Giới hạn của hàm số

1 Kiến thức cơ bản

1.1 Giới hạn của hàm số tại một điểm

Giả sử $x_0 \in (a;b)$ và $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ có thể trừ điểm x_0. Nếu mọi dãy (x_n) thuộc khoảng $(a;b)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to x_0$. Khi đấy ta viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Ví dụ 1. Tính giới hạn của $f(x) = x^2 + 1$ khi $x \to 2$

Xét dãy (x_n) tùy ý mà $x_n \to 2$, ta có $\lim f(x_n) = \lim(x_n^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 1) = 5$.

Chú ý rằng, cách làm trên là chúng ta xét bất kỳ dãy số (x_n) miễn là $x_n \to 2$ chẳng hạn có thể xét cụ thể (x_n) có công thức $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ hay $x_n = \dfrac{2n^2 - 2}{n^2 + 1}$ hay bất cứ dãy nào khác có giới hạn là 2.

Nhận xét:

- $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ với C là hằng số, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$
- Nếu $f(x)$ là các hàm đa thức, phân thức xác định tại x_0 thì giới hạn của $f(x)$ tại x_0 chính bằng $f(x_0)$

1.2 Giới hạn của hàm số tại vô cực

Giả sử $f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$. Nếu mọi dãy (x_n) thuộc khoảng $(a;+\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to +\infty$. Khi đấy ta viết

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn của hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+2}}{\sqrt{x}+1}$ khi $x \to +\infty$

Ta có $f(x)$ xác định trên $[0;+\infty)$. Xét dãy số (x_n) bất kì trên $[0;+\infty)$ mà $x_n \to +\infty$ thì ta có:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{\sqrt{4x_n+2}}{\sqrt{x_n}+1} = \lim \frac{\sqrt{4 + \frac{2}{x_n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x_n}}} = 2$$

Vậy hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+2}}{\sqrt{x}+1}$ có giới hạn là 2 khi $x \to +\infty$

Hoàn toàn tương tự, chúng ta có định nghĩa giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to -\infty$.

Giả sử $f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Nếu mọi dãy (x_n) thuộc khoảng $(-\infty; a)$ mà $\lim x_n = -\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to -\infty$. Khi đấy ta viết

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

1.3 Giới hạn một bên

Giới hạn trái: Giả sử $f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Nếu mọi dãy (x_n) thuộc khoảng $(a; x_0)$, tức là $a < x_n < x_0 \forall n$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn trái là L khi $x \to x_0$. Khi đấy ta viết

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

Ví dụ 3. Tính giới hạn trái của $f(x) = \dfrac{-2013x}{\sqrt{3-x}}$ khi $x \to 3$

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} (-2013x) = -6039 < 0$, $\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = 0$ và $\sqrt{3-x} > 0 \,\forall x < 3$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-2013x}{\sqrt{3-x}} = -\infty$

Giới hạn phải: Giả sử $f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Nếu mọi dãy (x_n) thuộc khoảng $(x_0; b)$, tức là $b > x_n > x_0 \forall n$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn phải là L khi $x \to x_0$. Khi đấy ta viết

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

Ví dụ 4. Tính giới hạn phải của $f(x) = \dfrac{|1-x|}{6(x-1)}$ tại $x = 1$.

Ta có $x > 1 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow |1-x| = x - 1$, do đó:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{6(x-1)} = \frac{1}{6}$$

Chú ý: Hàm số $f(x)$ có giới hạn tại x_0 khi và chỉ khi nó có giới hạn trái, giới hạn phải tại x_0 và hai giới hạn này phải bằng nhau.

2 Các dạng toán và ví dụ

2.1 Giới hạn cơ bản

Đối với **giới hạn hữu hạn:**

i. Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn.

ii. Nếu $f(x)$ là các hàm đa thức, phân thức xác định tại x_0 thì giới hạn của $f(x)$ tại x_0 chính bằng $f(x_0)$

Đối với **giới hạn vô cực:**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x))$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
$L<0$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$L\neq 0$	$\pm\infty$	0
$L>0$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$=0, $g(x)>0\,\forall x$	$+\infty$
$L>0$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$=0, $g(x)<0\,\forall x$	$-\infty$
$L<0$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$=0, $g(x)>0\,\forall x$	$-\infty$
$L<0$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$=0, $g(x)<0\,\forall x$	$+\infty$

Một số giới hạn thường gặp:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với k chẵn và $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ với k lẻ.

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^4-5x^3+8x^2-6x+3)=2^4-5.2^3+8.2^2-6.2+3=-1$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-4x^2+9x-3}{x+2}=...=\dfrac{4}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x^2+3}=\sqrt{1^2+3}=2$

4. $\lim\limits_{x\to 1^-}(3x^3-1)=3.1^3-1=-4$

5. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-2}{x-1}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$ và $x-1<0\,\forall x<1$

6. $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{3x+2}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{\frac{3x+2}{x-1}}{x+1}\right)=-\infty$
vì $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x+2}{x-1}=\dfrac{1}{2}>0$, $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0$ và $x+1>0\,\forall x>-1$

7. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-5x^2}{(x-2)^3}=+\infty$ vì $\lim_{x\to 2^-}(-5x^2)=-20<0$, $\lim_{x\to 2^-}(x-2)^3=0$ và $(x-2)^3<0\,\forall x<2$

8. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-5x^2}{(x-2)^2}=-\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(-5x^2)=-20<0$, $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)^2=0$ và $(x-2)^2<0\,\forall x<2$

9. $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=-3$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=3$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x-\sqrt{x}+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^3})\right)=+\infty$

2.2 Các dạng giới hạn vô định

Khi tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ chúng ta thường gặp các dạng sau:

2.2.1 Dạng $\frac{0}{0}$

Phương pháp:

- Phân tích $P(x)$ và $Q(x)$ thành nhân tử và giản ước.

