\frac{3-c}{2})^2$

$\Rightarrow\frac{1}{9-ab}\leq\frac{4}{-c^2+6c+27}$ .Tương tự: $\frac{1}{9-bc}\leq\frac{4}{-a^2+6a+27}$; $\frac{1}{9-ca}\leq\frac{4}{-a^2+6a+27}$

. Dấu "=" xảy ta khi a=b=c=1 và BĐT có dạng $f(a)+f(b)+f(c)\leq\frac{3}{8}$

Trong đó $f(x)=\frac{4}{-x^2+6x+27}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ x=1 là: $y=\frac{9-x}{64}$

Lời giải. Ta có: $\frac{4}{-x^2+6x+27}-\frac{9-x}{64}=\frac{(x-1)^2(x-13)}{64(-x^2+6x+27)}\leq 0\quad\forall x\in(0;3)$

Vậy: $\frac{4}{-a^2+6a+27}+\frac{4}{-b^2+6b+27}+\frac{4}{-c^2+6c+27}\leq\frac{27-(a+b+c)}{64}=\frac{3}{8}$ Ta có đpcm

Chú ý: Bài toán trên có thể giải bằng BĐT chebyshev
Ví dụ 1.3.8(crux)/trang41 Sáng tạo BĐT

Bài toán 7:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. CMR:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\geq 4(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$

Nhận xét. Ta có BĐT chứng minh là thuần nhất nên ta có thể giả sử a+b+c=1

BĐT: $(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a})+(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b})+(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c})\leq 9\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\leq 9$ trong đó $f(x)=\frac{5x-1}{x-x^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi a=b=c=$\frac{1}{3}$ .tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ x=$\frac{1}{3}$ là: $y=18x-3$. Chúng ta hy vọng có sự đánh giá: $f(x)-(18x-3)=\frac{(3x-1)^2(2x-1)}{x-x^2}\leq 0$ (1)

Vì a,b,c là ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a+b+c=1$, giả sử $a=\max\left\{a,b,c\right\}$ khi đó

$1=a+b+c>2a \Rightarrow a<\dfrac{1}{2}$ suy ra $a,b,c\in(0;\dfrac{1}{2})$ =>(1) đúng

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử a+b+c=1, khi đó BĐT trờ thành:

$$\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5b-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}\le 9$$

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác và a+b+c=1 $\Rightarrow a,b,c\in(0;\dfrac{1}{2})$

Ta có: $\dfrac{5a-1}{a-a^2}-(18a-3)=\dfrac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2}\le 0\ \ \forall a\in(0;\dfrac{1}{2})\Rightarrow\dfrac{5a-1}{a-a^2}\le(18a-3)$

Tương tự: $\dfrac{5b-1}{b-b^2}\le(18b-3);\dfrac{5c-1}{c-c^2}\le(18c-3)$ .Cộng các BĐT này lại với nhau ta có:

$\dfrac{5a-1}{a-a^2}+\dfrac{5b-1}{b-b^2}+\dfrac{5c-1}{c-c^2}\le 18(a+b+c)-9=9$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi : $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

<u>Bài toán 8:</u> Cho a,b,c>0 .CMR: $\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(a+b)^2}\ge\dfrac{9}{4(a+b+c)}$

<u>Lời giải.</u> Không mất tính tổng quát ta giả sử $a+b+c=1$. Khi đó BĐT đã cho trở thành:

$\dfrac{a}{(1-a)^2}+\dfrac{b}{(1-b)^2}+\dfrac{c}{(1-c)^2}\ge\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge\dfrac{9}{4}$ với $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$

$x\in(0;1)$ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{1}{3}$ là $y=\dfrac{18x-3}{4}$

Ta có: $f(x)-\dfrac{18x-3}{4}=\dfrac{(3x-1)^2(3-2x)}{4(1-x)^2}\ge 0\ \ \forall x\in(0;1)\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{18x-3}{4}$

Suy ra : $f(a)+f(b)+f(c)\ge\dfrac{18(a+b+c)-9}{4}=\dfrac{9}{4}$ đpcm

<u>Bài toán 9</u>: Cho $a,b,c>0$ .CMR: $\dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\dfrac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\dfrac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\dfrac{6}{5}$

(Trích đề thi Olympic 30-4 Lớp 11 năm 2006)

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a+b+c=1$

Khi đó BĐT đã cho trở thành: $\dfrac{a(1-a)}{a^2+(1-a)^2}+\dfrac{b(1-b)}{b^2+(1-b)^2}+\dfrac{c(1-c)}{c^2+(1-c)^2}\le\dfrac{6}{5}$

Hay $f(a)+f(b)+f(c)\le\dfrac{6}{5}$ với $f(x)=\dfrac{x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}=\dfrac{x-x^2}{2x^2-2x+1}$ với $x\in(0;1)$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ

$x=\dfrac{1}{3}$ là $y=\dfrac{27x+1}{25}$

Ta có: $\dfrac{27x+1}{25}-f(x)=\dfrac{(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)}\geq 0 \qquad \forall x\in(0;1)\Rightarrow f(x)\leq\dfrac{27x+1}{25}$

Vậy $f(a)+f(b)+f(c)\leq\dfrac{27(a+b+c)+3}{25}=\dfrac{6}{5}$ đpcm

<u>Bài toán 10:</u> Cho $a,b,c>0$. CMR : $\dfrac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\dfrac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\dfrac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\dfrac{3}{5}$

(*Olympic Toán Nhật Bản 1997)*

Lời giải: Ta giả sử $a+b+c=1$. Khi đó BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2}+\frac{(1-2b)^2}{(1-b)^2+b^2}+\frac{(1-2c)^2}{(1-c)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}+\frac{4b^2-4b+1}{2b^2-2b+1}+\frac{4c^2-4c+1}{2c^2-2c+1}\geq\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2a^2-2a+1}+\frac{1}{2b^2-2b+1}+\frac{1}{2c^2-2c+1}\leq\frac{27}{5}\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\leq\frac{27}{5}$$

Trong đó $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$ với $x\in(0;1)$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số *y=f(x)* tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{1}{3}$ là $y=\dfrac{54x+27}{25}$

Ta có: $\dfrac{54x+27}{25}-f(x)=\dfrac{2(54x^3-27x^2+1)}{25(2x^2-2x+1)}=\dfrac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)}\geq 0 \quad \forall x\in(0;1)$

$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\leq\dfrac{54(a+b+c)+81}{25}=\dfrac{27}{5}$ đpcm

Chú ý: Với bài toán trên ta có thể sử dụng Phương pháp hệ số bất định để chứng minh (ví dụ 1.6.12/trang68 Sáng tạo BĐT)

<u>Bài toán 11</u>: Cho a,b,c>0.Cmr $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})\geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

BĐT đã cho đồng bậc nên ta chuẩn hóa: $a^2+b^2+c^2$ =1, khi đó BĐT trở thành:

$f(a)+f(b)+f(c)\geq 1$ trong đó: $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(\dfrac{1}{x}-x)$ với $x\in(0;1)$.Đẳng thức xảy ra khi

$a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ là

$y=-\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}x+\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$.Chúng ta chứng minh

được $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.\left(\dfrac{1}{x}-x\right)\geq-\dfrac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x+\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}\ \forall x\in(0;1)$ đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ta có $a+b+c\leq\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}=\sqrt{3}$

Do vậy: $f(a)+f(b)+f(c)\geq-\dfrac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(a+b+c)+2+2\sqrt{3}=-\dfrac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}$ =1 ta có đpcm

Phần II : MỘT SỐ MỞ RỘNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN TRONG VIỆC CHỨNG MINH BĐT

Qua các ví dụ trước ta đã thấy rõ được ứng dụng của phương pháp tiếp tuyến nhưng như thế có lẽ các bạn vẫn chưa thoả mãn bởi lẽ ở các bài toán ví dụ trên việc tạo các biểu thức độc lập hay nói cách khác là việc tạo lập các hàm đặc trưng để xét tính lồi lõm và điểm rơi cũng khá đơn giản.Và tôi đã sử dụng 2 ví dụ sau theo cá nhân tôi là khá hay và khi xác định hướng giải chắc các bạn sẽ không nghĩ tới phương pháp tiếp tuyến.

Bài toán 12: *(Vĩnh Duy)* Cho các số thực $a_1,a_2,\ldots,a_n$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Chứng minh: $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2-a_i} \geq \frac{n}{2n-1}$

Lời giải. Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$ và BĐT đã cho có dạng

$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq \frac{n}{2n-1}$ trong đó $f(x) = \frac{x}{2-x}$ với $x \in (0;1)$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm

có hoành độ $x = \frac{1}{n}$ là: $y = \frac{2n^2x-1}{(2n-1)^2}$. Ta có: $\frac{x}{2-x} - \frac{2n^2x-1}{(2n-1)^2} = \frac{2n^2(x-\frac{1}{n})^2}{(2n-1)^2(2-x)} \geq 0 \ \forall x \in (0;1)$

Vậy $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2-a_i} \geq \frac{n(2n^2.\frac{1}{n}-1)}{(2n-1)^2} = \frac{n}{2n-1}$ Ta có đpcm

Chú ý:Bài toán trên có thể giải ngắn gọn bằng BĐT chebyshev
(Ví dụ 1.3.1 (Balkan MO)/trang35 Sáng tạo BĐT)

Bài toán 13: *(Vĩnh Duy)* Cho a,b,c >0.CMR: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$

Lời giải . Ta chứng minh:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3} (*) \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

Chứng minh tương tự với các biểu thức còn lại rồi cộng dồn ta có ĐPCM.