- Nhân và chia với biểu thức liên hợp của tử, mẫu hoặc cả tử và mẫu.

- Tách thành các giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$ đơn giản hơn (Phương pháp **gọi hằng số vắng** hoặc **đặt ẩn phụ**)

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2-x+1)}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x+1}{x}=\dfrac{7}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{4x^2+2x+1}{3x-1}=6$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(6x^2+11x+6)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(6x^2+11x+6)=6$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-5x^3+3x^2+x-1}{3x^4-8x^3+6x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3(2x+1)}{(x-1)^3(3x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{3x+1}=\dfrac{3}{4}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)^{20}(x-2)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}=\dfrac{3^{20}}{6^{10}}=\dfrac{3^{10}}{2^{10}}$

6. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(1-x)(2-x)}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 2^-}(1-x)\sqrt{2-x}=0$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}(5-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$ không tồn tại vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2})^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3x^2+1})^2-(2x)^2}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1-x}{\sqrt{3x^2+1}+2x}=-\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}=...=-4$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}=-\dfrac{3}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}=-\dfrac{1}{4}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+\sqrt{3x-2})}=...=\dfrac{3}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}=...=-1$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=...=\dfrac{1}{3}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}=...=1$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\dfrac{7}{24}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}\right).$

   Vì[1] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}=-\dfrac{3}{8}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}=\dfrac{1}{12}$ nên $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\dfrac{-11}{24}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2+2-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}=...=\dfrac{1}{6}$

4. [ĐHQG 97A]

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-2+2-\sqrt[3]{8-x}}{x}=...=\dfrac{13}{12}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-3+3-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=...=\dfrac{7}{54}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(\sqrt[3]{x}+1)+(x^2+x)}{x+1}=...=-\dfrac{2}{3}$

7. [ĐH Thủy Lợi 2001]

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)+(1+x)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=...=\dfrac{1}{2}$

2.2.2 Dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp: Chia cả $P(x)$ và $Q(x)$ cho x với số mũ cao nhất của $Q(x)$ rồi sử dụng $\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{x^k},\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ là các dãy có giới hạn bằng 0 khi $x\to\infty$

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

[1]

(a) **Chú ý** cách trình bày, chỉ được viết $\lim(A\pm B)=\lim A\pm\lim B$ khi $\lim A$ và $\lim B$ đều tồn tại và hữu hạn.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+4x^2-x+1}{5x^3+x+10}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}}=\dfrac{2}{5}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^3(-x+1)^2}{x(2x+5)^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5(2+\frac{1}{x})^3(-1+\frac{1}{x})^2}{x^5(2+\frac{5}{x})^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2+\frac{1}{x})^3(-1+\frac{1}{x})^2}{(2+\frac{5}{x})^4}=\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^5+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}}{1+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}}=\dfrac{0}{1}=0$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x^2}{2x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4(1+\frac{1}{x^2})}{x^3(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)=-\infty$

   Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{2}>0$

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}\right)=+\infty$

   Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}=1>0$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+2x^2-1}{2x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3(-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3})}{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\dfrac{-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

   Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1<0$

2.2.3 Dạng vô định $\infty-\infty$

Phương pháp: Đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ bằng cách nhân liên hợp

Bài 6.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1)}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{-1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{0}{2}=0$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1-(x^2-x-1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}$

   $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x(1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}})}=1$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-x+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left((\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)+(x-\sqrt{x^2-x+1})\right)$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2-x^3}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^2+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-x+1)}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\right)$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^2+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}+\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\right) = ... = 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

2.2.4 Dạng vô định $0.\infty$

Phương pháp: Đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ hoặc $\frac{0}{0}$

Bài 7.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x^2+1-x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)} = \dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{x^3-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3(1+\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})^2}{x^3(1-\frac{1}{x^2})}} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^3+5}\sqrt{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{(x+2)(x-1)^2}}{x^3+5} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\sqrt{\frac{1}{x^3}(1+\frac{2}{x})(1-\frac{1}{x})^2}}{x^3(1+\frac{5}{x^3})} = 0$

4. $\lim\limits_{x\to-1^+}(x^3+1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to-1^+}\left((x+1)(x^2-x+1)\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}\right)$
$= \lim\limits_{x\to-1^+}\left(\sqrt{x+1}(x^2-x+1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\right) = 0.1.\sqrt{\dfrac{1}{2}} = 0$

5. $\lim\limits_{x\to4^+}(x^2-16)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-64}} = \lim\limits_{x\to4^+}\left((x-4)(x+4)\sqrt{\dfrac{x}{(x-4)(x^2+4x+16)}}\right)$
$= \lim\limits_{x\to4^+}\left(\sqrt{x-4}(x+4)\sqrt{\dfrac{x}{x^2+4x+16}}\right) = 0.8.\sqrt{\dfrac{1}{12}} = 0$

Xuân Trường, ngày 19/01/2014

Break All Rules