Ta sẽ phân tích việc tạo ra được BĐT phụ (*) theo hướng tiếp tuyến .

Ta xét hàm số sau $f(a) = \frac{a^3}{a^2+ab+b^2}, f'(a) = \frac{a^4+2a^3b+3a^2b^2}{(a^2+ab+b^2)^2}$

Ta nhận thấy dấu bằng xảy ra khi a=b Lúc đó ta sẽ đánh giá $f(a) \geq f'(b)(a-b) + f(b)$

Từ đó ta nhận được (*).

Một số bài tập để các bạn khám phá:

a, $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$

b, $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$

c) Cho a,b,c >0 a+b+c =2 .CMR:

$$\frac{11b^3-a^3}{ab+4b^2} + \frac{11c^3-b^3}{bc+4c^2} + \frac{11a^3-c^3}{ac+4a^2}$$

d, Cho a,b,c > 0 . CMR: $\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Một số bài tập áp dụng:

1.Cho a,b,c>0 và a+b+c=1. CMR : $10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\ge 1$

2.Cho a,b,c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$.CMR : $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-(a+b+c)\ge 2\sqrt{3}$

3.Cho a,b,c>0 và $a^2+b^2+c^2=3$.CMR : $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{4}{3}(a+b+c)\ge 7$

4.Cho a,b,c,d>0 và a+b+c+d=2.CMR : $\frac{1}{1+3a^2}+\frac{1}{1+3b^2}+\frac{1}{1+3c^2}+\frac{1}{1+3d^2}\ge\frac{16}{7}$

5.Cho a,b,c là các số thực sao cho $a^2+b^2+c^2=3$.CMR $\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{b^5+3-b^2}+\frac{1}{c^5+3-c^2}\le 1$

6.Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : a+b+c+d=2.CMR :

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{b^2}{(b^2+1)^2}+\frac{c^2}{(c^2+1)^2}+\frac{d^2}{(d^2+1)^2}\le\frac{16}{25}$$

7.Cho a,b,c>0 và a+b+c=3. CMR : $\frac{1}{\sqrt{a^2-3a+3}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-3b+3}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-3c+3}}\le 3$

8.Cho a,b,c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$.CMR : $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}$

9.Cho a,b,c>0 thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$. CMR : $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1$

10.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. CMR : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}$

11.Cho a,b,c>0.CMR : $\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$

12.Cho $a,b,c>0$ Cmr: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$

13.CMR : $\frac{2x^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{2y^2}{2y^2+(x+z)^2}+\frac{2z^2}{2z^2+(x+y)^2}\le 1$

14.Cho a,b,c>0. Cmr: $\frac{(2a+b+c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$

15.Cho a,b,c>0.CMR : $\frac{3(a+b+c)^3}{3a^3+(b+c)^2}+\frac{3(a+b+c)^3}{3b^3+(a+c)^2}+\frac{3(a+b+c)^3}{3c^3+(a+b)^2}\le\frac{375}{11}$

16.Cho a,b,c>0. CMR : $\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{2}$

17.Cho a,b,c>0 và a+b+c=3. CMR : $\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1$

18.Cho các số a,b,c,d không âm. CMR :

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{c^2+d^2+a^2}+\frac{c}{d^2+a^2+b^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

19.Cho a,b,c>0.CMR: $\dfrac{xyz(x+y+z)+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+xz)} \le \dfrac{3+\sqrt{3}}{9}$

20.Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn: $ab+bc+cd+da=1$. Cmr :

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \ge \frac{1}{3}$$

21.Cho a,b,c>0.CMR : $\sqrt{\dfrac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\dfrac{b^3}{b^3+(a+c)^3}}+\sqrt{\dfrac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge 1$

22.Cho các số thực dương a,b,c. CMR : $\sum_{cyc}\dfrac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c} \ge \dfrac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}$

23.Cho a,b,c>0. CMR : $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b}{\sqrt{a+c}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \sqrt{\dfrac{3}{2}(a+b+c)}$

24.Cho $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$ và $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$. CMR $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{3a_i^2+5} \le \dfrac{n}{8}$

25. Cho a,b,c > 0 . CMR: $\dfrac{a^4}{a^3+b^3}+\dfrac{b^4}{b^3+c^3}+\dfrac{c^4}{c^3+a^3} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$